

Una raccolta di testi di compiti di Istituzioni di Matematiche II

L. Serena

Istituzioni II 25.1.07

1. Data la funzione

$$z = f(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2 + y^2 - 6xy - 2}$$

- Determinare il tipo di quadrica di cui $z = f(x, y)$ è una porzione.
- Detta $\mathcal{D}$ la frontiera del dominio della funzione, determinare il tipo di conica che rappresenta.
- Determinare, se esistono, gli eventuali punti di massimo e minimo relativi.

2. Data l'equazione differenziale $y'' + 2y' + 3y = x$ determinare la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int \int_D \frac{y}{1 - x^2} dx dy$$

dove $D = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 3; x \leq y \leq x^2\}$

Istituzioni II 13.4.07

1. Sia data la funzione

$$f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + 3xy - \frac{1}{2}y^2 - 1$$

- Ridurre la quadrica d'equazione $z = f(x, y)$ in forma canonica e determinarne il tipo.
 - Sia T il triangolo in $\mathbb{R}^2$ di vertici $P_1 \equiv (1, 1)$, $P_2 \equiv (2, 1)$ e $P_3 \equiv (2, 2)$. Provare che la funzione $z = f(x, y)$ è positiva in T .
 - Calcolare il volume del cilindroide relativo alla funzione $z = f(x, y)$ con base T .
2. Data l'equazione differenziale $y'' - y' + 2y = x + e^x$ determinare la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$, e $y'(0) = 0$

Istituzioni II 8.6.07

1. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{4 + 2y^2 - x^2} - 1$$

determinare il tipo di quadrica di cui $z = f(x, y)$ è una porzione. Detto $M = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 4\}$ provare che M è contenuto nel dominio D di $z = f(x, y)$ e fornire una rappresentazione grafica di D . Provare inoltre che la funzione $z = f(x, y)$ è positiva in M .

2. Integrare la seguente equazione differenziale

$$y' e^{\sqrt{y}} (\sqrt{x-2} - 1) = \sqrt[4]{x-2} + 2$$

3. Svolgere uno dei seguenti due esercizi

- Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D x^2 dx dy$$

dove $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}$.

- Data la conica d'equazione $2x^2 + 6y^2 - 4\sqrt{3}xy - \sqrt{3}x - y = 0$ determinarne il tipo, utilizzando i metodi della geometria proiettiva. Determinarne quindi l'equazione dell'asse (o degli assi) di simmetria.

Istituzioni II 3.7.07

1. Data la funzione

$$f(x, y) = -3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + 5y^2 + 10xy + x^2}$$

determinare il tipo di quadrica di cui $z = f(x, y)$ è una porzione. Detto D il dominio della funzione $z = f(x, y)$ determinare il tipo di conica rappresentata dalla frontiera di D . Determinare inoltre gli eventuali punti di massimo e minimo relativi.

2. Data la curva

$$\gamma(t) : \begin{cases} x = e^t \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in [0, 2]$$

provare che $\gamma(t)$ è semplice e regolare in $[0, 2]$. Determinare quindi la lunghezza di $\gamma(t)$ in $[0, 2]$.

3. Risolvere uno dei seguenti due esercizi

- Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int \int_D e^{x^2+y^2} x \, dx dy$$

dove $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \leq 0$.

- Data la conica d'equazione

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x = 0$$

determinarne il tipo, l'equazione della tangente nel punto $P \equiv (0, 0)$ e l'equazione degli eventuali assi (o asse) di simmetria, utilizzando i metodi della geometria proiettiva.

Istituzioni II 12.11.07

1. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2 + 1$$

determinare i punti di massimo assoluto che la funzione assume nel dominio $D = \{(x, y) =: |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. Determinare inoltre il tipo di quadrica rappresentato da $z = f(x, y)$.

2. Sia D una lamina piana con densità $\rho(x, y) = x$ tale che

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \frac{1}{x^2 - 2x - 3} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

Determinare la massa di D .

3. Data l'equazione differenziale

$$y'' + y' + 5y = x$$

determinare la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

La funzione $y = e^{2x}$ è soluzione della suddetta equazione differenziale?

Istituzioni di Matematiche II, 15.2.08

1. Data la quadrica $\mathcal{Q}$ d'equazione

$$x^2 + y^2 + 6z^2 + 6xy + 6x + 2y + 12z + 7 = 0$$

ridurla in forma canonica e determinarne il tipo. Determinare quindi il tipo della conica ottenuta intersecando $\mathcal{Q}$ col piano d'equazione $z = 1$.

2. Sia data una lamina piana $\mathcal{M}$ avente la forma del triangolo di vertici $A \equiv (1, 0)$ $B \equiv (2, 0)$ e $C \equiv (1, 1)$. Supposto che la densità $\rho = \frac{y}{x^2 - x - 6}$ determinare la massa di $\mathcal{M}$.

3. Integrare la seguente equazione differenziale

$$y' - xy = x\sqrt[3]{y}$$

Istituzioni di Matematiche II 26.3.08

1. Dati la funzione

$$z = f(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 + 10xy + 5y^2) + 10$$

ed il triangolo $\mathcal{T}$ di vertici $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (2, 0)$ e $C \equiv (1, 1)$

- provare che $z = f(x, y)$ non assume valori negativi in $\mathcal{T}$.
- Calcolare il volume del cilindroide di base $\mathcal{T}$ e relativo alla funzione $z = f(x, y)$.
- Determinare il tipo della quadrica rappresentata da $z = f(x, y)$.

2. Integrare la seguente equazione differenziale

$$y' \ln \sqrt{3y} = \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1}$$

3. Data la curva

$$\gamma(t) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = e^t \end{cases}$$

con $t \in [1, 3]$ provare che $\gamma(t)$ è regolare e determinarne la lunghezza.

Istituzioni di Matematiche II 9.6.08

1. Sia D una lamina piana avente la forma di un triangolo di vertici $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (1, 0)$ e $C \equiv (0, 1)$. Supposta la densità $\rho = \frac{y(x-2)}{x^2-5x+6}$, calcolare la massa di D .

2. Sia data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{4 + 2xy}.$$

Determinare i punti di massimo assoluti nel dominio D costituito dal triangolo di vertici $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (1, 0)$ e $C \equiv (0, 1)$. Determinare inoltre il tipo di quadrica di cui $z = f(x, y)$ è una porzione.

3. Svolgere uno dei seguenti due esercizi:

- a) Sia data la curva

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = e^t \\ y = e^t \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Provare che $\gamma(t)$ è regolare e determinarne la lunghezza.

- b) Utilizzando gli strumenti della geometria proiettiva determinare il tipo ed il centro della conica rappresentata dall'equazione

$$x^2 + y^2 + 6xy + 2x + 6y + 2 = 0$$

Istituzioni di Matematiche II 3.7.08

1. Sia data la funzione

$$f(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2 - 6xy + y^2 + 4}$$

Determinare la natura dei punti critici di $z = f(x, y)$ ed il tipo della conica che rappresenta la frontiera del dominio di detta funzione. Determinare inoltre il tipo della quadrica di cui $z = f(x, y)$ rappresenta una porzione.

2. Risolvere uno dei seguenti due esercizi

- Data la conica $\mathcal{C}$ d'equazione $x^2 - xy + y^2 - x - 1 = 0$, facendo uso degli strumenti della geometria proiettiva, determinarne il tipo e la retta tangente nel punto $P \equiv (0, -1)$.
- Sia dato un filo rappresentato dalla curva $\gamma(t) = \begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Provare che $\gamma(t)$ è una curva regolare e supposto che il filo abbia densità $\rho = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$ determinarne la massa.

3. Data l'equazione differenziale $y'' + y' + 3y = \cos x$ determinare la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Istituzioni di Matematiche II 22.9.08

1. Sia data la funzione

$$f(x, y) = xy + y - x + 1$$

Determinare il tipo di superficie rappresentata dalla funzione $z = f(x, y)$. Determinare inoltre il tipo di conica ottenuta sezionando la superficie suddetta col piano $z = 2$. Provare che $z = f(x, y)$ è positiva nel triangolo $\mathcal{T}$ di vertici $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (-2, 0)$, $C \equiv (0, 2)$ e determinare il volume del cilindroide delimitato dalla funzione $z = f(x, y)$ con base $\mathcal{T}$.

2. Data l'equazione differenziale

$$y'' + y' + 3y = x$$

determinare la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

3. Integrare la seguente equazione differenziale

$$y' e^x = (e^y + 1)x \ln(x^2 - 5x + 6)$$

Istituzioni di Matematiche II 10.11.08

1. Sia data la superficie d'equazione

$$z = f(x, y) = y(x - 2) + 2.$$

- Determinare il tipo di quadrica rappresentata da $z = f(x, y)$.
 - Provare che la funzione suddetta è positiva nel triangolo $\mathcal{T}$ di vertici $O \equiv (0, 0)$, $A \equiv (1, 0)$, e $B \equiv (0, 1)$.
 - Calcolare il volume del cilindroide di base $\mathcal{T}$ e relativo a $z = f(x, y)$
2. Data l'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = x$ determinare la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.
3. Risolvere uno dei seguenti due esercizi:
- Sia data la conica d'equazione $x^2 - xy + 1 = 0$. Facendo uso degli strumenti della geometria proiettiva, determinarne il tipo e gli asintoti.
 - Sia dato un filo metallico $\mathcal{L}$ rappresentato dalla curva

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Supposto che la densità di $\mathcal{L}$ sia $\rho = \frac{1}{x}$, determinare la massa di $\mathcal{L}$.

Istituzioni di Matematiche II 11.2.09

1. Data la funzione $z = f(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + 3xy - \frac{1}{2}y^2 + 2$ determinare il tipo di quadrica che rappresenta riducendola in forma canonica. Provare che la funzione suddetta è positiva nel dominio $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Determinare quindi il volume del cilindroide con base D e delimitato da $z = f(x, y)$.
2. Integrare la seguente equazione differenziale

$$1 = ye^{y+1}(1 + \operatorname{sen} x \cos x)$$

3. Sia $\mathcal{L}$ una lamina piana avente la forma di un triangolo di vertici $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (2, 0)$, $C \equiv (0, 1)$. Supposta la densità $\rho = \frac{xy}{x^2+2}$ determinare il centro di massa di $\mathcal{L}$.

Istituzioni di Matematiche II 10.6.09

1. Detta $\mathcal{Q}$ la quadrica d'equazione $4xy + z^2 + 4y - 1 = 0$, ridurla in forma canonica e determinarne il tipo. Sia $\mathcal{C}$ la conica intersezione di $\mathcal{Q}$ col piano $z = 1$. Utilizzando i metodi della geometria proiettiva determinare il tipo della conica $\mathcal{C}$.
2. Data l'equazione differenziale

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

determinarne l'integrale generale.

3. Data la funzione

$$z = \sqrt{2 - x^2 + 3y^2}$$

determinare gli eventuali punti di massimo o minimo relativi. La suddetta funzione è differenziabile in $P \equiv (1, 1)$?

Istituzioni di Matematiche II 1.7.09

1. Data la seguente curva

$$\gamma(t) : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 2e^{\frac{t}{2}} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

provare che è semplice e regolare. Determinarne quindi la lunghezza.

2. Data la quadrica d'equazione $x^2 + z^2 + 2xz - y = 0$ ridurla in forma canonica e determinarne il tipo.
3. Data l'equazione differenziale $y'' + y' + 3y = \cos x$, determinare la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Istituzioni di Matematiche II 23.9.09

1. Sia data la funzione $z = xy + x^2 + 2$. Determinare il tipo di quadrica che rappresenta. Detto $\mathcal{T}$ il triangolo di vertici $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (1, 0)$ e $C \equiv (1, 1)$, determinare i punti di massimo e minimo assoluti assunti dalla funzione in $\mathcal{T}$. Detta $\mathcal{C}$ la conica ottenuta sezionando la superficie col piano $z = 1$, determinarne il tipo utilizzando gli strumenti della geometria proiettiva.
2. Data l'equazione differenziale $y'' + 2y' + 4y = x - 1$ determinare la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
3. Sia $\mathcal{L}$ una lamina piana rappresentata dal triangolo di vertici $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (1, 0)$ e $C \equiv (1, 1)$. Supposto che la densità puntuale della lamina sia data da $\rho(x, y) = \left| \frac{2yx - 2y}{x^2 - 9} \right|$ determinare la massa di $\mathcal{L}$.

Istituzioni di Matematiche II 9.11.09

1. Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica rappresentata dalla funzione $z = \frac{5}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{7}{4}y^2$.
Determinarne il tipo riducendola in forma canonica. Verificare quindi se la funzione data assume valori negativi nel dominio $D = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.
Sia $\mathcal{C}$ la conica ottenuta sezionando la quadrica $\mathcal{Q}$ col piano $z = 1$.
Determinarne il tipo utilizzando i metodi della geometria proiettiva.
2. Sia dato un filo rappresentato dalla curva $\gamma(t) : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = e^t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$.
Provare che $\gamma(t)$ è regolare e determinarne la lunghezza.
3. Sia data una lamina metallica piana $\mathcal{L}$ avente la forma di un triangolo di vertici $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (2, 0)$ e $C \equiv (0, 2)$. Supposto che la densità puntuale sia rappresentata dalla funzione $\rho = \left| \frac{xy-2x}{y^2-9} \right|$, determinare la massa di $\mathcal{L}$.

Istituzioni di Matematiche II 6/9/2010

1. Data l'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = 2x + 3e^x$ determinare la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.
2. Data la funzione $z = \sqrt{2x^2 - 4y^2 - 2}$, provare che è definita nel triangolo $\mathcal{T}$ di vertici $A \equiv (2, 0)$, $B \equiv (3, 0)$, $C \equiv (3, 1)$. Calcolare quindi i punti di massimo e minimo assoluti in $\mathcal{T}$ e determinare il tipo di quadrica di cui la funzione è una porzione.
3. Sia $\mathcal{L}$ una lamina piana avente la forma del triangolo di vertici $V_1 \equiv (3, 0)$, $V_2 \equiv (4, 7)$, $V_3 \equiv (4, 0)$. Supposto che la densità ρ sia data da $\rho = \left| \frac{xy}{x^2-3x+2} \right|$, determinarne la massa.

Istituzioni di Matematiche II, 25.1.11

1. Sia data la funzione

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy + 3$$

- Determinare il tipo di quadrica rappresentata dalla funzione $z = f(x, y)$.

- Sia $\mathcal{C}$ la conica ottenuta intersecando la suddetta funzione col piano $z = 2$. Determinarne il tipo utilizzando i metodi della geometria proiettiva.
 - Sia $\mathcal{T}$ il triangolo di vertici $A \equiv (0, 1)$, $B \equiv (1, 0)$ e $C \equiv (1, 1)$. La funzione è positiva in $\mathcal{T}$?
2. Sia $\mathcal{T}$ una lamina piana avente la forma del triangolo di vertici $A \equiv (0, 1)$, $B \equiv (1, 0)$ e $C \equiv (2, 0)$. Supposto che la densità sia data da $\rho = |\frac{2}{x^2-9}|$, determinare la massa di $\mathcal{T}$.
 3. Data l'equazione differenziale $y'' + y' + y = x - 1$ determinare la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.