UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

anno accademico 2006/2007

Excursus sulla dimostrazione della congettura di Poincaré

Giulia Sarfatti

Relatore:
Prof. Fabio Vlacci

Ottobre 2007

1 Introduzione

L'idea di questo lavoro è quella di ripercorrere i passi che hanno portato alla dimostrazione della congettura di Poincaré. Infatti anche la sola conoscenza della struttura della dimostrazione e la comprensione dell'uso dei sofisticati strumenti utilizzati nei vari passaggi è di notevole interesse scientifico e formativo. Storicamente, la congettura di Poincaré, può essere collocata negli anni che hanno visto la nascita ed il primo sviluppo di una nuova branca della matematica: la topologia, al tempo chiamata *analisis situ*. Henri Poicaré contribuí molto alla sua espansione, creando praticamente dal nulla il campo della topologia algebrica. Studiò a lungo le varietà, in particolare le 3–varietà, che lo interessavano in quanto possibili modelli per il nostro universo. Dedicò molto tempo allo studio di una loro caratterizzazione, arrivando ad associare ad ogni varietà un oggetto algebrico che chiamò Gruppo Fondamentale e ad introdurre, ad esempio, il concetto di semplice connessione,[1] equivalente alla condizione di Gruppo Fondamentale banale. Grazie a questo nuovo approccio e ad eleganti tecniche topologiche, le varietà compatte di dimensione 2 (o superfici topologiche compatte) sono state tutte classificate. Vale infatti il seguente

Teorema 1.1 (DI CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI TOPOLOGICHE COMPATTE)**.** *Ogni superficie topologica compatta è omeomorfa a $\mathbb{S}^2$, ad una somma connessa di tori oppure ad una somma connessa di piani proiettivi.*

La dimostrazione di questo teorema si basa su un risultato di Tibor Radó (del 1925), che garantisce che ogni superficie topologica compatta è triangolarizzabile e dunque omeomorfa ad un poligono piano, chiuso, con un numero pari di lati, quozientato rispetto ad una relazione di equivalenza che identifica a coppie, in modo opportuno, i lati del poligono. Un tale spazio quoziente si dice uno sviluppo piano della superficie data. Sostanzialmente la dimostrazione (si veda [6]) consiste nell'implementare un algoritmo che sfrutta la tecnica del Taglia–Incolla. Le operazioni di Taglia–Incolla sullo sviluppo piano di una superficie topologica compatta, consistono nel tagliare il poligono lungo corde oppurtune e quozientarlo rispetto ad una relazione di equivalenza che identifichi i lati che vogliamo incollare. Si otterrà cosí un nuovo poligono, omeomorfo al precedente. La congettura di Poincaré, formulata nel 1904 nell'ultimo dei suoi grandi articoli topologici, rappresenta il primo passo verso una possibile classificazione delle 3–varietà e può così essere espressa:

Congettura 1.2. *Ogni 3-varietà compatta, semplicemente connessa è omeomorfa a $\mathbb{S}^3$*

Questa congettura ha subito affascinato numerosissimi matematici ma, nonostante il suo enunciato appaia come la più semplice domanda da porsi studiando una classificazione delle 3–varietà, la sua dimostrazione ha dovuto attendere circa cento anni. È stata portata a termine da Grigori Perelman nel 2002, dopo aver proseguito un lavoro iniziato precedentemente (anni '80) da Richard Hamilton, ma le cui origini si possono leggere nei lavori di Bill Thurston (anni '70), che hanno ridato vita alle ricerche nel campo della Geometria. Thurston si occupò a lungo del problema della classificazione

[1]Tra le 3–varietà studiate da Poincaré si possono citare quelle costruibili identificando a coppie le facce opposte di un cubo, varietà non sempre semplicamente connesse, come, ad esempio, il toro tridimensionale.

delle 3–varietà, arrivando a congetturare che ogni 3–varietà può essere scomposta in modo essenzialmente unico tagliando lungo sfere bidimensionali e tori, per ottenere dei "pezzi elementari" che possono essere classificati geometricamente. La dimostrazione di questo fatto, noto come Congettura di Geometrizzazione, avrebbe implicato la verità della congettura di Poincaré, dato che, nella classificazione di Thurston, ogni 3–varietà semplicemente connessa risulta omeomorfa a $\mathbb{S}^3$.

In quanto segue si considererà M una varietà riemanniana compatta di dimensione 3 con metrica g. Associate alla metrica g, si indicheranno[2] con R_g il tensore di curvatura, con Ric_g la curvatura di Ricci, con $\mathcal{R}_g$ la curvatura scalare e con K_g la curvatura sezionale.

2 L'approccio di Hamilton e il flusso di Ricci

La vera e propria svolta nel percorso verso la dimostrazione della Congettura di Poincaré, si è avuta con Hamilton che ha affrontato il problema da un punto di vista totalmente nuovo. Egli infatti ha cercato un procedimento evolutivo che, a partire da una metrica qualunque su una varietà differenziabile data, arrivasse a generare una metrica a curvatura sezionale costante. Questo procedimento consiste nello studio delle soluzioni dell'equazione del flusso di Ricci.

Definizione 2.1. *Si chiama* **flusso di Ricci** *una famiglia di metriche riemanniane $g(t)$ sulla varietà M, parametrizzate su un intervallo $[0, T)$, che verifica l'equazione*

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2Ric_{g(t)} \tag{1}$$

dove

$$Ric_{g(t)}(x, x)_p = \sum_{i=1}^{2} \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle$$

con $x \in T_pM$ vettore unitario, $\{z_i\}_{i=1,2}$ base ortonormale dell'iperpiano ortogonale a x in T_pM.
Un flusso di Ricci si dice **normalizzato** *se vale*

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2Ric_{g(t)} + \frac{2}{3}r(t)g(t)$$

dove $r(t)$ è la media della curvatura scalare, ossia

$$r(t) = \frac{\int_M \mathcal{R}_{g(t)}\, \mathrm{d}\mu(g(t))}{\int_M \mathrm{d}\mu(g(t))}.$$

Osservazione 2.2. *Se $\tilde{g}(t)$ è un flusso di Ricci normalizzato, allora si può provare che il volume di M rispetto alla metrica $\tilde{g}(t)$ è costante rispetto a t. Inoltre se $g(t)$ soddisfa l'equazione* (1) *ed è tale che $Vol_{g(0)}(M) = 1$, risulta*

$$\tilde{g}(t) = g(t)Vol_g(t)(M)^{-\frac{2}{3}}$$

[2]Talvolta, per brevità e quando non vi saranno speciali motivi, il pedice verrà rimosso.

Hamilton prova l'esistenza di soluzioni dell'equazione (1) per ogni dato iniziale regolare, in un intervallo (piccolo) del parametro t. Inoltre dimostra che il flusso si può prolungare finché le curvature sezionali restano limitate.

Teorema 2.3 (HAMILTON)**.** *Sia M varietà riemanniana compatta con metrica g. Allora esiste un unico flusso di Ricci $g(t)$, di dato iniziale g, definito su un intervallo massimale $[0, T)$, con $0 < T \leq +\infty$. Inoltre T è un* **tempo singolare**, *cioè $T < +\infty \Leftrightarrow$ il massimo dei valori assoluti delle curvature sezionali tende a $+\infty$ quando $t \to T$.*

Per controllare le curvature, Hamilton ha ricavato le loro equazioni di evoluzione e le ha studiate servendosi di alcuni risultati sui massimi. L'equazione di evoluzione della curvatura scalare è:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \Delta \mathcal{R} + 2 \mid Ric \mid^2 \tag{2}$$

in cui tutte le quantità dipendono da $g(t)$.

Osservazione 2.4. *Se x minimizza $\mathcal{R}$, si ha $\Delta \mathcal{R} \geq 0$, e quindi $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} \geq 0$.*

Euristicamente si può dire che il minimo su M della curvatura scalare, denotato $\mathcal{R}_{\min}(t)$, cresce con t. Rigorosamente, vale il seguente

Proposizione 2.5 (PRINCIPIO DEL MASSIMO)**.** *Sia F una funzione liscia e sufficientemente regolare su $\mathbb{R}$. Supponiamo che esistano u, (funzione almeno C^1) definita su $M \times [0, T)$ e φ, (funzione almeno C^1) definita su $[0, T)$ tali che:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq \Delta_{g(t)} u + F(u) \ \ e \ \ \varphi' = F(\varphi)$$

Se $u \geq \varphi$ al tempo $t = 0$, allora $u \geq \varphi$ su $[0, T)$

Se si applica questo Principio ponendo $u = \mathcal{R}$ e $F(s) = \frac{2s^2}{3}$ si ottiene che se $\mathcal{R}_{\min}(0) > 0$ si ha $\mathcal{R}_{\min}(t) \geq \frac{3/2}{t_0 - t}$, dove $t_0 = \frac{3}{2\mathcal{R}_{\min}(0)}$. Se ne deduce che se $t \to t_0$, una almeno delle curvature sezionali diverge. L'equazione di evoluzione della curvatura di Ricci è simile alla (2):

$$\frac{\partial Ric}{\partial t} = \Delta Ric + Q(Ric) \tag{3}$$

dove $Q(Ric)$ è una forma quadratica. Sempre applicando un Principio del Massimo (per i tensori), Hamilton mostra che $Ric_{g(0)} \geq 0 \Rightarrow Ric_{g(t)} \geq 0$, ed inoltre ottiene il seguente importantissimo risultato

Proposizione 2.6. *Sia M una varietà riemanniana compatta di dimensione 3. Se $Ric_{g(0)} > 0$, allora $Ric_{g(t)} > 0$ e, in ogni punto, si ha*

$$\frac{\left| Ric - \frac{\mathcal{R}}{3} g \right|}{\mathcal{R}} \leq \frac{\alpha}{\mathcal{R}^\beta}$$

con α, β costanti positive.

Questa disequazione implica che se $\mathcal{R} \to +\infty$ in un punto (x, t), lo scarto relativo di $Ric_{g(t)}$ dalla sua media $\frac{\mathcal{R}}{3} g(t)$ tende a 0. Arriviamo quindi al primo passo verso la dimostrazione della congettura di Poincaré,

Teorema 2.7. *Sia M una varietà riemanniana compatta con curvatura di Ricci strettamente positiva. Allora M può essere munita di una metrica a curvatura sezionale costante strettamente positiva.*

Per dimostrare il Teorema 2.7 Hamilton studia il gradiente della curvatura scalare, riuscendo a mostrare che $\mathcal{R}$ esplode in ogni punto allo stesso tempo T e che $\frac{\mathcal{R}_{max}}{\mathcal{R}_{min}} \to 1$ per $t \to T$. Preso poi $\tilde{g}(t)$, flusso normalizzato, Hamilton dimostra che $\tilde{g}(t)$ coverge verso una metrica a curvatura sezionale costante strettamente positiva.

In particolare, ricordando che una varietà riemanniana di dimensione n, a curvatura sezionale costante positiva è localmente isometrica a $\mathbb{S}^n$ (si veda a tal riguardo il Teorema 26.7 in [5]) si ottiene che ogni varietà riemanniana compatta di dimensione 3 con curvatura di Ricci strettamente positiva è il quoziente di $\mathbb{S}^3$ su un gruppo finito di isometrie, cioè M è una *varietà sferica*. Di conseguenza se M è semplicemente connessa, allora M è omeomorfa a $\mathbb{S}^3$.

Se la curvatura di Ricci non è strettamente positiva, in generale la curvatura può esplodere solo su una parte della varietà e, se questo avviene, si dice che il flusso incontra una singolarità. Il risultato raggiunto in questo caso da Hamilton (con il collega Ivey) è che la parte negativa della curvatura diventa trascurabile in rapporto alla curvatura scalare, o meglio si ha che la curvatura scalare controlla tutte la curvature.

Teorema 2.8 (HAMILTON - IVEY)**.** *Esiste una funzione $\Phi : [-1, +\infty) \to [1, +\infty)$ crescente, tale che*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\Phi(r)}{r} = 0$$

con la seguente proprietà:
se $g(t)$ è un flusso di Ricci su $M \times [0, T)$ tale che $\mathcal{R}_{\min}(0) \geq -1$ ed, inoltre, per la curvatura sezionale in x per $t = 0$ si ha

$$K_x(., 0) \geq -\Phi(\mathcal{R}(x, 0)) \ \ , \forall\, x \in M$$

allora

$$-\Phi(\mathcal{R}) \leq K \leq \frac{\mathcal{R}}{2} + 2\Phi(\mathcal{R})$$

per $t \in [0, T)$.

Osservazione 2.9. *Dato un flusso di Ricci, a meno di una dilatazione della metrica iniziale, le condizioni del Teorema 2.8 sono verificate.*

2.1 Studio delle singolarità

La tecnica utilizzata da Hamilton per studiare le singolarità del flusso di Ricci è la tecnica dello zoom. L'idea è quella di dilatare la metrica e rallentare lo scorrere del tempo per avere una nuova soluzione del flusso. Formalmente si applica una dilatazione parabolica.

Definizione 2.10. *Dati* $x_0 \in M, t_0 \in [0, T), Q \in \mathbb{R}^+$ *(in generale* $Q = \mathcal{R}(x_0, t_0)$*), si chiama* **dilatazione parabolica** *in* (x_0, t_0) *di rapporto* Q*, il flusso di Ricci su* M *di equazione*

$$g_0(t) = Qg(t_0 + \frac{t}{Q})$$

per $t \in [-t_0 Q, (T - t_0)Q]$

Questa trasformazione dilata la metrica di un fattore $\sqrt{Q}$ e quindi contrae la curvatura scalare di un fattore $1/Q$. Affinché $g_0(t)$ sia un flusso di Ricci, il tempo è rallentato di un fattore Q e dunque l'intervallo di vita è dilatato dello stesso fattore.
A questo punto Hamilton cerca di costruire una successione di zoom per poi passare al limite. Infatti se si riesce a dimostrare l'esistenza dei flussi limite e si riesce a classificarli, otteniamo dei modelli per gli intorni delle singolarità.

Nel dettaglio, consideriamo (x_k, t_k) punti tali che $\mathcal{R}(x_k, t_k) := Q_k \to +\infty$ per $t \to t_k$ e supponiamo, per semplicità, $\mathcal{R} < Q_k$, $\forall t < 0$. Sia $g_k(t)$ la dilatazione parabolica in (x_k, t_k) di rapporto Q_k, e sia $\mathcal{R}_k$ la sua curvatura scalare in x. Risulta $\mathcal{R}_k(x_k, 0) = 1$, quindi $\mathcal{R}_k(x, t) < 1$, $\forall t < 0$. La curvatura è quindi limitata sugli intervalli $[-t_k Q_k, 0]$ che convergono verso $(-\infty, 0]$.

La dimostrazione dell'esistenza dei flussi limite, sulla scorta del lavoro di Hamilton, è stata provata da Grigori Perelman, il quale ha mostrato che una condizione sufficiente per assicurare la convergenza del procedimento iterativo descritto è la seguente

$$Vol_{g_k(0)}(B(x_k, 1)) < C \tag{4}$$

con C costante positiva e indipendente da k.
Perelman dimostra poi che la disuguaglianza (4) è sempre verificata se l'esplosione della curvatura avviene in tempo finito. Per costruzione, il flusso limite è definito su $(-\infty, 0]$, di curvatura limitata. Il teorema 2.8 permette inoltre di affermare che per il flusso limite la curvatura sezionale è non negativa.

3 La costruzione del flusso con chirurgia di Perelman

L'idea della chirurgia (ripresa da Hamilton) è quella di eliminare dalla varietà M i pezzi a grande curvatura scalare, nel caso in cui $\mathcal{R}$ non esploda su tutta la varietà. Infatti, come vedremo, se così fosse, avremmo che il flusso si estingue ed arriverremmo a classificare M.

3.1 Il Teorema degli Intorni Canonici

Per eliminare i pezzi con $\mathcal{R}$ grande, si procede con una versione tridimensionale del Lemma del Taglia–Incolla. Brevemente, si taglia M lungo delle sfere $\mathbb{S}^2$ e si tappano i buchi con delle palle $\mathbb{B}^3$. Ovviamente queste operazioni sono formalizzate accuratamente e garantiscono il controllo della topologia delle parti interessate.

In questo ambito, il Teorema degli Intorni Canonici, uno dei maggiori risultati di Perelman, dice essenzialmente che esiste un numero finito di modelli semplici che descrivono gli intorni dei punti a grande curvatura scalare.

Definizione 3.1. *Il dato iniziale di una metrica riemanniana si dice* **normalizzato** *se, eventualmente dilatando la metrica iniziale, il flusso di Ricci associato vive (almeno) su* $[0,1]$ *e se le relative palle unitarie sono assimilabili a quelle euclidee.*

Definizione 3.2. *Due varietà si dicono* ε**–quasi–isometriche** *se esiste un diffeomorfismo* ψ*, almeno* $C^{1/\varepsilon}$*, dell'una nell'altra tale che risultano* $(1+\varepsilon)$*–bilipschitziane le derivate di ordine* $\leq 1/\varepsilon$ *di* ψ*.*

Teorema 3.3 (DEGLI INTORNI CANONICI)**.** *Per ogni* $\varepsilon > 0$*, sufficientemente piccolo esistono due costanti* $r = r(\varepsilon) > 0, c = c(\varepsilon) > 0$*, tali che, se* $g(t)$ *è un flusso di Ricci su* M *di dato iniziale normalizzato, presi* $x \in M$*,* $t \geq 1$ *con* $\mathcal{R}(x,t) \geq \frac{1}{r^2}$*, allora* x *possiede, dopo una dilatazione di un fattore* $\sqrt{\mathcal{R}(x,t)}$*, un intorno di diametro inferiore a* $\frac{c}{\sqrt{\mathcal{R}(x,t)}}$ *che risulta* ε*–quasi–isometrico a uno dei modelli seguenti:*

a) una ε*–gola, ossia un cilindro* $\mathbb{S}^2 \times (-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon})$ *con la metrica canonica prodotto, di curvatura scalare* $= 1$

b) un ε*–cappuccio, ossia una palla* $\mathbb{B}^3$*, o* $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) - \mathbb{B}^3$*, munita di una metrica di curvatura positiva*

c) una varietà chiusa a curvatura sezionale positiva

Inoltre esiste una costante universale $\eta > 0$ *tale che*

$$|\nabla \mathcal{R}| \leq \eta \mathcal{R}^{\frac{3}{2}} \qquad \left|\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t}\right| \leq \eta \mathcal{R}^2.$$

Quando $g(t)$ soddisfa le condizioni del Teorema 3.3, diremo anche che soddisfa le ipotesi degli intorni canonici a scala r.

Osservazione 3.4. *Se* M *è connessa ed esiste una singolarità con un intorno di tipo c), allora* M *ha curvatura sezionale positiva ed è quindi diffeomorfa ad una varietà sferica. In particolare se è semplicemente connessa, allora* M *è omeomorfa a* $\mathbb{S}^3$*.*

3.2 La metrica nei punti di singolarità

Sia M connessa senza singolarità con intorni di tipo c). Supponiamo di aver fissato $\varepsilon > 0$ e la relativa scala $r > 0$ in modo che $g(t)$ soddisfi l'ipotesi degli intorni canonici. Vogliamo descrivere la metrica quando $t \to T$ con $T < +\infty$ tempo singolare. Definiamo $\Omega = \{x \in M | \mathcal{R}(x,.) < +\infty\}$ l'insieme dei punti a curvatura scalare limitata. Poiché per ipotesi esiste $x_0 \in M$ tale che $\mathcal{R}(x_0,t) \to +\infty$ con $t \to T$, si ricava che $\Omega \subsetneq M$. A questo punto si possono verificare due casi:

- $\Omega = \varnothing$
- $\Omega \neq \varnothing$

3.2.1 $\Omega = \varnothing$

In questo caso la curvatura esplode in ogni punto, cioè il flusso si estingue. Per il teorema 3.3 possiamo trovare un tempo t_0 vicino al tempo singolare T in modo che $(M, g(t_0))$ è ricoperta da un numero finito di intorni canonici di tipo a) e di tipo b). Allora è possibile:

i) incollare le ε–gole fino a chiuderle ottenendo una nuova varietà $\widetilde{M} \simeq \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, omeomorfa a M;

ii) coprire le ε–gole con ε–cappucci ottenendo $\widetilde{M} \simeq \mathbb{S}^3$, $\widetilde{M} \simeq \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ oppure $\widetilde{M} \simeq \mathbb{P}^3(\mathbb{R})\#\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, tutte omeomorfe a M.

Osservazione 3.5. *Per ragioni topologiche, l'unico caso che può presentarsi se M è semplicemente connessa è quello in cui M risulta omeomorfa a $\mathbb{S}^3$.*

3.2.2 $\Omega \neq \varnothing$

Per capire la struttura di Ω fissiamo una scala di curvatura ϱ, $0 < \varrho < r$, e definiamo

$$\Omega_\varrho = \{x \in \Omega \mid \mathcal{R}(x,t) \leq \frac{1}{\varrho^2}\}$$

Osserviamo che, per il Teorema 3.3, si può ricoprire l'insieme $\Omega - \Omega_\varrho$ con intorni di tipo a) e b); più precisamente $\Omega - \Omega_\varrho$ può essere ricoperto da un'unione di:

1. ε–tubi, ossia un'unione finita di ε–gole diffeomorfa a $\mathbb{S}^2 \times I$, con I intervallo di $\mathbb{R}$, il cui bordo $\subset \Omega_\varrho$;

2. ε–punte, ossia un'unione infinita di gole diffeomorfa a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+$, la cui estremità $\mathbb{S}^2 \times \{0\} \subset \Omega_\varrho$, mentre sull'altra estremità la curvatura scalare esplode;

3. gole chiuse da un cappuccio, il cui bordo $\subset \Omega_\varrho$.

4. doppie punte, ossia una componente connessa disgiunta da Ω_ϱ costituita da una unione infinita di gole, diffeomorfa a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$,

5. cappucci appuntiti, ossia una componente connessa disgiunta da Ω_ϱ costituita da una unione infinita di gole chiuse da un cappuccio, diffeomorfa a $\mathbb{R}^3$.

Osservazione 3.6. *Se $\Omega_\varrho = \varnothing$, come nel caso in cui $\Omega = \varnothing$, si mostra che M è diffeomorfa a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, a $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})\#\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, oppure ad una varietà sferica. Si dice ancora che il flusso si estingue, anche se la curvatura non esplode dappertutto.*

3.3 Il procedimento di chirurgia

Dopo aver descritto topologicamente Ω, si può procedere con una chirurgia su $M - \Omega_\varrho$ che consiste delle seguenti operazioni:

1. Eliminazione delle componenti connesse di Ω disgiunte da Ω_ϱ;

2. Sostituzione di punte (il cui bordo $\subset \Omega_\varrho$) con cappucci diffeomorfi a $\mathbb{B}^3$.

Affinché la sostituzione venga operata in modo opportuno, si tagliano le ε–punte lungo una sfera $\mathbb{S}^2$, al centro di una δ–gola [3], con $0 < \delta << \varepsilon$. Si definisce così una chirurgia di parametri (r, δ) dove r, dipendente da ε, è la scala di curvatura a partire dalla quale si definiscono gli intorni canonici, mentre ϱ è fissato ponendo $\varrho = \delta r$. Otteniamo così una nuova varietà, eventualmente non connessa, che chiameremo M_1. Sempre per il Teorema 3.3 M risulta diffeomorfa alla somma connessa delle diverse componenti connesse di M_1 con un numero finito di copie di $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ e di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Si munisce allora M_1 di una metrica riemanniana ben scelta $g_1(T_1)$ che diventa il dato iniziale dell'equazione di flusso (1) e si fa ripartire il flusso simultaneamente sulle componenti connesse di M_1.

Osservazione 3.7. *Se $\Omega_\varrho = \varnothing$, la chirurgia appena definita ha senso, ma si ha $M_1 = \varnothing$ e il flusso si estingue.*

Definizione 3.8. *Si dice che una successione $\{M_k, g_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$, (definita per ricorrenza al tempo t_{k+1} tramite una chirurgia di parametri (r, δ)) è un* **flusso con chirurgia** *se*

- *$r(t), \delta(t)$ sono due funzioni strettamente positive, decrescenti su $[0, +\infty)$;*
- *$(t_k)_{0\leq k+\infty}$ è una successione strettamente crescente e non negativa;*
- *M_k è una varietà compatta, definita $\forall k$, eventualmente non connessa, o vuota;*
- *$g_k(t)$ è un flusso di Ricci su $M_k \times [t_k, t_{k+1})$, singolare in t_{k+1}, che soddisfa l'ipotesi degli intorni canonici a scala $r(t)$.*

Si può osservare che se M_k è la varietà ottenuta dopo il k-esimo passo, tenendo conto delle componenti che si estinguono, allora M risulta diffeomorfa alla somma connessa delle componenti connesse di M_k con un certo numero di copie di $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ e di $\mathbb{S}^3$.

Definizione 3.9. *Una varietà riemanniana (M, g_0) è detta* **normalizzata** *se le curvature sezionali sono limitate in valore assoluto da 1 e se il volume di ogni palla unitaria è almeno $1/2$ di quello euclideo.*

Perelman dimostra infine il seguente

Teorema 3.10. *Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $(r(t), \delta(t))$, funzioni universali positive strettamente decrescenti, tali che, preso comunque un dato iniziale normalizzato (M, g_0), il flusso con chirurgia di parametri $(r(t), \delta(t))$ esiste su $[0, +\infty)$. Inoltre, se M è semplicemente connessa, il flusso si estingue in tempo finito, cioè che esiste $\tilde{k} < +\infty$ tale che $t_{\tilde{k}} < +\infty$ e $M_{\tilde{k}} = \varnothing$*

Se la varietà di partenza M è semplicemente connessa risulta dunque diffeomorfa a $\mathbb{S}^3$.

[3] Perelman mostra infatti che, per ogni $\delta \in (0, \varepsilon)$, esiste una costante positiva $h = h(\delta, \varepsilon)$ tale che in ogni ε–punta, ogni punto in cui la curvatura scalare è maggiore di $\frac{1}{h^2}$ appartiene ad una δ–gola.

Riferimenti bibliografici

[1] L. Bessières, *Poincaré conjecture and Ricci flow. An outline of the work of R. Hamilton and G. Perelman*, Newsletter of the European Mathematical Society, No 59, 2006

[2] L. Bessières, *Conjecture de Poincaré: la preuve de R. Hamilton et G. Perelman*, Gaz. Mathematiques No 106, 2005

[3] L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, *La Preuve de la conjecture de Poincaré d'après G. Perelman*, Image des maths, 2006

[4] M. P. Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992

[5] G. Gentili, F. Podestà, E. Visentini, *Lezioni di Geometria Differenziale*, Bollati Boringhieri, 1995

[6] W. S. Massey *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, 1967

[7] D. O'shea, *La Congettura di Poincaré*, Rizzoli, 2007

[8] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometrics applications*, `ArXiv: math. DG/0211159`

[9] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, `ArXiv: math. DG/0303109`

[10] G. Perelman, *Finite extintion time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, `ArXiv: math. DG/0307245`