

Contents

1	Superfici nello spazio Σ	2
1.1	Parametrizzazione, piano tangente	2
1.2	Metrica su una superficie	4
1.3	Superfici come insiemi di livello	6
1.4	Superfici di rotazione	7
2	Moto di un punto su una superficie	10
2.1	Insieme delle velocità possibili, energia cinetica	10
2.2	Equazioni di moto	11
3	Campi gradiente, forze con potenziale	13
3.1	Integrali curvilinei, campi gradiente	13
3.2	Calcolo del potenziale in coordinate cartesiane	15
3.3	Forze di tipo gradiente	18
4	Studio del moto su una superficie	21
4.1	Lagrangiana, integrale dell'energia, variabile ciclica	21
4.2	Equilibrio	22
4.3	Esempio di studio di moto su una superficie	23
5	Altri aspetti del moto sulla superficie	27
5.1	Lagrangiana approssimata	27
5.2	Piccole oscillazioni	28
5.3	Calcolo delle frequenze proprie	30
5.4	Curve geodetiche	31
5.5	Equazioni delle geodetiche	32
5.6	Geodetiche su una superficie di rotazione	32
5.7	Funzione Hamiltoniana	33
5.8	Moto di un punto su una superficie: esercizi di riepilogo	36
6	Sistemi vincolati	41
6.1	Coordinate lagrangiane	43
6.2	Spazio normale, spazio tangente	48
6.3	Cinematica: velocità possibili	51
6.4	Energia cinetica nelle variabili lagrangiane	51
6.5	Dinamica: Equazioni di Lagrange	51
6.6	Equilibrio e piccole oscillazioni	51
7	Esempi di studio del moto rigido, A. A. 2010/11	52
7.1	Esercizio 1	52
7.2	Esercizio 2	64
7.3	Esercizio 3	69
7.4	Esercizio 4	75
7.5	Esercizio 5	80

1 Superfici nello spazio Σ

1.1 Parametrizzazione, piano tangente

Dato lo spazio affine euclideo Σ con la metrica del prodotto scalare, si consideri un'applicazione continua $\Theta : I_1 \times I_2 \rightarrow \Sigma$, con $I_1 \subseteq \mathbb{R}$, $I_2 \subseteq \mathbb{R}$, che associa ad una coppia di numeri reali un punto P di Σ :

$$(1.1) \quad \Theta : I_1 \times I_2 \rightarrow \Sigma, \quad \Theta(u, v) = P \in \Sigma$$

Chiameremo l'applicazione Θ **superficie** in Σ e u, v una **parametrizzazione**. Il **supporto** della superficie è l'insieme dei punti $\Theta(u, v) \subseteq \Sigma$, $(u, v) \in U = I_1 \times I_2$.

Scelto un sistema di riferimento $\{O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ in Σ , la (1.1) si scrive

$$\Theta(u, v) - O = \xi_1(u, v)\mathbf{u}_1 + \xi_2(u, v)\mathbf{u}_2 + \xi_3(u, v)\mathbf{u}_3, \quad (u, v) \in U,$$

oppure

$$(1.2) \quad \begin{cases} \xi_1 = \xi_1(u, v) \\ \xi_2 = \xi_2(u, v) \\ \xi_3 = \xi_3(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in U$$

Fissiamo un punto $P_0 = \Theta(u_0, v_0)$ della superficie, $(u_0, v_0) \in U$. Le applicazioni

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \Gamma_1 : I_1 &\rightarrow \Sigma, & \Gamma_1(u, v_0) &= \Theta(u, v_0), \\ \Gamma_2 : I_2 &\rightarrow \Sigma, & \Gamma_2(u_0, v) &= \Theta(u_0, v) \end{aligned}$$

definiscono due **curve** passanti per P_0 e formate da punti tutti contenuti nella superficie. Le due curve si dicono **linee** o **curve coordinate** sulla superficie Θ nel punto $P_0 = \Theta(u_0, v_0)$.

I **vettori tangenti alle linee coordinate** (1.3) sono

$$(1.4) \quad \Gamma_1'(u, v_0) = \frac{\partial \Theta}{\partial u}(u, v_0) = \Theta_u(u, v_0), \quad \Theta_v(u_0, v) = \frac{\partial \Theta}{\partial v}(u_0, v) = \Theta_v(u_0, v),$$

dove $\frac{\partial \Theta}{\partial u} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\Theta(u+h, v) - \Theta(u, v))$ [analogamente $\frac{\partial \Theta}{\partial v}$] e dove, per brevità, indichiamo con Θ_u e con Θ_v le derivate parziali $\frac{\partial \Theta}{\partial u}$, $\frac{\partial \Theta}{\partial v}$, rispettivamente.

La superficie è **regolare** nel punto P_0 se

1. esistono i vettori tangenti in P_0 alle due curve (1.3)

$$\Theta_u(u_0, v_0) = \Theta_u(u, v_0)|_{u=u_0}, \quad \Theta_v(u_0, v_0) = \Theta_v(u_0, v)|_{v=v_0},$$

2. i due vettori sono **indipendenti**, ovvero **non paralleli**:

$$(1.5) \quad \Theta_u(u_0, v_0) \wedge \Theta_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}.$$

Il piano Π_{P_0} definito da (1.5) viene detto **piano tangente** alla superficie in P_0 . Il piano tangente alla superficie in P_0 è dunque il sottospazio affine di dimensione 2

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \Pi_{P_0} &= \{Q \in \Sigma \mid Q - P_0 = \alpha \Theta_u(u_0, v_0) + \beta \Theta_v(u_0, v_0) = \\ &= \{Q \in \Sigma \mid (Q - P_0) \cdot \Theta_u(u_0, v_0) \wedge \Theta_v(u_0, v_0) = 0\} \end{aligned}$$

identificabile con lo spazio vettoriale di dimensione 2 generato dai vettori $\langle \Theta_u(u_0, v_0), \Theta_v(u_0, v_0) \rangle$.

Indipendenza della definizione di regolarità e del piano tangente dalla parametrizzazione.

Una **riparametrizzazione** della superficie consiste nello stabilire una corrispondenza biunivoca $u = u(\bar{u}, \bar{v})$, $v = v(\bar{u}, \bar{v})$, questi ultimi nuovi parametri in $\bar{I}_1 \times \bar{I}_2 = \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^2$. In tal modo viene definita l'applicazione

$$(1.7) \quad \bar{\Theta} : \bar{U} \rightarrow \Sigma, \quad \bar{\Theta}(\bar{u}, \bar{v}) = \Theta(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})).$$

L'invertibilità della trasformazione equivale alla condizione sulla **matrice jacobiana**

$$(1.8) \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix}$$

di essere **non singolare**: $\det J = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \neq 0$.

Esercizio 1.1 Considerare una riparametrizzazione lineare $u = a\bar{u} + b\bar{v}$, $v = c\bar{u} + d\bar{v}$, a, b, c, d costanti reali, ed esaminare la condizione di invertibilità.

Se viene utilizzata la differente parametrizzazione (1.7) rispetto alla quale $P_0 = \bar{\Theta}(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$, le nuove **linee coordinate** sono

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \bar{\Gamma}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) &= \bar{\Theta}(\bar{u}, \bar{v}_0) = \Theta(u(\bar{u}, \bar{v}_0), v(\bar{u}, \bar{v}_0)), \\ \bar{\Gamma}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) &= \bar{\Theta}(\bar{u}_0, \bar{v}) = \Theta(u(\bar{u}_0, \bar{v}), v(\bar{u}_0, \bar{v})) \end{aligned}$$

con vettori tangenti

$$(1.10) \quad \bar{\Theta}_{\bar{u}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \Theta_u + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \Theta_v, \quad \bar{\Theta}_{\bar{v}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \Theta_u + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \Theta_v.$$

Si vede subito che

$$(1.11) \quad \bar{\Theta}_{\bar{u}} \wedge \bar{\Theta}_{\bar{v}} = (\det J) \Theta_u \wedge \Theta_v$$

dove J è la matrice (1.8). Le (1.10), (1.11) hanno due conseguenze notevoli:

1. la proprietà di regolarità in un punto P_0 è **indipendente** dalla parametrizzazione,
2. se la superficie è regolare in P_0 , il piano individuato da (Θ_u, Θ_v) coincide con quello individuato da $(\bar{\Theta}_{\bar{u}}, \bar{\Theta}_{\bar{v}})$.

Per lo studio del moto, è importante vedere il piano tangente anche dal punto di vista dell'insieme di tutti i vettori tangenti a tutte le curve sulla superficie passanti per un punto fissato. Formalizziamo qui di seguito tale affermazione.

Si consideri una qualunque curva Γ contenuta sulla superficie e passante per il punto P_0 . Si realizza facilmente che la curva ammette necessariamente la parametrizzazione

$$(1.12) \quad \Gamma(\lambda) = \Theta(u(\lambda), v(\lambda)), \quad \lambda \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad \Gamma(\lambda_0) = \Theta(u(\lambda_0), v(\lambda_0)) = \Theta(u_0, v_0).$$

per qualche $\lambda_0 \in I$. Il vettore tangente in P_0 viene calcolato seguendo la regola di derivata di funzione di funzione:

$$(1.13) \quad \Gamma'(\lambda_0) = \Theta_u(u_0, v_0)u'(\lambda_0) + \Theta_v(u_0, v_0)v'(\lambda_0).$$

Fissato $P_0 \in \Theta$, chiamiamo $\mathcal{G}(P_0)$ l'insieme di tutte le curve $\Gamma(\lambda)$ sulla superficie passanti per P_0 , $\Gamma(\lambda_0) = P_0$. Esse hanno una parametrizzazione del tipo (1.12).

Chiamiamo **spazio tangente** in P_0 alla superficie Θ l'insieme dei vettori applicati in P_0 che sono i vettori tangenti delle curve di $\mathcal{G}(P_0)$:

$$(1.14) \quad \mathcal{T}_{P_0}\Theta = \{(P_0, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}_{P_0}\Sigma \mid \mathbf{v} = \Gamma'(\lambda_0), \Gamma(\lambda) \in \mathcal{G}(P_0)\}.$$

Si stabilisce facilmente la relazione fra (1.14) ed il piano tangente (1.6):

$$Q \in \Pi_{P_0} \quad \text{se e solo se} \quad (P_0, Q - P_0) \in \mathcal{T}_{P_0}\Theta$$

ovvero, equivalentemente:

$$(1.15) \quad \mathcal{T}_{P_0}\Theta = \{(P_0, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}_{P_0}\Sigma \mid \mathbf{v} = \alpha\Theta_u(u_0, v_0) + \beta\Theta_v(u_0, v_0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Infatti, il vettore tangente in P_0 (1.13) di una qualunque curva (1.12) è una combinazione lineare dei vettori (1.4), dunque Q appartiene al piano (1.6). Viceversa, dato un vettore $Q - P_0$ come in (1.6) è semplice costruire una curva (1.12) il cui vettore tangente in P_0 sia \mathbf{v} (verificare per esercizio).

Chiamiamo **spazio normale** alla superficie Θ nel punto P_0 il complemento ortogonale dello spazio tangente:

$$(1.16) \quad \mathcal{N}_{P_0}\Theta = \{(P_0, \mathbf{u}) \in \mathcal{T}_{P_0}\Sigma \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \forall (P_0, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}_{P_0}\Theta\}.$$

Sia r_{P_0} la retta ortogonale a Π_{P_0} nel punto P_0 : è immediato verificare che

$$Q \in r_{P_0} \quad \text{se e solo se} \quad (P_0, Q - P_0) \in \mathcal{N}_{P_0}\Theta,$$

ovvero lo spazio normale è identificabile con la retta affine r_{P_0} , a sua volta isomorfa al sottospazio vettoriale unidimensionale generato da $\langle \Theta_u(u_0, v_0) \wedge \Theta_v(u_0, v_0) \rangle$ (si veda (1.5)).

1.2 Metrica su una superficie

Introdurre una **metrica** su una superficie vuol dire individuare delle quantità legate unicamente alla superficie mediante le quali possiamo effettuare il calcolo della lunghezza di una curva che giace sulla superficie, oppure il calcolo della misura (area) di una porzione della superficie, oppure la misura di un angolo sulla superficie, e così via.

Per fare questo, partiamo dalla metrica euclidea (il prodotto scalare) definita su ciascuno dei sottospazi affini (1.6): essa è individuata dalla conoscenza del prodotto scalare sui vettori della base.

Sia dunque $\Theta(u, v)$, $(u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ una superficie. In ogni punto $P_0 = \Theta(u_0, v_0)$ i prodotti scalari dei vettori (1.4) calcolati in P_0 definiscono la matrice simmetrica

$$(1.17) \quad \begin{pmatrix} \Theta_u(u_0, v_0) \cdot \Theta_u(u_0, v_0) & \Theta_u(u_0, v_0) \cdot \Theta_v(u_0, v_0) \\ \Theta_v(u_0, v_0) \cdot \Theta_u(u_0, v_0) & \Theta_v(u_0, v_0) \cdot \Theta_v(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

In altre parole, se P_0 è un punto regolare di Θ , la restrizione del prodotto scalare in V_Σ al piano tangente π_{P_0} , inteso come spazio vettoriale $V_\Sigma^{(2)}$, dà luogo ad una **forma bilineare simmetrica e definita positiva** la cui matrice rispetto alla base Θ_u, Θ_v è (1.17).

Gli elementi della matrice, che dipendono dalla posizione di P_0 su Θ , vengono chiamati i **coefficienti della prima forma fondamentale** della superficie e sono proprio le quantità che ci permettono di eseguire i calcoli metrici (aree, lunghezze, ...) su Θ .

Convenzionalmente si pone

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \Theta_u(u_0, v_0) \cdot \Theta_u(u_0, v_0), \\ F(u_0, v_0) &= \Theta_u(u_0, v_0) \cdot \Theta_v(u_0, v_0), \\ G(u_0, v_0) &= \Theta_v(u_0, v_0) \cdot \Theta_v(u_0, v_0). \end{aligned}$$

La matrice (1.17), ovvero

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

è **definita positiva** in ogni punto regolare della superficie, dato che il prodotto scalare in Σ è definito positivo. Si osservi che il determinante della matrice è il modulo al quadrato del prodotto vettoriale:

$$EG - F^2 = |\Theta_u|^2 |\Theta_v|^2 - (\Theta_u \cdot \Theta_v)^2 = |\Theta_u(u_0, v_0) \wedge \Theta_v(u_0, v_0)|^2 > 0.$$

Indipendenza dalla parametrizzazione. Data la riparametrizzazione (1.7) e i corrispondenti coefficienti $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ dei prodotti scalari dei vettori (1.10) calcolati per $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = (\bar{u}(u_0, v_0), \bar{v}(u_0, v_0))$, si verifica che

$$(1.18) \quad \begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J$$

dove J è la matrice jacobiana (1.8). La (1.18) non è altro che la formula di cambiamento della matrice di una forma, a seguito di un cambiamento di base, essendo J^T la matrice del cambiamento di base da $\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$ a $\langle \bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2 \rangle$, come si vede da (1.10). La matrice (1.18) è ancora **definita positiva**.

La **norma** di un vettore $Q - P_0$ nello spazio (1.6) generato da $\langle \Theta_u(u_0, v_0), \Theta_v(u_0, v_0) \rangle$ è

$$|Q - P_0| = \sqrt{E(u_0, v_0)\alpha^2 + 2F(u_0, v_0)\alpha\beta + G(u_0, v_0)\beta^2}.$$

In particolare, il **vettore tangente** $\Gamma'(\lambda_0)$ definito in (1.13) ha norma al quadrato

$$(1.19) \quad |\Gamma'|^2 = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2$$

con E, F e G calcolati per $u = u_0, v = v_0, u', v'$ calcolati per $\lambda = \lambda_0$.

Dunque, la **lunghezza** dell'arco di curva Γ compreso fra $\lambda_0 \in I$ e $\lambda_1 \in I$ è, per la (1.13):

$$(1.20) \quad \ell_{\lambda_0, \lambda_1} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} |\Gamma'(\lambda)| d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{E(u(\lambda), v(\lambda))u'^2(\lambda) + 2F(u(\lambda), v(\lambda))u'(\lambda)v'(\lambda) + G(u(\lambda), v(\lambda))v'^2(\lambda)} d\lambda.$$

Indipendenza della lunghezza dalla parametrizzazione. La lunghezza $\ell_{\lambda_0, \lambda_1}$ è **indipendente** dalla parametrizzazione, dato che la norma del vettore tangente è indipendente dalla base scelta per scrivere (1.19).

Per esercizio, si verifichi direttamente l'indipendenza di (1.19) dalla parametrizzazione, scrivendo la curva $\Gamma(\lambda)$ nella riparametrizzazione (1.18) come $\Gamma(\lambda) = \bar{\Theta}[\bar{u}(u(\lambda), v(\lambda)), \bar{v}(u(\lambda), v(\lambda))]$, essendo $\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)$ le funzioni inverse di quelle che appaiono in (1.7): calcolando $\bar{E}\bar{u}'^2 + 2\bar{F}\bar{u}'\bar{v}' + \bar{G}\bar{v}'^2$, tenendo conto delle (1.18) e del fatto che $\bar{u}'(\lambda) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}u'(\lambda) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}v'(\lambda)$ e analogamente $\bar{v}'(\lambda)$ si ottiene la tesi.

Scrittura della prima forma fondamentale. L'indipendenza dalle coordinate viene riassunta nella scrittura formale della prima forma fondamentale come

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2$$

qualunque sia la parametrizzazione. La formula sottintende che l'elemento di linea per il calcolo della lunghezza di una curva sulla superficie è $ds = \sqrt{E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2}$. Ignorando il significato delle forme differenziali, le scritture ds^2 e ds hanno solo il significato formale di richiamare le formule (1.19) e (1.20), rispettivamente.

Angolo fra due curve. Se due curve della superficie si intersecano in un punto regolare $P_0 \in \Theta$, l'angolo fra di esse è definito come l'angolo che formano i vettori tangenti nel punto di intersezione. Si vuole esprimere l'angolo mediante i coefficienti della prima forma fondamentale. Siano

$$\Gamma_{\sharp}(\lambda) = \Theta(u_{\sharp}(\lambda), v_{\sharp}(\lambda)), \quad \lambda \in I_{\sharp} \subseteq \mathbb{R}, \quad \Gamma(\lambda_0) = P_0,$$

$$\Gamma_{\flat}(\mu) = \Theta(u_{\flat}(\mu), v_{\flat}(\mu)), \quad \mu \in I_{\flat} \subseteq \mathbb{R}, \quad \Gamma(\mu_0) = P_0,$$

due curve di Θ per P_0 come in (1.12). Si ha

$$(1.21) \quad \cos \alpha = \frac{Eu'_{\sharp}u'_{\flat} + F(u'_{\sharp}v'_{\flat} + u'_{\flat}v'_{\sharp}) + Gv'_{\sharp}v'_{\flat}}{\sqrt{Eu'_{\sharp}^2 + 2Fu'_{\sharp}v'_{\sharp} + Gv'_{\sharp}^2} \sqrt{Eu'_{\flat}^2 + 2Fu'_{\flat}v'_{\flat} + Gv'_{\flat}^2}}$$

dove α è l'angolo fra le due curve, i coefficienti E, F e G sono calcolati in $u_{\sharp}(\lambda_0) = u_{\flat}(\mu_0), v_{\sharp}(\lambda_0) = v_{\flat}(\mu_0)$ e le derivate rispetto ai parametri sono calcolate per $\lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0$.

Parametrizzazione ortogonale. Una parametrizzazione per cui $F(u, v) = 0$ in ogni punto viene detta **ortogonale**. In tal caso i vettori Θ_u e Θ_v sono ortogonali o, equivalentemente, le linee coordinate formano un angolo retto.

Se la parametrizzazione è ortogonale e se $E = G$, allora l'angolo fra le curve piane $(u_{\sharp}(\lambda), v_{\sharp}(\lambda))$, $(u_{\flat}(\mu), v_{\flat}(\mu))$, e le curve $\Theta(u_{\flat}(\mu), v_{\flat}(\mu))$, $\Theta(u_{\sharp}(\lambda), v_{\sharp}(\lambda))$ è il medesimo per ogni $\lambda \in I_{\sharp}$, $\mu \in I_{\flat}$. In tal caso la parametrizzazione si dice **conforme**.

Area di superficie. L'area dell'insieme $\Theta(D) = \{\Theta(u, v) \mid (u, v) \in D \subseteq I_1 \times I_2\}$ è, per definizione,

$$\mathcal{A}[\Theta(D)] = \int_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

La spiegazione empirica della formula scritta consiste nel fatto che l'area di un parallelogrammo di lati $\Theta_u(u_0, v_0)$, $\Theta_v(u_0, v_0)$ è il modulo di (1.5), ovvero il determinante di (1.17). Immaginando di approssimare $\Theta(D)$ con parallelogrammi e sommando i contributi, si ottiene al limite l'integrale $\mathcal{A}[\Theta(D)]$.

Superfici isometriche. Siano date due superfici $\Theta_1(u, v)$, $u, v \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\Theta_v(\bar{u}, \bar{v})$, $\bar{u}, \bar{v} \in V \subseteq \mathbb{R}^2$ e una corrispondenza biunivoca $U \leftrightarrow V$ definita da $u(\bar{u}, \bar{v})$, $v(\bar{u}, \bar{v})$ fra i parametri. Le due superfici si dicono **superfici isometriche** se la lunghezza di ogni curva $\Gamma(u(\lambda), v(\lambda))$ di Θ_1 coincide con la lunghezza di con la metrica di Θ_v .

Si può verificare che due superfici come sopra sono isometriche se e solo se fra i coefficienti E, F, G e $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ delle due forme associate a ciascuna superficie vale la relazione (1.18), essendo J la matrice jacobiana (1.8) della trasformazione dei parametri.

Esercizio 1.2 Si scriva l'equazione parametrica (1.2) di un piano affine rispetto ad un sistema di riferimento fisso e ortonormale $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Si determinino i punti regolari, la base (1.4) in ciascuno di essi e si calcolino i coefficienti della prima forma fondamentale.

Esercizio 1.3 Ripetere l'esercizio per la sfera

$$(1.22) \quad \Theta_1(u, v) = R \cos u \cos v \mathbf{i} + R \cos u \sin v \mathbf{j} + R \sin u \mathbf{k}, \quad v \in (-\pi/2, \pi/2), \quad u \in [0, 2\pi),$$

con R costante positiva, per il cilindro

$$(1.23) \quad \Theta_v(u, v) = R \cos u \mathbf{i} + R \sin u \mathbf{j} + v \mathbf{k}, \quad u \in [0, 2\pi), \quad v \in \mathbb{R}$$

e per l'ellissoide

$$(1.24) \quad \Theta_3(u, v) = a \cos u \cos v \mathbf{i} + b \cos u \sin v \mathbf{j} + c \sin u \mathbf{k}, \quad u \in [0, 2\pi), \quad v \in (-\pi/2, \pi/2).$$

con $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ costanti.

1.3 Superfici come insieme di livello

Una superficie può essere assegnata anche come insieme di livello di una funzione. Sia $F(P)$ un campo scalare da $U \subseteq \Sigma$ in \mathbb{R} . Si consideri l'insieme, se non vuoto,

$$(1.25) \quad \Phi_0 = \{P \in U \mid F(P) = 0\} \subseteq \Sigma.$$

Ad esempio, alla funzione $F(P) = |P - O| - R$, con O fissato in Σ , corrisponde l'insieme dei punti in Σ a distanza R da O (sfera di raggio R).

Sia F differenziabile. Un punto $P_0 \in \Phi_0$ si dice **regolare** se il gradiente calcolato in P non è il vettore nullo:

$$(1.26) \quad \nabla F(P_0) \neq \mathbf{0}.$$

Se utilizziamo ad esempio un sistema cartesiano ortormale $\{O, \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle\}$, la condizione (1.26) equivale a

$$|\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_0)|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}_0)\right)^2 \neq 0$$

dove $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$, è la scrittura del campo F nelle coordinate scelte e $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sono le coordinate di P_0 nel sistema fissato.

L'ipotesi di regolarità permette l'applicazione del **teorema del Dini**, in base al quale il luogo (1.25) è localmente un grafico. Se, ad esempio, $\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}_0) \neq 0$, allora $F(P) = 0$ può scriversi come $z = \varphi(x, y)$, con $(x, y) \in W = [x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1] \times [y_0 - \varepsilon_2, y_0 + \varepsilon_2]$, per opportuni $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\varphi(x_0, y_0) = z_0$. Il luogo (1.25) è dunque identificabile con il codominio della **superficie parametrica** (1.1) $\Theta : W \rightarrow \Sigma$ definita come $\Theta(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \varphi(u, v)\mathbf{k}$, oppure, mediante (1.2)

$$(1.27) \quad \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = \varphi(u, v). \end{cases} \quad (u, v) \in W$$

Per la superficie (1.27) si ha rispetto al riferimento scelto

$$(1.28) \quad \Theta_u = \left(1, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right), \quad \Theta_v = \left(0, 1, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right),$$

dunque la superficie è regolare in ogni punto di W .

Esercizio 1.4 *Determinare i coefficienti della prima forma fondamentale per la superficie (1.27).*

I vettori Θ_u e Θ_v sono entrambi ortogonali al vettore gradiente: infatti $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ è un'identità per $(x, y) \in W$. Derivando rispetto a x, y si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

che equivale all'ortogonalità di $\nabla_{\mathbf{x}} f$ con entrambi i vettori (1.28). Si ha dunque la seguente

Proprietà 1.1 *Il piano tangente (1.6) in un punto regolare P_0 di Φ_0 (1.25) coincide con l'insieme di tutti e soli i vettori ortogonali al vettore ∇F :*

$$\{Q \in \Sigma \mid (Q - P_0) \cdot \nabla F(P_0) = 0\}.$$

Qualunque sia la parametrizzazione di Φ_0 (non necessariamente la (1.27)), i vettori Θ_u, Θ_v di (1.4) sono ortogonali a ∇F .

Lo **spazio normale** $\mathcal{N}_{P_0} \Phi_0$ definito in (1.16) coincide dunque in ogni punto P_0 di Φ_0 con l'insieme dei vettori applicati $(P_0, \alpha \nabla F(P_0))$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.4 Superfici di rotazione

Sia $\Gamma(u)$, $u \in I \subseteq \mathbb{R}$, una curva contenuta in un piano affine Π di Σ e sia r una retta del piano Π . Sia \mathbf{e}_r un versore di direzione r e $\Gamma_r(u)$ la proiezione ortogonale di $\Gamma(u)$ su r .

La **rotazione** di $\Gamma_0(u)$ attorno alla retta r dà luogo all'insieme dei punti

$$\mathcal{R} = \{P \in \Sigma : |P - \Gamma_r(u)| = |\Gamma(u) - \Gamma_r(u)|, (P - \Gamma_r(u)) \cdot \mathbf{e}_r = 0, \text{ per qualche } u \in I\}.$$

Per ogni u fissato in I , \mathcal{R} consiste nella circonferenza di raggio Γ_u e centro $\Gamma_r(u)$.

La scrittura parametrica del luogo \mathcal{R} diventa semplice se fissiamo un sistema di riferimento ortonormale $\{O, \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle\}$ rispetto al quale la retta r ha la direzione di uno dei tre versori. Così, ad esempio, se $\mathbf{e}_r = \mathbf{k}$ e Π è il piano $y = 0$ si ha che $\Gamma(u)$ è parametrizzabile come

$$\Gamma(u) - O = f(u)\mathbf{i} + h(u)\mathbf{k}$$

e l'insieme \mathcal{R} , figurandosi le circonferenze come sopra, è

$$\mathcal{R} = \{P \in \Sigma \mid P - O = f(u) \cos v \mathbf{i} + f(u) \sin v \mathbf{j} + h(u) \mathbf{k}, \quad u \in I, v \in [0, 2\pi)\}.$$

Una parametrizzazione (1.2) del tipo

$$(1.29) \quad \begin{cases} x(u, v) = f(u) \cos v \\ y(u, v) = f(u) \sin v \\ z(u, v) = h(u) \end{cases} \quad u \in I, \quad v \in [0, 2\pi)$$

definisce quindi la **superficie di rotazione** della curva $\Gamma(u)$ attorno all'asse z . In modo analogo si scrivono le equazioni parametriche per la rotazione di una curva attorno agli altri assi. La $f(u)$ ha il significato geometrico di distanza (con segno) dall'asse di rotazione. In particolare, la rotazione di un grafico $z = h(x)$ comporta le equazioni

$$(1.30) \quad \begin{cases} x(u, v) = u \cos v \\ x(u, v) = u \sin v \\ x(u, v) = h(u) \end{cases} \quad u \in I, \quad v \in [0, 2\pi)$$

I vettori (1.4) per (1.29) sono

$$\Theta_u = f'(u)[\cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j}] + h'(u) \mathbf{k}$$

$$\Theta_v = f(u)[- \sin v \mathbf{i} + \cos v \mathbf{j}],$$

dunque $\Theta_u \wedge \Theta_v = f(u)[-h'(u)(\cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j}) + f'(u) \mathbf{k}]$ il cui modulo al quadrato è $f^2(u)(f'^2(u) + h'^2(u))$. I punti singolari sono dunque gli eventuali punti singolari della curva, ruotati su circonferenze, e i punti sull'asse di rotazione, dove d'altra parte non è definito il valore di v .

In ogni punto regolare $P_0 = P(u_0, v_0)$ di una superficie di rotazione le linee coordinate (1.3) vengono dette rispettivamente **meridiano** per P_0 e **parallelo** per P_0 .

La prima forma fondamentale ha coefficienti

$$(1.31) \quad E(u, v) = f'^2(u) + h'^2(u), \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = f^2(u),$$

dunque la parametrizzazione è **ortogonale**, ovvero i meridiani e i paralleli formano angoli retti.

Osservazione 1.1 *Rispetto all'assegnazione della superficie come (1.25), Φ_0 è una superficie di rotazione attorno all'asse z se e solo se F si scrive, nel sistema $\{O, \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle\}$, come $f(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$. Infatti, se un punto di coordinate (x, y, z) appartiene a \mathcal{R} , anche tutta la circonferenza di centro $(0, 0, z)$ e raggio $\sqrt{x^2 + y^2}$ deve appartenere a \mathcal{R} .*

Esercizio 1.5 *Scrivere le equazioni parametriche della sfera come rotazione della semicirconferenza $\Gamma(u) - O = R \cos u \mathbf{i} + R \sin u \mathbf{k}$, $u \in (-\pi/2, \pi/2)$, attorno all'asse z .*

Esercizio 1.6 *Scrivere le equazioni parametriche del toro, superficie di rotazione di una circonferenza attorno all'asse z , di centro $(a, 0, 0)$ e raggio $b < a$. Pervenire alle equazioni*

$$(1.32) \quad \begin{cases} x(u, v) = b(\cos u + a) \cos v \\ x(u, v) = b(\cos u + a) \sin v \\ x(u, v) = b \sin u \end{cases} \quad u \in [0, 2\pi), \quad v \in [0, 2\pi)$$

e verificare che la (1.25) si scrive nel sistema scelto $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 - b^2 = 0$.

Esercizio 1.7 *Verificare le parametrizzazioni rispetto ad un sistema cartesiano ortonormale $\{O, \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle\}$ per le quadriche ottenute come rotazione di*

(i) una parabola $z = ax^2$ attorno all'asse z (**paraboloide**); le equazioni parametriche (1.30) sono

$$(1.33) \quad \begin{cases} x(u, v) = u \cos v \\ x(u, v) = u \sin v \\ x(u, v) = u^2, \end{cases}$$

mentre l'equazione implicita (1.25) è $x^2 + y^2 = z/a$.

(ii) un'ellisse $x^2/A^2 + z^2/B^2 = 1$ di equazioni parametriche $(A \cos u, 0, B \sin u)$ attorno all'asse z (**ellissoide di rotazione**); la (1.30) è la (1.24) con $a = b = A$, $c = B$ e la (1.25) è $(x^2 + y^2)/A^2 + z^2/B^2 = 1$,

(iii) un'iperbole $x^2/a^2 - z^2/b^2 = 1$ di equazioni parametriche $(a \cosh u, 0, b \sinh u)$ attorno all'asse z (**iperboloide ad una falda**); la parametrizzazione (1.30) è

$$(1.34) \quad \begin{cases} x(u, v) = a \cosh u \cos v \\ x(u, v) = a \cosh u \sin v \\ x(u, v) = b \sinh u, \end{cases}$$

e la (1.25) si scrive $(x^2 + y^2)/a^2 - z^2/b^2 - 1 = 0$

Esercizio 1.8 Trovare le equazioni parametriche (1.30) del **cono circolare retto**, mediante la rotazione di una retta passante per l'origine e contenuta sul piano $y = 0$ attorno all'asse z . Determinare l'equazione implicita (1.25).

Esercizio 1.9 Trovare le equazioni parametriche (1.30) del **cilindro circolare retto**, mediante la rotazione attorno all'asse z di una retta parallela all'asse medesimo. Determinare l'equazione implicita (1.25).

Esercizio 1.10 Di tutte le superfici degli Esercizi 1.9–1.13 determinare i punti regolari e scrivere i coefficienti della prima forma fondamentale. Verificare che il piano, il cono e il cilindro sono superfici isometriche.

2 Moto di un punto su una superficie

Sia P un punto materiale di massa m vincolato su una superficie parametrizzata tramite $\Theta(u, v)$, $u, v \in W \subseteq \mathbb{R}^2$. Lo studio del moto di P sulla superficie Θ consiste nella ricerca delle **posizioni compatibili con il vincolo**

$$(2.1) \quad P(t) \in \Theta, \quad [t_0, t_1]$$

che il punto assume in un intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ a partire dallo **stato cinematico iniziale**

$$(2.2) \quad P(t_0) = P_0, \quad \dot{P}(t_0) = \mathbf{v}_0$$

e assumendo la validità in ogni istante dell'**equazione di moto**

$$(2.3) \quad m \ddot{P}(t) = \mathbf{F}(P(t), \dot{P}(t), t) + \Phi(P(t), \dot{P}(t), t)$$

dove $(P, \mathbf{F}) \in \mathcal{T}_P \Sigma$ è il campo applicato in P delle **forze direttamente applicate** e $(P, \Phi) \in \mathcal{T}_P \Sigma$ è il campo applicato che descrive la **forza vincolare**, dovuta alla restrizione (2.1).

2.1 Insieme delle velocità possibili, energia cinetica

Analogamente a quanto si è visto per la curva, risulta conveniente scrivere la traiettoria $P(t)$ come

$$P(t) = \Theta(u(t), v(t)),$$

in modo da avere sempre presente l'informazione geometrica di appartenenza del punto alla superficie. La **velocità** assume la forma (vedi anche (1.4)):

$$(2.4) \quad \dot{P}(t) = \Theta_u(u(t), v(t)) \dot{u}(t) + \Theta_v(u(t), v(t)) \dot{v}(t).$$

L'insieme delle **velocità possibili** nella posizione $P_0 \in \Theta$ consiste nell'insieme dei vettori applicati (P_0, \mathbf{v}) , dove \mathbf{v} è la velocità di una possibile traiettoria passante da P_0 , ovvero una traiettoria compatibile con il vincolo.

Fissata una posizione $P_0 = \Theta(u_0, v_0)$, un tempo t_0 e due valori arbitrari $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, la posizione

$$u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0, \quad \dot{u}(t_0) = \alpha, \quad \dot{v}(t_0) = \beta$$

dà luogo ad una traiettoria $\Theta(u(t), v(t))$ sulla superficie che al tempo $t = t_0$ passa da P_0 alla velocità $\dot{P}(t_0) = \alpha \Theta_u(u(t_0), v(t_0)) + \beta \Theta_v(u(t_0), v(t_0))$.

Il confronto con (1.15) porta immediatamente alla identificazione dell'insieme delle **velocità possibili** nella posizione P_0 con lo **spazio tangente** in P_0 $\mathcal{T}_{P_0} \Theta$.

La velocità effettiva del punto su Γ è in corrispondenza, posizione per posizione, con uno solo degli elementi di (2.4), ovvero con un particolare valore di α : la direzione del moto è in ogni istante una direzione nello spazio tangente.

L'unione di tutti gli spazi tangenti

$$\mathcal{T}\Theta = \bigcup_{P \in \Theta} \mathcal{T}_P \Theta,$$

che va immaginato come la superficie insieme a tutti i piani tangenti, costituisce il cosiddetto **fibrato tangente**.

Esattamente come si è visto per la curva, anche nel caso della superficie la geometria è in stretta connessione con la cinematica: lo **stato cinematico** del punto (P, \dot{P}) , ovvero posizione e velocità sulla superficie, è individuato univocamente dalle variabili (u, v, \dot{u}, \dot{v}) del fibrato tangente: la coppia di parametri $(u, v) \in U$ stabilisce la posizione, la coppia $(\dot{u}, \dot{v}) \in \mathbb{R}^2$ una possibile velocità.

Lo spazio $U \times \mathbb{R}^2$ delle quattro variabili (u, v, \dot{u}, \dot{v}) è lo **spazio delle fasi** per il moto sulla superficie, ovvero l'insieme degli stati cinematici. Il **moto effettivo** $(u(t), v(t), \dot{u}(t), \dot{v}(t))$, a partire dalle condizioni iniziali $(u(0), v(0), \dot{u}(0), \dot{v}(0))$, è dunque una successione di punti, una traiettoria nello spazio delle fasi.

L'energia cinetica, ricordando (1.17), assume la forma

$$(2.5) \quad T(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \frac{1}{2}m\dot{P}^2(t) = \frac{m}{2} [E(u, v)\dot{u}^2 + 2F(u, v)\dot{u}\dot{v} + G(u, v)\dot{v}^2]$$

Si osservi che (2.5) è un **polinomio omogeneo di secondo grado** rispetto alle variabili cinetiche \dot{u} , \dot{v} e la funzione T può essere vista anche come il risultato della **forma bilineare simmetrica e definita positiva**

$$T = \frac{1}{2}m \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}.$$

2.2 Equazioni di moto

Derivando il vettore (2.4) si determina il vettore **accelerazione** in funzione dei parametri e delle loro derivate:

$$(2.6) \quad \ddot{P}(t) = \Theta_u \ddot{u} + \Theta_v \ddot{v} + \Theta_{uu} \dot{u}^2 + 2\Theta_{uv} \dot{u}\dot{v} + \Theta_{vv} \dot{v}^2.$$

L'equazione (2.3) viene proiettata nello **spazio delle velocità possibili** che, come abbiamo visto, coincide con lo **spazio tangente** (1.15) generato in ogni posizione dai vettori (Θ_u, Θ_v) :

$$(2.7) \quad \begin{cases} m\ddot{P}(t) \cdot \Theta_u = \mathbf{F} \cdot \Theta_u + \Phi \cdot \Theta_u, \\ m\ddot{P}(t) \cdot \Theta_v = \mathbf{F} \cdot \Theta_v + \Phi \cdot \Theta_v. \end{cases}$$

Le equazioni (2.7) scrivono le **componenti lagrangiane** dei vettori in (2.3), le quali sono, per definizione,

$$(2.8) \quad \mathbf{V}_\theta^{(u,v)} = (\mathbf{V} \cdot \Theta_u, \mathbf{V} \cdot \Theta_v) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \mathbf{V} \in V_\Sigma$$

dove θ sta per "proiezione" (non indica una derivata), l'indice (u,v) ricorda i parametri scelti.

Riparametrizzazione. Effettuando un cambio di parametri come in (1.7), la relazione con le nuove componenti lagrangiane è la seguente:

$$\mathbf{V}_\theta^{(\bar{u}, \bar{v})} = J\mathbf{V}_\theta^{(u,v)}$$

dove J è la matrice (1.8).

Come nel caso del moto sulla curva, ogni termine in (2.7) va analizzato singolarmente. Iniziamo dalla

Definizione 2.1 *Il vincolo (2.1) si dice liscio o ideale in P_0 se la forza vincolare Φ in tale posizione è ortogonale ad ogni velocità possibile:*

$$(2.9) \quad \Phi \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \forall (P_0, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}_{P_0}\Theta.$$

L'ipotesi di vincolo liscio consiste al solito nel non intervento della forza vincolare sul moto del punto nello spazio delle velocità possibili.

Si osservi che la definizione (2.9) equivale all'**annullarsi delle componenti lagrangiane** $\Phi_\theta^{(u,v)}$, qualunque parametrizzazione si sia scelta: dal punto di vista geometrico, l'ipotesi equivale ad affermare che il vincolo Φ è liscio se e solo se (P_0, Φ) è nello **spazio normale** $\mathcal{N}_{P_0}\Theta$ definito in (1.16), ovvero

$$(2.10) \quad \Phi = \lambda\Theta_u \wedge \Theta_v \quad \text{oppure} \quad \Phi = \lambda\nabla F$$

con $\lambda(t)$ incognita da determinare (**moltiplicatore di Lagrange**). Il secondo caso in (2.10) si riferisce all'assegnazione implicita (1.25).

Per quanto riguarda la proiezione delle **forze di inerzia** $-m\ddot{P}$, si ha la

Proposizione 2.1 *Valgono le uguaglianze:*

$$(2.11) \quad m\ddot{P}(t) \cdot \Theta_u = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T}{\partial u},$$

$$(2.12) \quad m\ddot{P}(t) \cdot \Theta_v = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial T}{\partial v}$$

Dim. Esprimiamo i termini a sinistra di (2.7) in funzione dei coefficienti E , F e G della prima forma fondamentale e delle loro derivate. Da (2.6) si ha, indicando per brevità le derivate seconde con

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} = \Theta_{uu}, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = \Theta_{uv}, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} = \Theta_{vv}$$

$$(2.13) \quad \begin{cases} \ddot{P}(t) \cdot \Theta_u = E \ddot{u} + F \ddot{v} + \Theta_{uu} \cdot \Theta_u \dot{u}^2 + 2\Theta_{uv} \cdot \Theta_u \dot{u}\dot{v} + \Theta_{vv} \cdot \Theta_u \dot{v}^2, \\ \ddot{P}(t) \cdot \Theta_v = F \ddot{u} + G \ddot{v} + \Theta_{uu} \cdot \Theta_v \dot{u}^2 + 2\Theta_{uv} \cdot \Theta_v \dot{u}\dot{v} + \Theta_{vv} \cdot \Theta_v \dot{v}^2. \end{cases}$$

D'altra parte, da (1.4) e (1.17) si trova [$E_u = \frac{\partial E}{\partial u}$, e così via]

$$(2.14) \quad \begin{aligned} E_u &= 2\Theta_{uu} \cdot \Theta_u, & F_u &= \Theta_{uu} \cdot \Theta_v + \Theta_{uv} \cdot \Theta_u, & G_u &= 2\Theta_{uv} \cdot \Theta_v, \\ E_v &= 2\Theta_{uv} \cdot \Theta_u, & F_v &= \Theta_{uv} \cdot \Theta_v + \Theta_{vv} \cdot \Theta_u, & G_v &= 2\Theta_{vv} \cdot \Theta_v. \end{aligned}$$

Operando le sostituzioni in (2.13) e tenendo presente che

$$\Theta_{uu} \cdot \Theta_v = F_u - \Theta_{uv} \cdot \Theta_u = F_u - \frac{1}{2}F_v \quad \Theta_{vv} \cdot \Theta_u = F_v - \Theta_{uv} \cdot \Theta_v = F_v - \frac{1}{2}G_u$$

si ottiene:

$$(2.15) \quad \begin{cases} \ddot{P}(t) \cdot \Theta_u = E \ddot{u} + F \ddot{v} + \underbrace{\frac{1}{2}E_u \dot{u}^2 + E_v \dot{u}\dot{v} + \left(F_v - \frac{1}{2}G_u\right) \dot{v}^2}_{= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T}{\partial u}}, \\ \ddot{P}(t) \cdot \Theta_v = F \ddot{u} + G \ddot{v} + \underbrace{\left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right) \dot{u}^2 + G_u \dot{u}\dot{v} + \frac{1}{2}G_v \dot{v}^2}_{= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial T}{\partial v}}. \end{cases}$$

La verifica da eseguire partendo dall'espressione (2.5) dell'energia cinetica di uguaglianza con le derivate di T (parentesi graffe orizzontali) viene lasciata per esercizio. \square

Le **equazioni di moto** (2.7) di un punto su una **superficie liscia** si scrivono dunque

$$(2.16) \quad \begin{cases} E \ddot{u} + F \ddot{v} + \frac{1}{2}E_u \dot{u}^2 + E_v \dot{u}\dot{v} + \left(F_v - \frac{1}{2}G_u\right) \dot{v}^2 = \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \Theta_u \\ F \ddot{u} + G \ddot{v} + \left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right) \dot{u}^2 + G_u \dot{u}\dot{v} + \frac{1}{2}G_v \dot{v}^2 = \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \Theta_v, \end{cases}$$

oppure

$$(2.17) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} = \mathbf{F} \cdot \Theta_u \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial T}{\partial v} = \mathbf{F} \cdot \Theta_v \end{cases}$$

Per trasformare le **condizioni al tempo iniziale** $t = t_0$ (2.2) in termini dei parametri u e v , si tiene conto che

$$(2.18) \quad \begin{aligned} P_0 &= \Theta(u_0, v_0) \implies u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0, \\ \mathbf{v}_0 &= \Theta_u(u_0, v_0)\dot{u}_0 + \Theta_v(u_0, v_0)\dot{v}_0 \implies \dot{u}(t_0) = \dot{u}_0, \quad \dot{v}(t_0) = \dot{v}_0. \end{aligned}$$

Il sistema (2.16) oppure (2.17) è del secondo ordine, di due equazioni differenziali nelle due incognite $u(t)$ e $v(t)$. Esso è **ponibile in forma normale**, essendo la matrice (1.17) non singolare.

La seconda scrittura (2.17) è certamente più conveniente nel caso in cui le **forze direttamente applicate** sono **di tipo gradiente**: il prossimo Capitolo è dedicato a ripercorrere brevemente la teoria dei campi di vettori esprimibili mediante il gradiente di una funzione.

3 Campi gradiente, forze con potenziale

3.1 Integrali curvilinei, campi gradiente

Dati in uno spazio affine A di dimensione N un **campo vettoriale** $\chi : A \rightarrow \mathcal{T}A$, $\chi(P) = (P, \chi_\ell(P))$ e una **curva** $\Gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow A$, si definisce **integrale curvilineo** del campo lungo il tratto di curva compreso fra $\Gamma(\lambda_0)$ e $\Gamma(\lambda_1)$, $\lambda_0, \lambda_1 \in I$, l'integrale nella sola variabile λ

$$(3.1) \quad \int_{\Gamma(\lambda)} \chi = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \chi_\ell(\Gamma(\lambda)) \cdot \Gamma'(\lambda) d\lambda.$$

Il numero reale (3.1) è indipendente dalla parametrizzazione a meno del segno, nel senso della seguente

Proprietà 3.1 *Sia $\lambda(\mu)$ una riparametrizzazione concorde, ovvero $\lambda'(\mu) > 0$. Allora l'integrale curvilineo (3.1) eseguito sulla curva Γ_1 come in (1.9) è il medesimo. Se $\lambda'(\mu) < 0$, allora (3.1) cambia il segno.*

Dim. Sia infatti $\Gamma_1(\mu) = \Gamma(\lambda(\mu))$ e sia $\mu_0 = \mu(\lambda_0)$, $\mu_1 = \mu(\lambda_1)$. Ricordando la relazione fra i vettori tangenti nelle due parametrizzazioni, si trova subito

$$(3.2) \quad \int_{\Gamma_1} \chi = \int_{\mu_0}^{\mu_1} \chi_\ell(\Gamma_1(\mu)) \cdot \Theta_u(\mu) d\mu = \int_{\mu_0}^{\mu_1} \chi_\ell[\Gamma(\lambda(\mu))] \cdot \Gamma'(\lambda(\mu)) \lambda'(\mu) d\mu.$$

Operando nell'integrale la sostituzione di variabile $\lambda = \lambda(\mu)$ ed esaminando i casi di parametrizzazione concorde e discorde si ottiene la tesi. \square

Sia ora $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita su uno spazio affine propriamente euclideo A a valori reali e Γ una curva in A . La funzione f viene detta anche **campo scalare** in A .

Si definisce **derivata** di f in $P_0 = P(\lambda_0)$, $\lambda_0 \in I$, **lungo la curva** Γ il limite, se esiste:

$$(3.3) \quad f'(P_0)|_{\Gamma(\lambda)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(\Gamma(\lambda_0 + h)) - f(\Gamma(\lambda_0))] \in \mathbb{R}.$$

La (3.3) non è altro che la derivata rispetto a λ calcolata in λ_0 della funzione $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$(3.4) \quad \varphi(\lambda) = f(\Gamma(\lambda)), \quad \lambda \in I.$$

Diciamo che f è **differenziabile** in P se esiste un vettore $\mathbf{b}(P) \in \mathbf{V}$ per cui

$$(3.5) \quad f(Q) = f(P) + \mathbf{b}(P) \cdot (Q - P) + |Q - P|r(P, Q)$$

con $r : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{Q \rightarrow P} r(P, Q) = 0$ [dove $Q \rightarrow P$ sta per $(Q - P) \rightarrow \mathbf{0}$].

La (3.5) è la **formula di Taylor al primo ordine** per f e dà l'approssimazione lineare di f intorno a P come $f(P) + \mathbf{b} \cdot (Q - P)$.

Se f differenziabile in P_0 , allora la derivata (3.3) dipende solo dal **vettore tangente** $\Gamma'(\lambda_0)$ e non dalla curva:

$$(3.6) \quad f'(P_0)|_{\Gamma(\lambda)} = \mathbf{b}(P_0) \cdot \Gamma'(\lambda_0).$$

Infatti, sotto l'ipotesi (3.5) possiamo scrivere

$$f(\Gamma(\lambda_0 + h)) - f(\Gamma(\lambda_0)) = \mathbf{b}(P_0) \cdot (\Gamma(\lambda_0 + h) - \Gamma(\lambda_0)) + |\Gamma(\lambda_0 + h) - \Gamma(\lambda_0)|r$$

dove $P_0 = \Gamma(\lambda_0)$ e $r \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$. Dunque, sostituendo questa espressione in (3.3), dividendo per h e passando al limite, si ottiene (3.6).

Possiamo dunque leggere la (3.3) come **derivata del campo scalare f nella direzione \mathbf{v}** , per ciascun \mathbf{v} fissato in \mathbf{V} : il valore che si ottiene è la derivata di f lungo una qualunque curva $\Gamma(\lambda)$ tale che $\Gamma(\lambda_0) = P_0$ e $\Gamma'(\lambda_0) = \mathbf{v}$.

Osservazione 3.1 *Da un altro punto di vista, vale la pena di osservare che, fissato il campo scalare f ed un punto P_0 in cui è definito il campo, la (3.6) definisce un omomorfismo da \mathbf{V} in \mathbb{R} , che associa ad ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ il numero reale $\mathbf{b}(P_0) \cdot \mathbf{v}$.*

Fissata f definita in $U \subseteq A$, il campo $\mathbf{b} : U \subseteq A \rightarrow \mathbf{V}$, induce il campo vettoriale

$$\beta : U \rightarrow \mathcal{T}A, \quad \beta(P) = (P, \mathbf{b}(P)) \in \mathcal{T}_P A, \quad P \in U, \quad \mathbf{b}(P) \in \mathbf{V}.$$

Chiamiamo β **campo vettoriale gradiente**. Si utilizza generalmente la notazione $\nabla f(P)$ per indicare il vettore $\mathbf{b}(P)$:

$$(3.7) \quad \beta(P) = (P, \nabla f(P)), \quad P \in U.$$

In termini della funzione scalare φ definita in (3.4) la (3.6) assume la forma

$$(3.8) \quad \varphi'(\lambda) = \nabla f(\Gamma(\lambda)) \cdot \Gamma'(\lambda).$$

La (3.8) viene detta **derivata di Lie** della funzione f lungo la curva Γ .

Poniamoci ora la questione inversa: dato un campo χ definito in $U \subseteq A$, esiste un campo scalare $f(P)$, $P \in U$, tale che il campo χ coincida con il campo (3.7)? I campi con tale proprietà verranno detti **campi gradienti**, in accordo con la definizione che segue.

Un campo vettoriale $\mathcal{X} : U \subseteq A \rightarrow \mathcal{T}A$, $\mathcal{X} = (P, \mathcal{X}_\ell)$ si dice **campo vettoriale gradiente** se esiste un campo scalare $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(P) = \mathcal{X}_\ell(P)$ per ogni $P \in U$. Il campo scalare f viene detto **potenziale** del campo vettoriale \mathcal{X} .

Le condizioni che caratterizzano i campi gradienti sono il contenuto del seguente importante Teorema.

Teorema 3.1 *Sia $\mathcal{X}(P)$ un campo continuo in un aperto connesso $U \subseteq A$, spazio propriamente euclideo. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- (a) *Il campo \mathcal{X} è un campo gradiente.*
- (b) *L'integrale curvilineo lungo un qualunque percorso Γ in S che collega $P_0 = \Gamma(\lambda_0)$ a $P_1 = \Gamma(\lambda_1)$ è indipendente dal percorso stesso e dipende solo dagli estremi.*
- (c) *L'integrale curvilineo lungo una qualunque curva chiusa regolare a tratti è nullo.*

Un campo vettoriale \mathcal{X} si dice **continuo** in un punto P_0 se è definito in P_0 e

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \mathcal{X}_\ell(P) = \mathcal{X}_\ell(P_0) \quad \text{ovvero} \quad \lim_{|P - P_0| \rightarrow 0} |\mathcal{X}_\ell(P) - \mathcal{X}_\ell(P_0)| = 0.$$

Una curva Γ si dice **regolare a tratti** se il vettore tangente esiste per ogni $\lambda \in I$, eccetto al più un numero finito di valori.

L'implicazione (b) \Rightarrow (a) è anche nota come **Primo teorema fondamentale per integrali curvilinei**, quella inversa come **Secondo teorema fondamentale**.

L'equivalenza (a) \Leftrightarrow (b) indica che i campi gradienti sono tutti e soli i campi per cui l'integrale curvilineo è indipendente dal percorso.

L'equivalenza (a) \Leftrightarrow (c) indica che i campi gradienti sono tutti e soli i campi per cui l'integrale curvilineo su ogni percorso chiuso è nullo.

Della dimostrazione completa, svolta ai Corsi di Analisi, mettiamo in evidenza solo il passaggio (a) \Rightarrow (b):

$$(3.9) \quad \int_{\Gamma(\lambda)} \mathcal{X} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mathcal{X}_\ell(\Gamma(\lambda)) \cdot \Gamma'(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \nabla f(\Gamma(\lambda)) \cdot \Gamma'(\lambda) d\lambda = \varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_0) = f(P_1) - f(P_0),$$

essendo $\varphi(\lambda) = f(\Gamma(\lambda))$ (vedi (3.8)) e $P_0 = \Gamma(\lambda_0)$, $P_1 = \Gamma(\lambda_1)$.

La scrittura del campo scalare f e del vettore gradiente $\nabla f(P)$ dipendono ovviamente dalla scelta del sistema di riferimento $\{O, \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N \rangle\}$ in A : se (ξ_1, \dots, ξ_N) sono le coordinate di P , ovvero $P - O = \sum_{i=1}^N \xi_i \mathbf{u}_i$, il campo f viene rappresentato mediante la funzione $\bar{f}(\xi_1, \dots, \xi_N) = f(P)$.

Per quanto riguarda la scrittura del gradiente ci limitiamo allo spazio tridimensionale Σ ed ai sistemi di coordinate già introdotti:

Gradiente in coordinate cartesiane, $f(P) = \bar{f}(x, y, z)$:

$$(3.10) \quad \nabla f(P) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \mathbf{k},$$

Gradiente in coordinate polari, $f(P) = \bar{f}(\varrho, \varphi)$:

$$(3.11) \quad \nabla f(P) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varrho} \mathbf{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

Gradiente in coordinate cilindriche, $f(P) = \bar{f}(\varrho, \varphi, z)$:

$$\nabla f(P) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varrho} \mathbf{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Gradiente in coordinate sferiche, $f(P) = \bar{f}(\varrho, \varphi, \vartheta)$:

$$(3.12) \quad \nabla f(P) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varrho} \mathbf{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho \cos \vartheta} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta.$$

Per dimostrare le formule precedenti, si deve scrivere la (3.6) facendo comparire in Γ' ciascun vettore tangente Γ'_i alle linee coordinate del sistema scelto: in tal modo a sinistra dell'uguaglianza si ha la derivata parziale di \bar{f} rispetto alla coordinata ξ_i e a destra si determinano le componenti covarianti del gradiente.

Verifichiamo ad esempio (3.12): chiamando $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ le linee coordinate come in (3.49) del Paragrafo 3.4, I Parte delle dispense, si ha

$$\begin{aligned} f'(P)|_{\Gamma_1} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varrho} = \nabla f(P) \cdot \Theta_u = \nabla f(P) \cdot \mathbf{e}_\varrho &\implies \nabla f(P) \cdot \mathbf{e}_\varrho &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varrho}, \\ f'(P)|_{\Gamma_2} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} = \nabla f(P) \cdot \Theta_v = \nabla f(P) \cdot \varrho \cos \vartheta \mathbf{e}_\varphi &\implies \nabla f(P) \cdot \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{\varrho \cos \vartheta} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}, \\ f'(P)|_{\Gamma_3} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \vartheta} = \nabla f(P) \cdot \Gamma'_3 = \nabla f(P) \cdot \varrho \mathbf{e}_\vartheta &\implies \nabla f(P) \cdot \mathbf{e}_\vartheta &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \vartheta}. \end{aligned}$$

Essendo $\langle \mathbf{e}_\varrho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\vartheta \rangle$ base ortonormale in ogni posizione P , componenti covarianti e controvarianti coincidono, dunque la (3.12).

3.2 Calcolo del potenziale in coordinate cartesiane

Il Paragrafo riporta sinteticamente alcune nozioni proprie del Corso di Analisi, con l'intento unico di agevolare il calcolo del potenziale, assegnato il campo, quando è richiesto dall'Esercizio.

Fissiamo in Σ un sistema di riferimento ortonormale levogiro $\{O, \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle\}$.

Un **campo vettoriale** $\mathcal{X} = (P, \mathcal{X}_\ell(P))$ viene scritto in coordinate assegnando

$$(3.13) \quad \mathcal{X}_\ell = X(x, y, z) \mathbf{i} + Y(x, y, z) \mathbf{j} + Z(x, y, z) \mathbf{k},$$

definito in un aperto $S \in \Sigma$.

L'integrabile curvilineo (3.1) del campo lungo la curva $\Gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)\mathbf{i} + \beta(\lambda)\mathbf{j} + \gamma(\lambda)\mathbf{k}$, $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$ è

$$(3.14) \quad \int_{\Gamma(\lambda)} \mathcal{X}_\ell = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} [X(\alpha(\lambda), \beta(\lambda), \gamma(\lambda))\alpha'(\lambda) + Y(\alpha(\lambda), \beta(\lambda), \gamma(\lambda))\beta'(\lambda) + Z(\alpha(\lambda), \beta(\lambda), \gamma(\lambda))\gamma'(\lambda)] d\lambda,$$

eventualmente da frazionare negli intervalli di regolarità nel caso in cui la curva sia regolare a tratti. Una notazione alternativa a (3.14) consiste in $\int_{\Gamma(\lambda)} \mathcal{X}_\ell \cdot d\mathbf{x}$, ponendo $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

Il campo vettoriale \mathcal{X} è un **campo gradiente** se e solo se esiste una funzione **potenziale** $U(x, y, z)$ tale che (vedi (3.10))

$$(3.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) = X(x, y, z) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) = Y(x, y, z) \\ \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) = Z(x, y, z) \end{cases}$$

Le (3.15) costituiscono un **sistema di equazioni alle derivate parziali**, in cui l'incognita è la funzione U . Prima di risolvere il sistema, è opportuno riconoscere se effettivamente il campo assegnato è un campo gradiente. Le condizioni equivalenti del Teorema 4.1 non offrono criteri facilmente utilizzabili: la condizione (c), ad esempio, prevede la verifica dell'annullamento dell'integrale su *ogni* percorso chiuso. A tale proposito, si risolve il seguente

Esercizio 3.1 Verificare che il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = xy(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + \mathbf{k}$ non è un campo gradiente, ma l'integrale curvilineo su ogni circuito chiuso simmetrico rispetto all'origine è nullo.

Una condizione sicuramente più accessibile riguarda la definizione di **rotore**, per il quale ci limitiamo alle coordinate cartesiane.

Dato un campo come in (3.13), definiamo **rotore** di \mathcal{X} il campo $(P, \text{rot } \mathcal{X}_\ell)$, dove

$$(3.16) \quad \text{rot } \mathcal{X}_\ell(x, y, z) = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

La seguente proprietà è di immediata verifica:

Proprietà 3.2 Se il campo (3.13) è un campo gradiente e le funzioni X, Y, Z sono derivabili rispetto agli argomenti, allora

$$(3.17) \quad \text{rot } \mathcal{X}_\ell = \mathbf{0}.$$

Basta infatti sostituire le (3.15) in (3.16). Dalla (3.17) si deduce che i campi gradiente sono campi **irrotazionali**, ovvero con rotore nullo:

Proposizione 3.1 Condizione necessaria affinché il campo (3.13) sia un campo gradiente è che valga, per ogni $P \in S$,

$$(3.18) \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}.$$

L'affermazione inversa non è in generale vera:

Esercizio 3.2 Si consideri il campo

$$\mathcal{X}_\ell(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$$

definito in Σ eccetto i punti di coordinate cartesiane $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$. Si verifichi che il campo è irrotazionale ma non ammette un potenziale nel dominio specificato.

In effetti, la possibilità di invertire la Proprietà 4.3 risiede nelle caratteristiche del dominio S in cui è definito il campo:

Proprietà 3.3 *Sia (3.13) un campo definito in un insieme semplicemente connesso e siano le (3.18) verificate dalle componenti del campo. Allora il campo è un campo gradiente, ovvero esiste un potenziale U per cui vale (3.15).*

Un aperto connesso \mathcal{C} di uno spazio topologico \mathcal{S} si **semplicemente connesso** se, fissati comunque due punti A, B in \mathcal{C} e scelte arbitrariamente due curve $\Gamma_1(\lambda), \Gamma_2(\lambda), \lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$, che collegano $A = \Gamma_1(\lambda_-) = \Gamma_2(\lambda_-)$ con $B = \Gamma_1(\lambda_+) = \Gamma_2(\lambda_+)$, esiste una trasformazione continua (**omotopia**) di una curva nell'altra. Formalmente, deve esistere una funzione continua $\psi : [\lambda_-, \lambda_+] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$ tale che

$$\psi(\lambda, 0) = \Gamma_1(\lambda), \quad \psi(\lambda, 1) = \Gamma_2(\lambda), \quad \psi(\lambda_-, \nu) = A, \quad \psi(\lambda_+, \nu) = B$$

per ogni $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+], \nu \in [0, 1]$.

In un dominio semplicemente connesso dunque campo gradiente equivale a campo irrotazionale. In base alla (3.9), una volta calcolato il potenziale U l'integrale (3.14) è, qualunque sia la curva Γ che unisce i punti A e B tali che $A - O = (x_A, y_A, z_A), B - O = (x_B, y_B, z_B)$:

$$(3.19) \quad \int_{\Gamma(\lambda)} \mathcal{X}_\ell = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A).$$

Per determinare la funzione potenziale di un campo gradiente (alternativamente alla risoluzione di (3.15)) conviene dunque scegliere un percorso regolare a tratti γ particolarmente semplice che unisca un punto prefissato $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ con il generico punto $P \equiv (x, y, z)$. Si consideri a tal proposito la curva $\Gamma(\lambda), \lambda \in [0, 1]$, regolare a tratti definita da

$$(3.20) \quad \Gamma(\lambda) = \begin{cases} [(1 - 3\lambda)x_0 + 3\lambda x] \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}, & \text{se } 0 \leq \lambda \leq 1/3 \\ x \mathbf{i} + [(2 - 3\lambda)y_0 + (3\lambda - 1)y] \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}, & \text{se } 1/3 < \lambda \leq 2/3 \\ x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + [(3 - 3\lambda)z_0 + (3\lambda - 2)z] \mathbf{k}, & \text{se } 2/3 < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

La curva consiste nell'unione dei tre segmenti che collegano P_0 con P e che si ottengono mediante tre spostamenti rettilinei paralleli agli assi coordinati.

Si ha, nei punti regolari:

$$\begin{cases} \Gamma'(\lambda) = 3\mathbf{i} & \text{se } 0 < \lambda < 1/3, \\ \Gamma'(\lambda) = 3\mathbf{j} & \text{se } 1/3 < \lambda < 2/3, \\ \Gamma'(\lambda) = 3\mathbf{k} & \text{se } 2/3 < \lambda < 1. \end{cases}$$

L'integrale (3.14) consiste dunque in

$$\begin{aligned} U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) &= \int_0^{1/3} 3X((1 - 3\lambda)x_0 + 3\lambda x, y_0, z_0) d\lambda + \\ &+ \int_{1/3}^{2/3} 3Y(x, (2 - 3\lambda)y_0 + (3\lambda - 1)y, z_0) d\lambda + \int_{2/3}^1 3Z(x, y, (3 - 3\lambda)z_0 + (3\lambda - 2)z) d\lambda. \end{aligned}$$

Con semplici sostituzioni di variabili negli integrali, si ottiene infine

$$(3.21) \quad \begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_0^1 [X((1 - \nu)x_0 + \nu x, y_0, z_0) + Y(x, (1 - \nu)y_0 + \nu y, z_0) + \\ &+ Z(x, y, (1 - \nu)z_0 + \nu z)] d\nu + U(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

La scelta del punto P_0 (dunque la presenza di $U(x_0, y_0, z_0)$ in (3.21)) non ha alcuna rilevanza, dato che, se $U(x, y, z)$ è una funzione potenziale, anche $U_c = U + c$, c costante arbitraria, è potenziale per il medesimo campo. Si usa dire in tal senso che U è definito a meno di una costante.

Sia dato, ad esempio, il campo $2(axy + bz)\mathbf{i} + (ax^2 - 6by)\mathbf{j} + 2bx\mathbf{k}$, con a, b costanti reali non nulle.

Il campo è definito su tutto \mathbb{R}^3 , dunque basta verificare la (3.18) per realizzare che il campo è un campo gradiente (la verifica è lasciata per esercizio).

Cerchiamo ora $U(x, y, z)$ direttamente dalle (3.15). Dalla prima di esse si trova $U(x, y, z) = ax^2y + 2bzx + \varphi(x, y)$, con φ funzione da determinare. Derivando rispetto a y l'espressione trovata e uguagliando alla seconda componente del campo, si trova $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -6by$, da cui $\varphi(x, y) = -3by^2 + \psi(z)$. Il calcolo fino a questo punto ha condotto a $U(x, y, z) = ax^2y + 2bzx - 3by^2 + \psi(z)$.

Per determinare ψ si deriva U rispetto a z e si uguaglia a $F_3 = 2bx$, per trovare $\psi'(z) = 0$, cioè ψ costante. Dunque $U(x, y, z) = ax^2y + 2bxz - 3by^2 + \text{cost}$.

Esercizio 3.3 Applicare la formula (3.21) scegliendo $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ per trovare il medesimo risultato.

Esercizio 3.4 Trovare le condizioni sulle costanti a, b, c in modo che il campo vettoriale

$$(ay^2 + 3bx)\mathbf{i} + (2cxy - by)\mathbf{j} + bz\mathbf{k}$$

risulti conservativo. Calcolare il corrispondente potenziale usando entrambi i metodi descritti.

Esercizio 3.5 Utilizzando (3.18) si verifichi che il campo

$$(3.22) \quad (\alpha x^n, \beta y^n, \gamma z^n)$$

con α, β, γ costanti, $n \geq 0$ è un campo gradiente e calcolare il potenziale mediante (3.15).

3.3 Forze di tipo gradiente

Esaminiamo ora il moto di un punto materiale P nello spazio Σ . Sia $P(t)$ la traiettoria e sia il punto soggetto ad un campo di forze posizionale **di tipo gradiente** con **potenziale** $\mathcal{U}(P)$:

$$\mathcal{F} = (P, \mathbf{F}(P)), \quad \mathbf{F}(P) = \nabla \mathcal{U}(P).$$

Il **lavoro** della forza nell'intervallo di tempo (t_0, t_1) è per definizione l'integrale della potenza:

$$A_{(t_0, t_1)} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(P(t)) \cdot \dot{P}(t) dt$$

nel quale si riconosce l'integrale curvilineo del campo delle forze scritto nella parametrizzazione tempo. Vogliamo dimostrare la seguente importante

Proposizione 3.2 Se il campo di forze posizionale $\mathcal{F} = (P, \mathbf{F}(P))$ è un **campo gradiente**, allora il **lavoro** di \mathcal{F} nell'intervallo di tempo (t_0, t_1) è **indipendente dalla traiettoria** $P(t)$ che unisce il punto $P_0 = P(t_0)$ a $P_1 = P(t_1)$ e vale

$$(3.23) \quad A = \mathcal{U}(P(t_1)) - \mathcal{U}(P(t_0)),$$

essendo $\mathcal{U}(P)$ il potenziale di $\mathbf{F}(P)$: $\nabla \mathcal{U}(P) = \mathbf{F}(P)$.

Dim. La (3.23) non è altro che l'indipendenza dell'integrale curvilineo di un campo gradiente dal percorso scelto, ovvero la proprietà (3.9) in cui λ è il tempo. \square

La (3.8) scritta rispetto al parametro t pone in evidenza l'uguaglianza della derivata del potenziale lungo la traiettoria con la **potenza della forza** \mathbf{F} :

$$(3.24) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{U}(P(t)) = \nabla \mathcal{U}(P) \cdot \dot{P}(t) = \mathbf{F}(P(t)) \cdot \dot{P}(t) = W_F.$$

Quest'ultima formula introduce un'informazione importante nello studio del moto di un punto materiale: eseguiamo il **bilancio energetico** moltiplicando scalarmente l'equazione di moto per la velocità per ottenere

$$(3.25) \quad \underbrace{m\ddot{P}\cdot\dot{P}}_{=\frac{dT}{dt}} = \underbrace{\mathbf{F}\cdot\dot{P}}_{=W_F=\frac{dU}{dt}} + \underbrace{\Phi\cdot\dot{P}}_{=W_\Phi=0 \text{ se vincolo liscio}}$$

dove $T = \frac{1}{2}m\dot{P}^2$ è l'energia cinetica del punto. Definendo l'**energia potenziale** $\mathcal{V}(P) = -\mathcal{U}(P)$ e l'**energia totale** $E(P, \dot{P}) = T(P, \dot{P}) + \mathcal{V}(P)$, si perviene dunque all'**integrale primo dell'energia**, ovvero alla costanza dell'energia totale durante il moto di P :

$$(3.26) \quad E = T(P, \dot{P}) + \mathcal{V}(P) \equiv E_0(P(t_0), \dot{P}(t_0)) = \frac{1}{2}m\dot{P}^2(t_0) + \mathcal{V}(P(t_0))$$

se $t = t_0$ è il tempo iniziale, al quale sono note la posizione $P(0)$ e la velocità $\dot{P}(0)$.

Ripetiamo che la (3.26) è valida per il moto di un punto materiale soggetto a **forze di tipo gradiente** libero di muoversi in Σ oppure costretto con **vincoli lisci**, ovvero forze con potenza nulla.

Vogliamo ora ricollegare la (3.26) con due situazioni in cui abbiamo provato ed utilizzato la costanza dell'energia.

Punto vincolato in modo liscio su una curva Γ : in tal caso avevamo scritto, nell'ipotesi più generale di **forza \mathbf{F} posizionale**

$$\frac{1}{2}m|\Gamma'(\lambda)|^2\dot{\lambda}^2 - U(\lambda) = E_0$$

essendo $U(\lambda) = \int \mathbf{F}(\Gamma(\lambda)) \cdot \Gamma'(\lambda) d\lambda$ una qualunque primitiva della potenza.

In effetti se \mathbf{F} , oltre che posizionale, è di **tipo gradiente** con funzione potenziale \mathcal{U} : $\mathbf{F}(P) = \nabla\mathcal{U}(P)$, allora $U(\lambda)$ è proprio **la funzione potenziale calcolata sulla curva**:

$$(3.27) \quad U(\lambda_0, \lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \mathbf{F}(\Gamma(\eta)) \cdot \Gamma'(\eta) d\eta = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \nabla\mathcal{U}(\Gamma(\eta)) \cdot \Gamma'(\eta) d\eta = \mathcal{U}(\Gamma(\lambda)) - \mathcal{U}(\Gamma(\lambda_0)).$$

Dal punto di vista lagrangiano vale la pena di osservare che il potenziale della forza calcolato lungo la curva ha il ruolo di **potenziale** (nella sola variabile λ) per la **forza generalizzata**:

$$(3.28) \quad \mathbf{F}(P) = \nabla\mathcal{U}(P) \implies F_\theta^{(\lambda)}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\mathcal{U}(\Gamma(\lambda)) = U'(\lambda).$$

Punto libero soggetto a forza centrale : in tal caso era stato individuato l'integrale dell'energia

$$\frac{1}{2}m\dot{\varrho}^2 + V_e(\varrho) = \frac{1}{2}m\dot{\varrho}^2 + V(\varrho) + \frac{L_z^2}{2m\varrho^2} = E$$

solo nel caso in cui il modulo della forza non dipendesse dagli angoli: $\mathbf{F} = f(\varrho)\mathbf{e}_\varrho$ in modo di poter definire $V(\varrho)$. In effetti, questo è l'unico caso in cui la forza centrale è di tipo gradiente, in accordo con la seguente

Proposizione 3.3 *Dato il campo di forze centrale $(P, \mathbf{F}(P))$, con*

$$\mathbf{F}(P) = f(P)\mathbf{e}_\varrho, \quad \mathbf{e}_\varrho = (P - O)/|P - O|,$$

esiste un campo scalare $\mathcal{U}(P)$ tale che $\nabla\mathcal{U}(P) = \mathbf{F}(P)$ se e solo se $f(P) = f(|P - O|)$ e la scrittura $\bar{U}(\varrho, \varphi, \vartheta)$ del potenziale U in coordinate polari è

$$(3.29) \quad \bar{U} = \bar{U}(\varrho) = \int_{\hat{\varrho}}^{\varrho} f(\eta)d\eta,$$

essendo $\hat{\varrho} > 0$ una costante arbitraria.

Dim.

Va ricordata la scrittura del gradiente in coordinate sferiche (3.12):

$$\nabla \mathcal{U} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varrho} \mathbf{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \cos \vartheta \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta.$$

Se \mathbf{F} è una forza centrale, si ha $\mathbf{F} = \bar{f}(\varrho, \varphi, \vartheta) \mathbf{e}_\varrho$ ed è di tipo gradiente se e solo se esiste $\bar{U}(\varrho, \varphi, \vartheta)$ per cui

$$\bar{f}(\varrho, \varphi, \vartheta) = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varrho}, \quad 0 = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \vartheta}.$$

Dalle ultime due condizioni si deduce che \bar{U} deve dipendere solo da ϱ , dalla prima condizione si ricava la (3.29). \square

4 Studio del moto su una superficie

4.1 Lagrangiana, integrale dell'energia, variabile ciclica

Per il moto che andremo ad esaminare del punto su una superficie vale la proprietà analoga a (3.28), ovvero

Proposizione 4.1 *Se il punto materiale P vincolato sulla superficie $\Theta(u, v)$ è soggetto ad una forza di tipo gradiente: $\mathbf{F}(P) = \nabla\mathcal{U}(P)$, allora, definita*

$$(4.1) \quad U(u, v) = \mathcal{U}(\Theta(u, v))$$

ovvero la funzione potenziale calcolata sulla superficie, si ha

$$(4.2) \quad \mathbf{F} \cdot \Theta_u = \frac{\partial U}{\partial u}, \quad \mathbf{F} \cdot \Theta_v = \frac{\partial U}{\partial v}$$

$$(4.3) \quad \frac{d}{dt}U(u(t), v(t)) = \mathbf{F} \cdot \dot{P} = W_F.$$

Dim. La derivata $\frac{\partial U}{\partial u}$ è la derivata della funzione \mathcal{U} lungo la linea coordinata Γ_1 definita in (1.3): la prima delle (4.2) è dunque la scrittura di (3.6), tenendo conto anche di (1.4); analogamente la seconda di (4.2). Per la (4.3):

$$\frac{d}{dt}U(u(t), v(t)) = \frac{\partial U}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial U}{\partial v}\dot{v} = \mathbf{F} \cdot \Theta_u\dot{u} + \mathbf{F} \cdot \Theta_v\dot{v} = \mathbf{F} \cdot \dot{P}(t).$$

□

La (4.2) indica che la funzione $U(u, v)$ fa da potenziale per le **componenti lagrangiane** (2.8) della forza \mathbf{F} :

$$(4.4) \quad \mathbf{F}_\theta^{(u,v)} = (\mathbf{F} \cdot \Theta_u, \mathbf{F} \cdot \Theta_v) = \left(\frac{\partial U}{\partial u}, \frac{\partial U}{\partial v} \right).$$

La notevole conseguenza è che per il moto su una **superficie liscia** di un punto soggetto a **forze di tipo gradiente** con potenziale $U(u, v)$ si può introdurre la **funzione lagrangiana**

$$(4.5) \quad \mathcal{L}(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = T(u, v, \dot{u}, \dot{v}) + U(u, v)$$

e scrivere le equazioni di moto (2.7) nella forma

$$(4.6) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Nelle applicazioni, dunque, in presenza di forze di tipo gradiente conviene senz'altro scrivere la funzione \mathcal{L} e calcolare le (4.6).

La (4.3) permette di scrivere la (3.25), nel caso di vincoli lisci, come $\frac{d}{dT}(T - U) = 0$, da cui si ricava l'**integrale dell'energia**, valido per il moto di un punto su una **superficie liscia** e soggetto a **forze di tipo gradiente**:

$$(4.7) \quad T(u, v, \dot{u}, \dot{v}) + V(u, v) \equiv E$$

dove $V = -U$ ed E è un valore costante che viene determinato dalle condizioni iniziali (2.18):

$$E = T(u_0, v_0, \dot{u}_0, \dot{v}_0) + V(u_0, v_0).$$

Nel caso unidimensionale l'integrale primo dell'energia $E = T + V$ permette di descrivere completamente le caratteristiche del moto, coerentemente al fatto che il sistema possiede un unico grado di libertà. Nel caso

del moto del punto su una superficie il solo integrale primo (4.7) non permette le medesime conclusioni e dà solo un'informazione parziale sul moto.

E' chiaro che una seconda informazione del tipo $\mathcal{I}(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = 0$, ovvero la possibilità di individuare un secondo integrale primo del moto oltre a quello dell'energia induce a sostituire le equazioni di moto (4.6) con i due integrali primi (4.7), $\mathcal{I} = 0$.

Può essere la particolare struttura della funzione lagrangiana \mathcal{L} a suggerire la presenza di un integrale primo: un caso immediato è l'**assenza della variabile** u [risp. v], ovvero $\mathcal{L} = \mathcal{L}(v, \dot{u}, \dot{v})$ [risp. $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, \dot{u}, \dot{v})$]. Da (4.6) si ha

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \right) = 0 \quad [\text{risp.} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \right) = 0],$$

dunque la funzione $p_1(v, \dot{u}, \dot{v}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}$ [risp. $p_2(u, \dot{u}, \dot{v}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}}$] è **costante** durante il moto, ovvero è un **integrale primo del moto** e il suo valore è stabilito dalle condizioni iniziali:

$$(4.8) \quad p_1(v, \dot{u}, \dot{v}) = p_1(v(0), \dot{u}(0), \dot{v}(0)) \quad [\text{risp.} \quad p_2(u, \dot{u}, \dot{v}) = p_2(u(0), \dot{u}(0), \dot{v}(0))].$$

La variabile u [risp. v] viene detta **variabile ciclica**.

Un caso in cui si presenta una variabile ciclica riguarda il moto su una **superficie di rotazione**, dovuto ad una forza con particolare struttura.

4.2 Equilibrio

La ricerca delle **posizioni di equilibrio** consiste nel determinare le soluzioni costanti $u \equiv u_0$, $v \equiv v_0$ di (2.16):

$$(4.9) \quad \mathbf{F} \cdot \Theta_u = 0, \quad \mathbf{F} \cdot \Theta_v = 0.$$

Per la (4.2), nel caso di forze di tipo gradiente la condizione equivale alla ricerca dei punti stazionari di U :

$$(4.10) \quad \frac{\partial U}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial v} = 0.$$

L'esame della **stabilità** di una posizione di equilibrio di un punto su una superficie ripercorre quanto visto per il punto vincolato su una curva, tenendo presente che lo spazio delle fasi è lo spazio delle variabili (u, v, \dot{u}, \dot{v}) :

Definizione di equilibrio stabile. Una posizione di equilibrio $(u_0, v_0, 0, 0)$ si dice stabile se $\forall \epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|(u(0) - u_0, v(0) - v_0)| < \delta, \quad |(\dot{u}(0), \dot{v}(0))| < \delta \quad \implies$$

$$|(u(t) - u_0, v(t) - v_0)| < \epsilon, \quad |(\dot{u}(t), \dot{v}(t))| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

dove $||$ è la norma euclidea (le soluzioni $(u(t), v(t))$ con stato cinematico iniziale prossimo all'equilibrio rimangono in ogni istante con stato cinematico prossimo all'equilibrio).

Criterio di Dirichlet. Se le forze sono di tipo gradiente e (u_0, v_0) , soluzione di (4.10), è un **minimo isolato** per $V(u, v) = -U(u, v)$, allora la posizione di equilibrio è **stabile**.

La dimostrazione è la medesima del caso unidimensionale: la funzione $\Lambda(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = T(u, v, \dot{u}, \dot{v}) - (V(u, v) - V(u_0, v_0))$, che ha un minimo isolato all'equilibrio e che è costante lungo le soluzioni di (2.16), è **funzione di Liapunov** per la stabilità dell'equilibrio.

Punti stazionari che non sono minimi. Analogamente al caso del punto sulla curva, se $V(u, v)$ è una **funzione analitica**, allora le posizioni di equilibrio stabili sono necessariamente minimi isolati: dunque, le soluzioni di (4.10) non corrispondenti a minimi isolati sono posizioni di equilibrio **instabile**.

Più avanti studieremo la possibilità di approssimare il moto mediante lo sviluppo di Taylor attorno ad una posizione di equilibrio stabile (piccole oscillazioni).

4.3 Esempio di studio di moto su una superficie

Fissato un sistema cartesiano $\{O, \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle\}$, consideriamo la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva

$$\Gamma(u) = f(u)\mathbf{i} + u\mathbf{j}, \quad u \in \mathbb{R}$$

dove $f(u)$ è una funzione positiva almeno $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ non decrescente per ogni $u \in \mathbb{R}$: $f'(u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$.

Parametrizzazione della superficie, I forma fondamentale. Dalla (1.29) si ha

$$\begin{cases} x(u, v) = f(u) \cos v \\ y(u, v) = f(u) \sin v \\ z(u, v) = u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R}$$

dove il parametro v va esteso a tutto \mathbb{R} per descrivere le eventuali rotazioni del punto sulla superficie.

I vettori (1.4) sono $\Theta_u = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, 1)$, $\Theta_v = f(u)(-\sin v, \cos v, 0)$, dunque i coefficienti (1.31) sono

$$E(u, v) = 1 + f'^2(u), \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = f^2(u).$$

Sia P un punto di massa m vincolato in modo liscio sulla superficie, soggetto alla forza peso, essendo \mathbf{k} la direzione verticale ascendente.

Energia cinetica, energia potenziale. La (2.5) si scrive

$$T(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \frac{1}{2}m\dot{P}^2(t) = \frac{m}{2} \left[(1 + f'^2(u)) \dot{u}^2 + f^2(u) \dot{v}^2 \right].$$

La forza peso $-mg\mathbf{k}$ è di tipo gradiente con potenziale $\mathcal{U}(x, y, z) = -mgz$, funzione che va calcolata sulla superficie:

$$U(u, v) = -mgu,$$

dipendente in realtà solo da u .

Un'altra situazione ricorrente negli esercizi è la **forza elastica** $-k(P - O)$, con potenziale $\mathcal{U}_{el} = -k/2(x^2 + y^2 + z^2)$: sulla superficie avremmo scritto $\mathcal{U}_{el}(u, v) = -k/2(u^2 + f^2(u))$, funzione anche in questo caso indipendente da v .

Scrittura della Lagrangiana.

$$\mathcal{L}(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = T + U = \frac{m}{2} \left[(1 + f'^2(u)) \dot{u}^2 + f^2(u) \dot{v}^2 \right] - mgu.$$

Determinazione di 2 integrali primi del moto. Siamo nelle condizioni di validità di (4.7), dunque

$$T - U = T + V = \frac{m}{2} \left[(1 + f'^2(u)) \dot{u}^2 + f^2(u) \dot{v}^2 \right] + mgu = E = \text{costante}.$$

Inoltre, la variabile v è ciclica, pertanto

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} = mf^2(u)\dot{v} = \text{costante}.$$

Posizioni di equilibrio. La (4.10) consiste in

$$\frac{\partial U}{\partial u} = -mg = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial v} = 0$$

che è priva di soluzioni, come si intuisce fisicamente. In generale, si osservi che se U dipende solo dalla variabile u , allora le posizioni di equilibrio sono tutti i punti dei **paralleli** $u = \bar{u}$, dove \bar{u} risolve $\frac{\partial U}{\partial u}(u) = 0$ [l'equazione di (4.10) è infatti identicamente soddisfatta].

Per esercizio, si consideri più in generale la superficie di rotazione (1.29): si scriva il potenziale U della forza peso e si determinino le posizioni di equilibrio, comprendendo graficamente e fisicamente la situazione.

Velocità possibili. Vengono assegnate la posizione iniziale $P(0) - O = f(0)\mathbf{i}$ e la velocità iniziale $\dot{P}(0) = \mathbf{v}_0 = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$.

Si vuole determinare l'insieme delle velocità possibili all'istante iniziale, ovvero i valori di α , β e γ che rendono \mathbf{v}_0 una velocità compatibile con il vincolo in P_0 . Va scritta la (2.4) al tempo iniziale $t = 0$, tenendo conto che la posizione iniziale corrisponde ai valori dei parametri $u(0) = 0$, $v(0) = 0$:

$$\begin{aligned}\dot{P}(t) &= \Theta_u(u(0), v(0)) \dot{u}(0) + \Theta_v(u(0), v(0)) \dot{v}(0) = \\ \dot{u}(0)(f'(0)\mathbf{i} + \mathbf{k}) + \dot{v}(0)f(0)\mathbf{j} &= f'(0)\dot{u}(0)\mathbf{i} + f(0)\dot{v}(0)\mathbf{j} + \dot{u}(0)\mathbf{k}\end{aligned}$$

che descrive al variare di $\dot{u}(0) \in \mathbb{R}$, $\dot{v}(0) \in \mathbb{R}$ le combinazioni lineari della base $\langle f'(0)\mathbf{i} + \mathbf{k}, f(0)\mathbf{j} \rangle$, ovvero il piano tangente in P_0 . Dunque, rispetto ai parametri α , β e γ possiamo descrivere l'insieme delle **velocità possibili** in P_0 come l'insieme dei vettori applicati

$$(P_0, f'(0)\gamma\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}), \quad \beta = f(0)\dot{v}(0), \quad \gamma = \dot{u}(0).$$

Si osservi geometricamente il ruolo di γ come contributo alla velocità lungo la direzione del **meridiano** Θ_v , sul piano verticale $y = 0$, e di β come contributo lungo la direzione del **parallelo** Θ_u , sul piano orizzontale $z = 0$.

Calcolo delle costanti del moto in funzione delle condizioni iniziali. Si vuole esprimere, in vista di una discussione parametrica del comportamento delle soluzioni, le due costanti del moto in funzione dei dati iniziali. Si ha

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} \left[\left(1 + f'^2(0)\right) \gamma^2 + \beta^2 \right], \quad p_1 = mf(0)\beta.$$

Dunque, su ciascun moto sulla superficie rimangono costanti le quantità calcolate tramite i dati iniziali

$$(4.11) \quad \frac{m}{2} \left[\left(1 + f'^2(u)\right) \dot{u}^2 + f^2(u)\dot{v}^2 \right] + mgu = \frac{m}{2} \left[\left(1 + f'^2(0)\right) \gamma^2 + \beta^2 \right],$$

$$(4.12) \quad mf^2(u)\dot{v} = mf^2(0)\dot{v}(0) = mf(0)\beta.$$

Studio qualitativo mediante gli integrali primi. La particolare struttura del problema (superficie di rotazione, potenziale indipendente da v) permette di ricondurre lo studio qualitativo del moto ad uno studio unidimensionale: ricavando infatti \dot{v} da (4.12) e sostituendo nella (4.11) si trova

$$\dot{v} = \frac{f(0)\beta}{f^2(u)} \implies \frac{m}{2} \left[\left(1 + f'^2(u)\right) \dot{u}^2 + \frac{f^2(0)\beta^2}{f^2(u)} \right] + mgu = \frac{m}{2} \left[\left(1 + f'^2(0)\right) \gamma^2 + \beta^2 \right],$$

dunque il moto nella variabile u viene descritto dall'equazione di tipo **unidimensionale**

$$(4.13) \quad \frac{m}{2} \left(1 + f'^2(u)\right) \dot{u}^2 + \hat{V}(u) = \frac{1}{2}m \left[\left(1 + f'^2(0)\right) \gamma^2 + \beta^2 \right], \quad \hat{V}(u) = \frac{m}{2} \frac{f^2(0)\beta^2}{f^2(u)} + mgu$$

in cui si è modificato, rispetto a (4.11), il ruolo dell'energia potenziale, esattamente come per l'energia potenziale efficace del moto centrale.

Questo passaggio deve essere tenuto presente in ogni esercizio che riguarda lo studio del moto sulla superficie: in generale, se (1.29) è la parametrizzazione della superficie e se $V(u)$ è l'energia potenziale, la scrittura analoga a (4.11), (4.12) e (4.13) consiste in

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{2} \left[\left(h'^2(u) + f'^2(u)\right) \dot{u}^2 + f^2(u)\dot{v}^2 \right] + V(u) &= \mathcal{E}, \\ mf^2(u)\dot{v} = mf^2(0)\dot{v}(0) \implies \dot{v} &= f^2(0)\dot{v}(0)/f^2(u) \end{aligned} \right\} \implies \frac{m}{2} \left(h'^2(u) + f'^2(u) \right) \dot{u}^2 + \hat{V}(u) = \mathcal{E},$$

con $\hat{V}(u) = V(u) + \frac{m}{2} \frac{f^4(0)\dot{v}^2(0)}{f^2(u)}$ e $\mathcal{E} = \mathcal{E}(u(0), \dot{u}(0), \dot{v}(0))$.

Esaminiamo ora il carattere del moto al variare della velocità iniziale, ovvero al variare di β e γ . E' chiaro che uno studio completo del moto richiede la specificazione del profilo $f(u)$: diamo qui di seguito alcune indicazioni di massima per una f genericamente positiva e non decrescente.

$\gamma > 0$:

Caso $\beta = 0$. La velocità iniziale è diretta lungo il meridiano $v = 0$ passante da P_0 . La (4.12), che assume la forma $\dot{v}(t) = 0$, implica, insieme alla condizione iniziale $v(0) = 0$, che il punto rimane sul meridiano in ogni istante successivo: $v(t) = 0, \forall t \geq 0$. Inoltre $\hat{V}(u) = mgu$, il cui grafico è una retta passante dall'origine. Valutando le intersezioni di \hat{V} con i livelli $\mathcal{E} = m(1 + f'^2(0))/2$, si trova subito il seguente schema:

$\gamma > 0$: il punto sale fino alla quota $u_{max} = (1 + f'^2(0))\gamma^2/2g$ per poi cadere verso il basso lungo il meridiano;

$\gamma \leq 0$: il punto viene lanciato verso il basso sul meridiano, lungo il quale precipita senza invertire mai il moto ($\gamma = 0$: caduta libera).

Caso $\beta \neq 0, \gamma = 0$. La velocità iniziale è lungo il parallelo $u = 0$: $\dot{P}(0) = \beta\mathbf{j}$. La (4.12) afferma che, rispetto alla coordinata angolare v , il moto è di **rotazione** attorno all'asse delle z , antioraria [risp. oraria] se $\beta > 0$ [risp. $\beta < 0$], con velocità angolare $\dot{v}(t)$ tanto maggiore in valore assoluto quanto più il punto si avvicina all'asse z , senza possibilità di invertire il verso da orario ad antiorario, o viceversa.

Per quanto riguarda il moto rispetto alla variabile u , si tratta di studiare la funzione $\hat{V}(u) = \frac{m}{2} \frac{f^2(0)}{f^2(u)} + mgu$ intersecata dai livelli di energia $\mathcal{E} = \frac{m}{2}\beta^2$, a partire dalla posizione $u = 0$.

Chiamiamo u_{min} e u_{max} i due paralleli fra i quali è compreso il moto:

$$-\infty \leq u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \leq +\infty.$$

Si ha $\lim_{u \rightarrow +\infty} \hat{V}(u) = +\infty$, dunque il moto del punto sarà comunque limitato verso l'alto, ovvero $0 \leq u_{max} < +\infty$.

Il limite a $-\infty$ non è invece determinabile *a priori*:

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \hat{V}(u) = \begin{cases} = -\infty & \text{se } f^- > 0, \\ \text{del tipo } " \infty - \infty " & \text{se } f^- = 0 \end{cases}$$

dove $f^- = \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u)$.

Analizziamo il comportamento di \hat{V} per $u = 0$: si ha $\hat{V}(0) = \frac{m}{2}\beta^2 = \mathcal{E}$, $V'(0) = m(g - \beta^2 f'(0)/f(0))$, dunque:

se $g < \beta^2 f'(0)/f(0)$, allora il moto del punto è compreso fra i due paralleli $u = 0 = u_{min}$ e $u_{max} > 0$, quest'ultimo soluzione di $\hat{V}(u) = \mathcal{E}$;

se $g > \beta^2 f'(0)/f(0)$, allora il punto P procede verso il basso, invertendo o no il moto a seconda dell'esistenza di una soluzione negativa u_{min} di $\hat{V}(u) = \mathcal{E}$, tale che $\hat{V}(u) < \mathcal{E}$ per $u_{min} < u < 0$: in tal caso, il moto di P è compreso fra i paralleli u_{min} e $u_{max} = 0$; se non esistono soluzioni negative, u_{min} , allora il moto è di caduta sulla superficie, in rotazione attorno all'asse z .

Fisicamente, la condizione $\hat{V}'(0) < 0$ [risp. $\hat{V}'(0) > 0$] corrisponde ad una velocità angolare iniziale intensa [risp. debole], in modo da far risalire il punto lungo le pareti della superficie [risp. tale da far precipitare il punto]. A parità di β , un analogo commento si può eseguire sulla geometria della superficie, ovvero su $f'(0)$.

Si analizzi per esercizio il caso $\hat{V}(0) = 0$.

Caso $\beta \neq 0, \gamma = 0$. Si sovrappongono i due aspetti esaminati ($\beta = 0$ oppure $\gamma = 0$) e prevede uno studio (decisamente facilitato se si assegna esplicitamente il profilo della superficie $f(u)$) della funzione $\hat{V}(u)$ e dei livelli di energia \mathcal{E} . L'informazione proveniente dall'integrale primo (4.12) di rotazione attorno all'asse z rimane invariata.

Lo studio del moto del punto su una superficie di rotazione ha come traccia fondamentale la possibilità di **disaccoppiare** le equazioni di moto, ovvero di rendere indipendente la risoluzione rispetto ad u e quella rispetto a v , in virtù della individuazione di due **integrali primi del moto**: il procedimento è consueto in *meccanica analitica*, dove anziché risolvere direttamente le equazioni di moto, si cercano tanti integrali primi quanti sono i gradi di libertà del sistema.

5 Altri aspetti del moto sulla superficie

5.1 Lagrangiana approssimata

Consideriamo un moto di Lagrangiana (4.5) ed una posizione di **equilibrio stabile** $u = u_0, v = v_0$, ovvero un minimo isolato per $V = -U$: il fatto che le soluzioni con stato cinematico iniziale vicino all'equilibrio mantengano lo stato prossimo all'equilibrio anche per i tempi successivi fa presumere che l'approssimazione al secondo ordine della Lagrangiana e le corrispondenti equazioni approssimate del moto conducano ad una buona approssimazione del moto; il fatto è del tutto analogo a quanto si è visto per il moto del punto sulla curva.

Eseguito lo sviluppo di Taylor della Lagrangiana (4.5) allo stato di equilibrio $(u_0, v_0, 0, 0)$ fino al secondo ordine si ottiene

$$(5.1) \quad \mathcal{L}_2(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} \bar{A} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u - u_0 & v - v_0 \end{pmatrix} \bar{V} \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{m}{2} (E(u_0, v_0)\dot{u}^2 + 2F(u_0, v_0)\dot{u}\dot{v} + G(u_0, v_0)\dot{v}^2) -$$

$$\frac{1}{2} (V_{uu}(u_0, v_0)(u - u_0)^2 + V_{uv}(u_0, v_0)(u - u_0)(v - v_0) + V_{vv}(u_0, v_0)(v - v_0)^2)$$

avendo chiamato \bar{A} e \bar{V} le matrici ad elementi costanti

$$(5.2) \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} mE(u_0, v_0) & mF(u_0, v_0) \\ mF(u_0, v_0) & mG(u_0, v_0) \end{pmatrix}, \quad \bar{V} = \begin{pmatrix} V_{uu}(u_0, v_0) & V_{uv}(u_0, v_0) \\ V_{uv}(u_0, v_0) & V_{vv}(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

Per ottenere (5.1) si tenga conto che:

- ▷ la formula di Taylor al secondo ordine è

$$(5.3) \quad f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T (Hess f)(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + R$$

dove $\mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, ∇f è il gradiente $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)$, $(Hess f)$ è la matrice Hessiana di elementi $(Hess f)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, N$ e R è infinitesimo di ordine superiore a $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2$,

- ▷ lo sviluppo viene applicato ponendo $\mathbf{x} = (u, v, \dot{u}, \dot{v})$, $f = \mathcal{L}$ e $\mathbf{x}_0 = (u_0, v_0, 0, 0)$,
- ▷ per T si utilizza l'espressione (2.5) e per V , senza perdere in generalità, si pone $V(u_0, v_0) = 0$,
- ▷ all'equilibrio $\nabla_{(u,v,\dot{u},\dot{v})} \mathcal{L}(u_0, v_0, 0, 0) = 0$.

Per esercizio, si svolga esplicitamente il conto per ottenere (5.1) da (5.3).

Si osservi che \mathcal{L}_2 è un **polinomio omogeneo del secondo ordine** rispetto alle variabili (u, v, \dot{u}, \dot{v}) .

Le equazioni di moto (4.6) corrispondenti alla Lagrangiana \mathcal{L}_2 , che chiamiamo le **equazioni approssimate del moto**, sono

$$(5.4) \quad \begin{cases} mE(u_0, v_0)\ddot{u} + mF(u_0, v_0)\ddot{v} + V_{uu}(u_0, v_0)(u - u_0) + V_{uv}(u_0, v_0)(v - v_0) = 0 \\ mF(u_0, v_0)\ddot{u} + mG(u_0, v_0)\ddot{v} + V_{uv}(u_0, v_0)(u - u_0) + V_{vv}(u_0, v_0)(v - v_0) = 0 \end{cases}$$

oppure, in forma matriciale:

$$(5.5) \quad \bar{A} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} + \bar{V} \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se (u_0, v_0) una posizione di **equilibrio stabile**, è verosimile che le (5.5) diano una buona approssimazione del moto.

5.2 Piccole oscillazioni

Dal punto di vista formale, l'obiettivo che ci proponiamo è quello di scrivere il sistema (5.5) come sistema di due equazioni di moto armonico **disaccoppiate**. Va dunque determinato un cambiamento di variabili (non necessariamente ortogonale) da (u, v) a (ξ, η) che realizzi questo proposito. Ricordiamo alcune premesse teoriche.

Base ortonormale. Se \mathbf{V} uno spazio vettoriale su \mathbb{R} e f una forma bilineare simmetrica definita positiva su \mathbf{V} , allora \mathbf{V} ammette una base ortonormale.

Teorema spettrale reale. Sia \mathbf{V} è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} in cui è definita una forma bilineare f simmetrica e definita positiva e sia φ un **endomorfismo simmetrico**:

$$f(\varphi(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}, \varphi(\mathbf{w})) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}.$$

Allora esiste una base ortonormale \mathcal{U} per \mathbf{V} costituita da autovettori di φ :

$$\mathcal{U} = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N \rangle, \quad f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \delta_{i,j}, \quad \varphi(\mathbf{u}_i) = \lambda_i \mathbf{u}_i \quad i = 1, \dots, N, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Corollario (D). Se A è una matrice reale simmetrica di ordine N , esiste una matrice ortogonale U tale che $UAU^T = UAU^{-1} = D$, D matrice diagonale.

Dim. Sia \mathbb{R}^N lo spazio vettoriale delle N -uple di numeri reali, con la base canonica $\mathcal{E} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N \rangle$, dove \mathbf{e}_k è la N -upla di tutti zero, eccetto la k -esima posizione di valore 1. La base è ortonormale rispetto alla forma bilineare simmetrica data dal prodotto scalare standard $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, N$.

Sia $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ l'endomorfismo la cui matrice rispetto alla base \mathcal{E} è M . L'endomorfismo è simmetrico, dunque per il Teorema spettrale esiste una base ortonormale $\mathcal{U} = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N \rangle$ di \mathbb{R}^N di autovettori di φ . La matrice di φ rispetto a \mathcal{U} è la matrice diagonale D i cui elementi sulla diagonale sono gli autovalori di φ .

Se B è la matrice del cambiamento di base da \mathcal{E} a \mathcal{U} , ovvero la matrice di elementi $\beta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, N$ tali che $\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^N \beta_{i,j} \mathbf{e}_j$, si ha che D e M , matrici di φ rispettivamente rispetto a \mathcal{U} e \mathcal{E} , sono simili secondo la relazione $BMB^{-1} = D$.

Dalle relazioni di ortonormalità $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, N$ si ricava $B^T = B^{-1}$. \square

Autovalori e autovettori. Gli autovalori di A sono tutti reali. Le matrici A e D , essendo simili, hanno i medesimi autovalori; in particolare, se A è **definita positiva** [ovvero $\mathbf{y}^T A \mathbf{y} > 0$ per ogni $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$], allora gli elementi di D sono tutti positivi.

Inoltre, se $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_N)$, allora la k -esima riga della matrice U è l'**autovettore** corrispondente

a d_k , $k = 1, \dots, N$: infatti, indicando con $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^N$ la k -esima riga di U , ovvero $U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{pmatrix}$ si ha

$$UAU^T = D \iff AU^T = U^T D \iff A(\mathbf{u}_1^T \dots \mathbf{u}_N^T) = (\mathbf{u}_1^T \dots \mathbf{u}_N^T) \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & d_N \end{pmatrix}$$

La costruzione del cambiamento di coordinate con il quale il sistema (5.5) viene disaccoppiato avviene mediante i seguenti passaggi:

Diagonalizzazione di \bar{A} . Applichiamo il Corollario (D) alla matrice simmetrica \bar{A} definita in (5.2): esistono una matrice ortogonale B e una matrice diagonale D_1 tali che

$$B\bar{A}B^T = D_1 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad BB^T = I, \quad d_1 > 0, \quad d_2 > 0,$$

con I matrice identità 2×2 .

Normalizzazione. Al fine di ottenere come matrice diagonale la matrice identità I , si considera

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{d_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{d_2} \end{pmatrix} B$$

in modo che

$$(5.6) \quad B_1 \bar{A} B_1^T = I.$$

Prima trasformazione del sistema. Moltiplicando (5.5) a sinistra per B_1 e inserendo a destra di \bar{A} e di \bar{V} la matrice identità $I = B_1^T (B_1^T)^{-1}$, si ottiene il sistema equivalente

$$(5.7) \quad \begin{pmatrix} \ddot{\bar{u}} \\ \ddot{\bar{v}} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove si è posto

$$(5.8) \quad C = B_1 \bar{V} B_1^T, \quad \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = (B_1^T)^{-1} \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{d_2} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizzazione di \bar{V} . Aggiungiamo ora l'ipotesi che \bar{V} sia **definita positiva** in (u_0, v_0) : questa ipotesi è sufficiente affinché la posizione di equilibrio sia stabile, ma non necessaria, come già abbiamo avuto modo di osservare nel caso unidimensionale.

La matrice C è ancora simmetrica e definita positiva (verificare per esercizio): applicando nuovamente il Corollario (D) si può determinare una matrice ortogonale B_2 tale che

$$(5.9) \quad B_2 C B_2^{-1} = B_2 C B_2^T = D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mu_1 > 0, \mu_2 > 0.$$

Seconda trasformazione del sistema. Il sistema (5.7) si trasforma in

$$(5.10) \quad \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} + D_2 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove si è posto

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = B_2 \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}.$$

Cambiamento complessivo di variabili. Il cambiamento di coordinate dalle (u, v) alle (ξ, η) è $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} =$

$W \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}$ dove W è la matrice

$$(5.11) \quad W = B_2 \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{d_2} \end{pmatrix} B = B_2 B_1^{-T} = B_2 B_1 \bar{A}.$$

Si osservino le proprietà di W :

$$(5.12) \quad W^T = \bar{A} (B_2 B_1)^T, \quad W^{-1} = (B_2 B_1)^T, \quad W W^T = \bar{A}.$$

Risultato principale. Il sistema (5.5) con \bar{A} e \bar{V} simmetriche e definite positive può essere disaccoppiato mediante la trasformazione di coordinate (5.11) in 2 **oscillazioni armoniche**

$$(5.13) \quad \begin{cases} \ddot{\xi} + \mu_1 \xi = 0, \\ \ddot{\eta} + \mu_2 \eta = 0. \end{cases}$$

di **frequenze**

$$(5.14) \quad \nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\mu_1}, \quad \nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\mu_2}.$$

I numeri positivi ν_1 e ν_2 vengono dette **frequenze proprie** e le oscillazioni soluzioni di (5.13) i **modi normali** del sistema (5.5).

5.3 Calcolo delle frequenze proprie

Al fine di determinare frequenze proprie e modi normali in modo più diretto, possiamo tenere presente il seguente percorso:

Ricerca delle frequenze proprie. I numeri μ_1 e μ_2 sono soluzioni dell'equazione

$$(5.15) \quad \det(\mu\bar{A} - \bar{V}) = 0.$$

Dim. Basta tenere presente che μ_1 e μ_2 sono autovalori della matrice C e ricordare le (5.6), (5.8):

$$(5.16) \quad \begin{aligned} 0 &= \det(\mu I - C) = \det(\mu B_1 \bar{A} B_1^T - C) = \det[B_1 B_1^{-1}(\mu B_1 \bar{A} B_1^T - C) B_1^{-T} B_1^T] = \\ &= (\det B_1)^2 \det(\mu \bar{A} - B_1^{-1} C B_1^{-T}) = (\det B_1)^2 \det(\mu \bar{A} - \bar{V}) \end{aligned}$$

e la (5.15) è dimostrata. \square .

Ricerca dei modi normali. Siano $(\zeta_{11}, \zeta_{12}), (\zeta_{21}, \zeta_{22})$ tali che

$$(5.17) \quad (\mu_i \bar{A} - \bar{V}) \begin{pmatrix} \zeta_{1i} \\ \zeta_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2$$

e scelti in norma in modo che

$$(5.18) \quad Z \bar{A} Z^T = I,$$

dove

$$(5.19) \quad Z = \begin{pmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} \end{pmatrix}.$$

Allora la matrice W di (5.11) è

$$(5.20) \quad W = Z^{-1} = Z^T \bar{A}.$$

Dim. La (5.9), in virtù della (5.12), equivale a

$$B_2 C B_2^T = B_2 (B_1 B_1^{-1}) C (B_1^{-T} B_1^T) B_2^T = B_2 B_1 \bar{V} B_1^T B_2^T = W \bar{A}^{-1} \bar{V} W^{-1} = D_2.$$

D'altra parte, la ricerca di W tale che

$$W \bar{A}^{-1} \bar{V} W^{-1} = D_2, \quad W W^T = \bar{A}$$

equivale alla ricerca di $Z = W^{-1}$ tale che

$$\bar{A} Z D_2 = \bar{V} Z, \quad Z \bar{A} Z^T = I.$$

\square .

Nelle applicazioni, dunque, una volta calcolate le matrici costanti \bar{A} e \bar{V} , si determinano subito gli **autovalori generalizzati** soluzioni di (5.15) e le frequenze proprie (5.14) del sistema (5.13). Se si vuole determinare anche il cambiamento di variabili (5.11) che porta ai modi normali, si calcolano gli **autovettori generalizzati** secondo la (5.17) e normalizzati come in (5.18). Il prodotto di matrici (5.20) dà luogo al cambiamento di variabili richiesto.

Esercizio 5.1 *Esaminare il caso più semplice in cui \bar{A} oppure \bar{V} è una matrice già diagonale.*

Esercizio 5.2 *Analizzare i casi dei due autovalori μ_1, μ_2 distinti, i due autovalori coincidenti.*

5.4 Curve geodetiche

Data una superficie $\Theta(u, v)$, il vettore

$$(5.21) \quad \mathbf{N}(u, v) = \Theta_u(u, v) \wedge \Theta_v(u, v)$$

individua, in ogni punto regolare, la **direzione normale alla superficie**, come direzione ortogonale a tutti i vettori del piano tangente (1.6).

Consideriamo ora una curva sulla superficie, parametrizzata da (vedi (1.12)) $\Gamma(\lambda) = \Theta(u(\lambda), v(\lambda))$, $\lambda \in I$. Chiamiamo **curva geodetica** della superficie una curva il cui vettore derivata seconda $\Gamma''(\lambda)$ ha la direzione normale (5.21):

$$(5.22) \quad \Gamma''(\lambda) // \mathbf{N}(u(\lambda), v(\lambda)) \quad \forall \lambda \in I.$$

Dalla definizione segue subito che il vettore derivata seconda è ortogonale al vettore tangente:

$$(5.23) \quad \Gamma'(\lambda) \cdot \Gamma''(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in I.$$

Infatti, Γ' è comunque ortogonale a \mathbf{N} . Vediamo alcune notevoli conseguenze di (5.23):

1. $\Gamma''(\lambda)$ ha la **direzione normale alla curva** $\Gamma'_s(s)$, essendo s l'ascissa curvilinea [basta ricordare la relazione fra $\Gamma''(\lambda)$ e $\Gamma'_s(s)$],
2. il vettore $\Gamma'(\lambda)$ ha **modulo costante**: $|\Gamma'(\lambda)| = c$ [basta ricordare la formula $(|\Gamma'(\lambda)|^2)' = \Gamma'(\lambda) \cdot \Gamma''(\lambda)$],
3. ascissa curvilinea e parametro λ sono legati linearmente: $s(\lambda) = c(\lambda - \lambda_0)$, con $\lambda_0 \in I$ valore di riferimento per il calcolo della lunghezza [basta ricordare la definizione di $s(\lambda)$].

Le precedenti considerazioni portano alla seguente definizione alternativa a (5.22): possiamo chiamare **geodetica** una curva sulla superficie per cui le **direzioni normali** \mathbf{N} e $\Gamma'_s(s)$ alla superficie ed alla curva, rispettivamente, sono le medesime:

$$(5.24) \quad \Gamma'_s(s) // \mathbf{N}(u_s(s), v_s(s)) \quad \forall s \in I_s,$$

essendo $\Gamma_s(s) = \Theta(u_s(s), v_s(s))$ la parametrizzazione della curva mediante l'ascissa curvilinea. Infatti, (5.24) \Rightarrow (5.22) poichè s è una fra le parametrizzazioni, mentre il viceversa è il punto 1 delle precedenti considerazioni.

Una retta (o una parte di essa) contenuta in una superficie (come ad esempio una generatrice di un cono o di un cilindro) verifica la (5.24), dato che $\Gamma'_s(s)$ è identicamente nullo: le **rette**, o parti di esse, eventualmente contenute su una superficie sono dunque **geodetiche**.

La lettura geometrica di (5.24), in ogni punto in cui è non nullo il vettore curvatura $\Gamma''_s(s) = \mathcal{K}\mathbf{n}$, consiste nella coincidenza delle direzioni normali alla curva ed alla superficie. In generale, la normale alla curva \mathbf{n} in un punto non ha la medesima direzione della normale alla superficie \mathbf{N} nel medesimo punto: basti pensare alla superficie sferica e ad una circonferenza ottenuta intersecando la sfera con un piano che non passa per il centro della sfera; la normale della curva \mathbf{n} è contenuta nel piano, mentre la direzione \mathbf{N} normale alla sfera è quella radiale.

Geometricamente, si ha anche la seguente proprietà delle geodetiche, la cui dimostrazione è un buon esercizio.

Geodetiche e binormale : La curva Γ è una geodetica della superficie se e solo se la direzione binormale è in ogni punto della curva ortogonale alla direzione normale alla superficie: $\mathbf{b} \cdot \mathbf{N} = 0$, ovvero

$$\Gamma'(\lambda) \wedge \Gamma''(\lambda) \cdot \Theta_u(u(\lambda), v(\lambda)) \wedge \Theta_v(u(\lambda), v(\lambda)) = 0 \quad \forall \lambda \in I$$

E' da osservare il carattere intrinseco della precedente proprietà: qualunque parametrizzazione λ fa individuare in $\Gamma' \wedge \Gamma''$ la direzione binormale.

5.5 Equazioni delle geodetiche

In ogni punto regolare della superficie, in cui (5.21) è un vettore non nullo, la definizione (5.22) equivale a

$$(5.25) \quad \begin{cases} \Gamma''(\lambda) \cdot \Theta_u(u(\lambda), v(\lambda)) = 0, \\ \Gamma''(\lambda) \cdot \Theta_v(u(\lambda), v(\lambda)) = 0. \end{cases}$$

Le condizioni scritte sono indipendenti dal parametro λ : a tale proposito, si osservi che il parametro λ differisce da quello naturale solo per una costante additiva e una moltiplicativa e vale la proporzionalità

$$\Gamma'(\lambda) = c\Gamma'_s(s(\lambda)), \quad \Gamma''(\lambda) = c^2\Gamma''_s(s(\lambda)).$$

Calcolando la derivata seconda

$$(5.26) \quad \Gamma''(\lambda) = \Theta_{uu}(u'(\lambda))^2 + 2\Theta_{uv}u'(\lambda)v'(\lambda) + \Theta_{vv}(v'(\lambda))^2 + \Theta_u u''(\lambda) + \Theta_v v''(\lambda)$$

ed eseguendo i prodotti scalari in (5.25) ricordando le formule (2.14), si ottiene

$$(5.27) \quad \begin{cases} Eu'' + Fv'' + \frac{1}{2}E_u(u')^2 + E_v u'v' + \left(F_v - \frac{1}{2}G_u\right)(v')^2 = 0 \\ Fu'' + Gv'' + \left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right)(u')^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v(v')^2 = 0 \end{cases}$$

L'analogia con il primo membro delle equazioni (2.16) è evidente: se consideriamo il **moto spontaneo** sulla superficie, ovvero il moto che avviene in assenza di forze ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$), le equazioni (2.16) coincidono con le (5.27), in cui il parametro λ è il tempo. Si conclude che

Proprietà 5.1 *Le curve geodetiche sono le traiettorie che percorre un punto vincolato su una superficie liscia nel suo moto spontaneo, ovvero non sottoposto ad alcuna forza.*

Si osservi che

- (i) la (5.22) consiste nel richiedere che l'accelerazione $\ddot{P}(t)$ sia tutta lungo la normale alla superficie, senza componenti sul piano tangente,
- (ii) la geodetica viene percorsa con velocità in modulo costante: $|\dot{P}(t)| = c$,
- (iii) tempo e ascissa curvilinea sono proporzionali: $s = ct$, ponendo $t_0 = 0$,
- (iv) la Lagrangiana del moto è $\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}m\dot{P}^2 = \frac{1}{2}m\dot{s}^2$; (4.7) implica $T \equiv \mathcal{E}$, ovvero \dot{s} costante, che corrisponde alla medesima informazione del punto (iii).

Il tempo t e l'ascissa curvilinea s differiscono solo per una costante moltiplicativa: attuando la sostituzione $s = s(t)$ in (5.22) si ottengono esattamente le (4.5) con forza nulla.

5.6 Geodetiche su una superficie di rotazione

Scriviamo le geodetiche nel caso in cui la superficie sia di **rotazione**, che supponiamo regolare in ogni punto: utilizzando la parametrizzazione (1.29) imporremo

$$(5.28) \quad f^2(u) > 0, \quad f'^2(u) + h'^2(u) > 0 \quad \forall u \in I.$$

Possiamo senz'altro supporre $f(u) > 0$ per $u \in I$.

Tenendo presenti le (1.31), le equazioni (5.27) si scrivono

$$(5.29) \quad \begin{cases} [f'^2(u) + h'^2(u)]u'' + [f'(u)f''(u) + h'(u)h''(u)]u'^2 - f(u)f'(u)v'^2 = 0 \\ f^2(u)v'' + 2f(u)f'(u)u'v' = 0 \end{cases}$$

che si abbinano alle condizioni iniziali $u(\lambda_0) = u_0$, $v(\lambda_0) = v_0$, $u'(\lambda_0) = u'_0$, $v'(\lambda_0) = v'_0$.

La seconda equazione in (5.29) equivale a $\frac{d}{d\lambda}(f^2(u)v'(\lambda)) = 0$, dunque per una geodetica la quantità $f^2(u)v'$ deve rimanere **costante**:

$$(5.30) \quad f^2(u(\lambda)) v'(\lambda) \equiv f^2(u_0)v'_0 = c.$$

Distinguiamo i due casi:

$c = 0$: questo avviene se e solo se $v'_0 = 0$, per la (5.28); si ha $v'(\lambda) \equiv 0$, dunque la geodetica è il **meridiano** $v \equiv v_0$, passante per (u_0, v_0) .

$c \neq 0$: si trova $v'(\lambda) = c/f^2(u(\lambda))$ e si sostituisce nella prima delle (5.29), ricavando un'equazione differenziale del II ordine per $u(\lambda)$ con le condizioni iniziali u_0 e u'_0 . La soluzione $u(\lambda)$, unitamente a $v(\lambda)$ ottenuta da (5.30) permette di scrivere la geodetica $\Gamma(\lambda) = (f(u(\lambda)) \cos v(\lambda), f(u(\lambda)) \sin v(\lambda), h(u(\lambda)))$ sulla superficie di rotazione e passante per (u_0, v_0) .

Chiediamoci se un **parallelo** per (u_0, v_0) della superficie può essere una geodetica: vanno cercate le soluzioni di (5.29) del tipo $u(\lambda) \equiv u_0$. Eseguendo il calcolo, si trova la condizione $f'(u_0) = 0$, ovvero la distanza dall'asse di rotazione deve essere stazionaria. Ad esempio, se si considera la superficie sferica con centro nell'origine degli assi, l'unico parallelo che è geodetica è l'equatore [coerentemente con il fatto che le geodetiche di tale superficie sono i cerchi di raggio massimo].

Un criterio utile per comprendere se una curva assegnata sia o no geodetica della superficie di rotazione si basa sulla seguente considerazione.

Sia $\Theta(u, v)$ la superficie e sia $\Gamma(\lambda) = \Theta(u(\lambda), v(\lambda))$ la geodetica passante per $\hat{P} = \Gamma(\hat{\lambda}) = \Theta(\hat{u}, \hat{v})$, con $\hat{u} = u(\hat{\lambda})$, $\hat{v} = v(\hat{\lambda})$.

Il **parallelo** per \hat{P} è parametrizzabile come $\Gamma_1(\mu) = \Theta(\mu, \hat{v})$. L'**angolo** $\alpha(\hat{P})$ che Γ forma con il parallelo nella posizione \hat{P} è tale che (vedi (1.21))

$$(5.31) \quad \cos \alpha = \frac{f^2(\hat{u})v'(\hat{\lambda})}{\sqrt{f^2(\hat{u})}} = f'(\hat{u})v'(\hat{\lambda}).$$

Dalla (5.30) si deduce dunque la seguente

Proprietà 5.2 Per una geodetica la quantità $f(u) \cos \alpha$, essendo α l'angolo che essa forma con il parallelo, è **costante**:

$$(5.32) \quad f(u) \cos \alpha = c$$

La proprietà è nota come **Teorema di Clairaut**. La costante c può essere calcolata in un qualunque punto della geodetica.

Esercizio 5.3 Sia \mathcal{R} la superficie di rotazione come in (1.30) generata dalla rotazione di un grafico $z = h(x)$, $x > 0$, con h tale che $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$.

Dimostrare che ogni geodetica $\Gamma(s) = (u(s) \cos v(s), u(s) \sin v(s), h(u(s)))$ ha necessariamente una **quota di regressione** \bar{h} , ovvero $h(u(s)) < \bar{h}$ per ogni s .

L'esercizio precedente mostra che la geodetica non può avvolgersi attorno all'asse di rotazione all'infinito.

5.7 Funzione Hamiltoniana

Consideriamo la funzione lagrangiana (5.1) e definiamo le seguenti funzioni:

$$(5.33) \quad p_u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}(u, v, \dot{u}, \dot{v}), \quad p_v = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}}(u, v, \dot{u}, \dot{v}).$$

Le due funzioni p_u , p_v vengono dette **momenti cinetici coniugati** alle variabili u e v , rispettivamente.

Supponiamo che dalle definizioni precedenti sia possibile determinare mediante inversione

$$(5.34) \quad \dot{u} = \dot{u}(p_u, p_v, u, v), \quad \dot{v} = \dot{v}(p_u, p_v, u, v).$$

L'invertibilità è possibile se e solo se la **matrice jacobiana**

$$J_{(\dot{u}, \dot{v})}(p_u, p_v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_u}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial p_u}{\partial \dot{v}} \\ \frac{\partial p_v}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial p_v}{\partial \dot{v}} \end{pmatrix}$$

è **non singolare**, ovvero ha determinante non nullo. Dalla (5.1) si vede che

$$(5.35) \quad p_u = mE(u, v)\dot{u} + mF(u, v)\dot{v}, \quad p_v = mF(u, v)\dot{u} + mG(u, v)\dot{v},$$

dunque $J_{(\dot{u}, \dot{v})}(p_u, p_v)$ è la **matrice hessiana**

$$J_{(\dot{u}, \dot{v})}(p_u, p_v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{u}^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{u} \partial \dot{v}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{v} \partial \dot{u}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{v}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mE(u, v) & mF(u, v) \\ mF(u, v) & mG(u, v) \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, in particolare non singolare. Pertanto l'inversione (5.34) è attuabile e definiamo la nuova funzione

$$(5.36) \quad H(p_u, p_v, u, v) = p_u \dot{u}(p_u, p_v, u, v) + p_v \dot{v}(p_u, p_v, u, v) - \mathcal{L}(u, v, \dot{u}(p_u, p_v, u, v), \dot{v}(p_u, p_v, u, v)).$$

La trasformazione (5.36) con le posizioni (5.34) viene detta **trasformata di Legendre** di \mathcal{L} e la trasformata H viene detta **funzione hamiltoniana** o **funzione di Hamilton**. Come nella formulazione lagrangiana si utilizzano le **variabili lagrangiane** (u, v, \dot{u}, \dot{v}) , così in quella hamiltoniana si adoperano le **variabili hamiltoniane** (p_u, p_v, u, v) .

Da (5.35) si trova immediatamente

$$p_u \dot{u} + p_v \dot{v} = 2T(u, v, \dot{u}, \dot{v}).$$

Tenendo presente la definizione (5.36) e ricordando la che $\mathcal{L} = T + U = T - V$, si ha la significativa

Proprietà 5.3 *La funzione Hamiltoniana $H(p_u, p_v, u, v)$ coincide con l'energia totale nelle variabili hamiltoniane*

$$(5.37) \quad H(p_u, p_v, u, v) = T(u, v, \dot{u}(p_u, p_v, u, v), \dot{v}(p_u, p_v, u, v)) + V(u, v).$$

Per scrivere esplicitamente la (5.36) nelle variabili hamiltoniane, si ricavano \dot{u}, \dot{v} in funzione delle p_u, p_v :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix}$$

essendo $A = \begin{pmatrix} mE & mF \\ mF & mG \end{pmatrix}$.

A partire dalla scrittura matriciale di (2.5)

$$T(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix}^T A(u, v) \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$$

si determina dell'energia cinetica T nelle variabili hamiltoniane:

$$(5.38) \quad \begin{aligned} T(p_u, p_v, u, v) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_u & p_v \end{pmatrix}^T [A(u, v)]^{-1} \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} p_u & p_v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che ha ancora struttura di polinomio omogeneo nelle variabili cinetiche p_u, p_v . La funzione V è già espressa nelle variabili hamiltoniane.

Le equazioni di moto nelle variabili hamiltoniane vengono immediatamente scritte dopo aver dimostrato la seguente

Proposizione 5.1 *Si ha:*

$$(5.39) \quad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}, & \frac{\partial H}{\partial v} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_u} = \dot{u}, & \frac{\partial H}{\partial p_v} = \dot{v}. \end{cases}$$

Dim. Deriviamo la (5.36) rispetto ad u :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p_u \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} + p_v \frac{\partial \dot{v}}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \frac{\partial \dot{v}}{\partial u} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}$$

in virtù delle (5.33). Derivando la (5.36) rispetto a p_u si ha

$$\frac{\partial H}{\partial p_u} = \dot{u} + p_u \frac{\partial \dot{u}}{\partial p_u} + p_v \frac{\partial \dot{v}}{\partial p_u} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \frac{\partial \dot{u}}{\partial p_u} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \frac{\partial \dot{v}}{\partial p_u} = \dot{u}$$

Le altre due formule in (5.39) relative alle derivate rispetto a v e a p_v si dimostrano allo stesso modo. \square
Si ha dunque l'importante

Teorema 5.1 *Le equazioni di moto hamiltoniane sono*

$$(5.40) \quad \begin{cases} \dot{p}_u = -\frac{\partial H}{\partial u}(p_u, p_v, u, v), \\ \dot{p}_v = -\frac{\partial H}{\partial v}(p_u, p_v, u, v), \\ \dot{u} = \frac{\partial H}{\partial p_u}(p_u, p_v, u, v), \\ \dot{v} = \frac{\partial H}{\partial p_v}(p_u, p_v, u, v). \end{cases}$$

Le prime due in (5.40) sono le (4.6) riscritte nelle variabili lagrangiane e tenendo presente le prime due in (5.39):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \implies \frac{d}{dt} p_u = -\frac{\partial H}{\partial u}$$

e analogamente per la seconda equazione. Le altre due equazioni in (5.40) sono contenute nelle (5.39).

Si osservi che le due equazioni del secondo ordine lagrangiane (5.1) nelle incognite $u(t), v(t)$ equivalgono alle quattro equazioni differenziali (5.40) del primo ordine nelle incognite $p_u(t), p_v(t), u(t), v(t)$.

Chiamando \mathcal{I} la matrice quadrata di ordine 4

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

dove $\mathbf{0}$ e \mathbf{I} sono rispettivamente la matrice nulla e la matrice identità di ordine due, la scrittura di (5.40) è riconducibile alla notevole forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{I} \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x})$$

dove $\mathbf{x} = (p_u, p_v, u, v) \in \mathbb{R}^4$ è il vettore delle variabili hamiltoniane e $\nabla_{\mathbf{x}}$ è il gradiente rispetto a tali variabili.

5.8 Moto di un punto su una superficie: esercizi di riepilogo

Esercizio 5.4 Sia data la curva $\Gamma(\lambda)$ di equazioni parametriche rispetto ad un riferimento ortonormale cartesiano

$$\begin{cases} x = Ae^{h\lambda} \cos \lambda \\ y = Ae^{h\lambda} \sin \lambda \\ z = Be^{h\lambda} \end{cases}$$

con A, B, h costanti reali positive.

- (i) Trovare l'equazione del cono circolare retto sul quale Γ si appoggia.
- (ii) Dimostrare che la curva intercetta le generatrici del cono secondo un angolo costante α .
- (iii) Verificare che per $h \rightarrow +\infty$ l'angolo α tende a zero.
- (iv) Se un punto materiale viene lasciato libero di muoversi, in assenza di forze, sulla superficie del cono relativo al quesito (i), può essere Γ una possibile traiettoria?

Esercizio 5.5 Considerare la superficie di rotazione attorno all'asse z di equazioni parametriche $\Theta(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$ e le curve sul piano (u, v) $u(s) = R, v(s) = s, R > 0$ costante e s ascissa curvilinea.

- (i) Quali curve si ottengono sulla superficie mediante l'applicazione $\Theta(u(s), v(s))$?
- (ii) Stabilire se esistono valori di R in modo che s rappresenti la parametrizzazione naturale per la curva $\Theta(u(s), v(s))$.
- (iii) Per tali valori di R determinare, se esistono, le condizioni sulla funzione f in modo che $\Theta(u(s), v(s))$ sia una geodetica della superficie.

Si consideri ora un punto P sulla superficie soggetto alla forza peso e ad una forza elastica (costante k) di richiamo verso il punto $(0, 0, h)$.

- (iv) Scrivere Lagrangiana e Hamiltoniana del sistema.
- (v) Dimostrare che se f è crescente non esistono posizioni di equilibrio per il punto a quote $z > h$, se f è decrescente non esistono posizioni di equilibrio a quote $z < h - mg/k$.
- (vi) Determinare la struttura della funzione f in modo che ogni posizione del punto P sulla superficie sia di equilibrio.

Esercizio 5.6 Si consideri un punto P sulla superficie di rotazione di equazioni parametriche $\underline{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$, soggetto alla forza peso e ad una forza elastica (costante k) di richiamo verso il punto $(0, 0, h)$.

- (i) Scrivere Lagrangiana del sistema.
- (ii) Dimostrare che se f è crescente non esistono posizioni di equilibrio per il punto a quote $z > h$, se f è decrescente non esistono posizioni di equilibrio a quote $z < h - mg/k$.
- (iii) Determinare la struttura della funzione f in modo che ogni posizione del punto P sulla superficie sia di equilibrio.

Esercizio 5.7 In un sistema di riferimento ortogonale di origine O e assi x, y, z , con z asse verticale, si consideri la superficie di rotazione ottenuta ruotando il grafico della curva $z = f(x), y = 0$ attorno all'asse z .

La funzione f è definita per ogni $x > 0$ ed è tale che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0, f'(x) < 0, f'' > 0$ per ogni $x > 0$.

- (i) Dopo aver introdotto la parametrizzazione $\Theta(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$, stabilire se la curva $\Gamma(\lambda) = \Theta(u(\lambda), v(\lambda))$ è una geodetica della superficie, con $u(\lambda) = 1/\lambda$, $v(\lambda) = \lambda$, $\lambda \geq 1$ [**n.b.**: non è necessario alcun calcolo di direzioni normali].

Sia ora P un punto materiale di massa m vincolato in modo liscio sulla superficie e sottoposto, oltre che alla forza peso, ad una forza elastica (costante $k > 0$) di richiamo verso il punto O .

- (ii) Scrivere la Lagrangiana del sistema.
 (iii) Scrivere le equazioni di moto e individuare due integrali primi.

Si consideri nei prossimi tre quesiti il valore iniziale $\dot{v}(0) = 0$.

- (iv) Verificare che il moto avviene su un meridiano della superficie.
 (v) Verificare che esiste un'unica configurazione di equilibrio e deciderne il carattere stabile o instabile.
 (vi) Stabilire se i moti del sistema sono limitati o illimitati.
 (vii) Nel caso generico $\dot{v}(0) \neq 0$, verificare che l'equazione di moto per u (ovvero quella contenente il termine \ddot{u}) può essere scritta in modo che non contenga v e le sue derivate.
 item[(viii)] Stabilire se esistono f (con le proprietà sopra indicate) e dati iniziali $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$, $\dot{u}(0) = 0$, $\dot{v}(0) = \dot{v}_0 \neq 0$ in modo che il moto rimanga sul parallelo $u = u_0$.

Esercizio 5.8 In un sistema di riferimento ortogonale (x, y, z) si consideri la superficie di rotazione ottenuta ruotando il grafico della funzione $x = ze^{-z}$ attorno all'asse z , con $z \geq 0$.

- (i) Trovare una parametrizzazione della superficie $\mathbf{x}(u, v)$ con $u = z$ e v angolo di rotazione, calcolato a partire dall'asse x .

Considerare la curva di intersezione fra la superficie e il piano $z = k$, con k costante positiva.

- (ii) Calcolare ascissa curvilinea e versori \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} della curva.
 (iii) Stabilire se esistono valori di k per cui la curva sia una geodetica della superficie.

Sia ora P un punto vincolato in modo liscio sulla superficie e sottoposto ad una forza elastica (costante μ) di attrazione verso il punto $(0, 0, h)$, $h > 0$ (la forza peso è trascurabile).

- (iv) Scrivere la Lagrangiana del sistema, le equazioni di moto e individuare un integrale primo distinto dall'energia totale.
 (v) Stabilire se esistono valori di h per cui la traiettoria del punto P corrisponda alla geodetica calcolata al punto (iii). In caso affermativo, con quale velocità viene percorsa la geodetica dal punto?

Esercizio 5.9 In un sistema di riferimento di origine O e assi x, y, z si consideri la circonferenza di equazioni parametriche $(a + R \cos u, 0, R \sin u)$, $u \in [0, 2\pi)$, con a e R costanti positive, $a > R$.

- (i) Scrivere le equazioni parametriche della superficie $\Theta(u, v)$ che si ottiene ruotando la circonferenza attorno all'asse z , utilizzando come parametri l'angolo u e l'angolo v di rotazione attorno a z , in modo che $v = 0$ corrisponda alla circonferenza data. Calcolare inoltre i coefficienti della prima forma fondamentale della superficie.

- (ii) Si consideri sulla superficie la curva Γ definita da $v = \gamma u$ con γ costante positiva.

Dopo aver calcolato il versore tangente ai paralleli della superficie di rotazione, si verifichi la formula

$$\cos \alpha = \frac{\gamma(a + R \cos u)}{|\Gamma'|}$$

dove α è l'angolo che la curva Γ forma con i paralleli della superficie.

Dedurre che la curva non può essere una geodetica della superficie. Cosa avviene per $\gamma = 0$?

Si consideri ora un punto P di massa m vincolato sulla superficie di rotazione e soggetto ad una forza elastica (costante k) che lo richiama verso l'origine degli assi.

- (iii) Determinare le posizioni di equilibrio del sistema e discutere la stabilità.
- (iv) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di moto.
- (v) Individuare due integrali primi del moto.
- (vi) Mostrare che per $\dot{v}(0) = 0$ il moto avviene su un meridiano, mentre per $\dot{v}(0) \neq 0$ il punto non inverte mai il verso di rotazione intorno all'asse z .
- (vii) Utilizzare gli integrali primi per scrivere un'equazione differenziale nella sola $u(t)$.
- (viii) Verificare che l'energia potenziale dell'equazione di moto scritta, se interpretata come moto unidimensionale, è pari a $\tilde{V}(u) = \frac{C_1}{(a + R \cos u)^2} + C_2 \cos u$, dove C_1 e C_2 sono due costanti da determinare in base alle condizioni iniziali $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$, $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$, $\dot{v}(0) = \dot{v}_0$.

Esercizio 5.10 Si consideri rispetto ad un sistema di riferimento ortogonale con assi (x, y, z) e origine O la curva Γ di equazioni parametriche $(e^{-u}(u^2 + au + b), 0, u)$, con $u \in \mathbb{R}$ e a, b costanti. Sia Θ la superficie che si ottiene ruotando la curva data attorno all'asse z .

- (i) Scrivere le equazioni parametriche $\Theta(u, v)$ della superficie, dove v è l'angolo di rotazione della curva.
- (ii) Determinare i valori di a e b in modo che la curve che si ottengono intersecando Θ con i piani $z = 0$, $z = 1$ siano entrambe geodetiche e tracciare qualitativamente la curva Γ sostituendo i valori trovati per a e b .

Facoltativo: Determinare la geodetica che congiunge i punti $(-1, 0, 0)$, $(-3e^{-1}, 0, 1)$.

Se si è saltato il punto (ii), porre $a = b = 1$.

Si consideri ora un punto materiale P di massa m vincolato in modo liscio sulla superficie Θ . Il punto è soggetto alla forza peso (l'asse z è diretto come la verticale ascendente) e ad una forza elastica di costante k che richiama P verso la sua proiezione ortogonale sull'asse z .

- (iii) Scrivere la Lagrangiana del sistema.
- (iv) Dimostrare che esiste almeno un parallelo $u = \bar{u}$ della superficie i cui punti sono tutte posizioni di equilibrio del sistema. Sono posizioni stabili o instabili?

Facoltativo: Stabilire come varia la posizione del parallelo $u = \bar{u}$ sulla superficie in funzione del parametro mg/k .

- (v) Osservare che la Lagrangiana ha una variabile ciclica e utilizzare questa informazione per mostrare che il moto corrispondente alle condizioni iniziali $(P(0) - O) = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}(0) = (0, 0, \alpha)$ avviene sicuramente sulla curva Γ di partenza, qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (vi) Verificare che, qualunque sia α , il moto suddetto è sicuramente confinato fra due quote $h_-(\alpha)$, $h_+(\alpha)$ (non è richiesto il calcolo delle quote).

Esercizio 5.11 Si consideri la superficie $\mathbf{x}(u, v)$ parametrizzata nel modo seguente

$$\begin{cases} x(u, v) = u \cos v \\ y(u, v) = u g(v) \\ z(u, v) = f(v) \end{cases}$$

con $u \in \mathbb{R}$, $v \in (-\pi/2, \pi/2)$, f e g funzioni regolari tali che $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, $g(0) = 0$, $g'(0) > 0$.

- (i) Determinare le funzioni $f(v)$ e $g(v)$ in modo che i coefficienti della prima forma fondamentale verifichino $F = 0$, $G = 1 + u^2$.
- (ii) Stabilire se le linee coordinate $\Gamma_2(u_0, v)$ con u_0 costante reale positiva sono geodetiche della superficie, con f e g definite come in (i).

Facoltativo: verificare che le linee coordinate $\Gamma_1(u, v_0)$ con $v_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ costante sono geodetiche della superficie.

Si consideri ora un punto materiale P di massa m vincolato in modo liscio sulla superficie e soggetto unicamente ad una forza elastica di richiamo verso il punto P' , corrispondente alla proiezione ortogonale di P sull'asse z .

- (iii) Scrivere la Lagrangiana e l'Hamiltoniana del sistema.
- (iv) Trovare due integrali primi del moto.
- (v) Scrivere le equazioni di moto e mostrare che è possibile ridurre una delle due equazioni ad un'equazione differenziale nella sola incognita $u(t)$. In particolare, mostrare che per $\dot{u}(0) = 0$ il punto P compie oscillazioni armoniche su un segmento di retta e determinarne la frequenza.
- (vi) Trovare la velocità iniziale $\dot{u}(0)$, $\dot{v}(0)$ in modo che la traiettoria del punto coincida con la linea coordinata $\Gamma_2(u_0, v)$, a partire dalla posizione iniziale $u(0) = u_0 \neq 0$, $v(0) = v_0$. Con quale velocità $\dot{v}(t)$ viene percorsa tale traiettoria?

Esercizio 5.12 Fissato un sistema di riferimento ortogonale (x, y, z) di origine O , si consideri un punto materiale P di massa m vincolato sulla superficie cilindrica $x^2 + y^2 = R^2$, R costante positiva.

Sul punto agisce unicamente la forza $\mathbf{F} = -mw_0\mathbf{i} \wedge [2\mathbf{v} + w_0\mathbf{i} \wedge \mathbf{x}]$, dove w_0 è una costante positiva, $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ è il vettore posizione, \mathbf{v} il vettore velocità.

- (i) Stabilire le dimensioni della costante w_0 .
- (ii) Utilizzare come coordinate lagrangiane le coordinate cilindriche (φ, z) , in modo che $\mathbf{x} = R\cos\varphi\mathbf{i} + R\sin\varphi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e verificare che le componenti lagrangiane $F_{\theta, \varphi} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}$, $F_{\theta, z} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}$ della forza \mathbf{F} sono

$$F_{\theta, \varphi} = mR\cos\varphi(w_0^2R\sin\varphi + 2w_0\dot{z}), \quad F_{\theta, z} = m(w_0^2z - 2w_0R\cos\varphi\dot{\varphi}).$$

- (iii) Porre $U(\varphi, z, \dot{z}) = \alpha(\varphi)\dot{z} + \beta(\varphi, z)$ e determinare le funzioni α e β in modo che risulti

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = F_{\theta, \varphi}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{z}} \right) = F_{\theta, z}.$$

- (iv) Calcolare l'energia cinetica T del punto P e, definendo $\mathcal{L} = T + U$, scrivere le equazioni di moto del sistema.
- (v) Verificare che la quantità $I = T - \beta$ è un integrale primo del moto.

[Suggerimento: partire dall'espressione $\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, oppure calcolare dI/dt e mostrare che vale zero, utilizzando le equazioni di moto.]

Facoltativo: la quantità $T - U$ è un integrale primo del moto?

- (vi) Determinare la funzione Hamiltoniana del sistema e confrontarla con I .

Esercizio 5.13 Si consideri un punto materiale P di massa m vincolato sulla superficie di un cilindro circolare retto di raggio R e con asse verticale. Sul punto agisce, oltre alla forza peso, una forza elastica (costante k) di richiamo verso un punto O dell'asse cilindrico. Fissato un sistema di riferimento con l'origine in O e con l'asse z coincidente con quello del cilindro, si scelgano come coordinate lagrangiane l'angolo θ che il raggio passante per P forma con l'asse x e la quota di P .

- (i) Studiare le configurazioni di equilibrio, discutendone la stabilità.
- (ii) Scrivere Lagrangiana e Hamiltoniana del sistema.
- (iii) Provare che le due quantità $I_1 = p_\vartheta$ e $I_2 = (kz + mg)^2 + kp_z^2$, con $p_\vartheta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}}$ e $p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}$ sono costanti del moto.
- (iv) Trovare le condizioni per cui il moto del punto risulti oscillatorio lungo una generatrice del cilindro.
- (v) Fissato ϑ costante, linearizzare il moto mediante le piccole oscillazioni attorno alle configurazioni di equilibrio stabile.

Esercizio 5.14 Sia Θ una superficie regolare parametrizzata da $\mathbf{x}(u, v)$, $(u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ e Γ una curva di equazioni $\Gamma(\lambda) = \Theta(u(\lambda), v(\lambda))$, $\lambda \in I \subseteq \mathbb{R}$.

- (i) Che significato geometrico hanno i vettori $\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{x}'(\lambda) \wedge \mathbf{x}''(\lambda)$ e $\mathbf{N}(u, v) = \frac{\partial \Theta}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Theta}{\partial v}$? Mostrare che Γ è una geodetica di Σ se e solo se

$$(5.41) \quad \mathbf{B}(\lambda) \cdot \mathbf{N}(u(\lambda), v(\lambda)) = 0 \quad \forall \lambda \in I.$$

Si consideri ora come Θ la superficie di equazioni $\Theta(u, v) = (u, v, \varphi(v)e^u)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, con φ funzione regolare su tutto \mathbb{R} e come $\Gamma(\lambda)$ la curva di equazioni $\Gamma(\lambda) = \Theta(u(\lambda), v(\lambda))$, con $u(\lambda) = \alpha\lambda$, $v(\lambda) = \beta\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, α e β costanti assegnate, $\alpha \neq 0$.

- (ii) Si calcolino i vettori $\mathbf{B}(\lambda)$, $\mathbf{N}(u, v)$ e si applichi la (5.41) per stabilire come scegliere φ in modo che $\Gamma(\lambda)$ sia una geodetica di Θ passante per il punto $P_0 \equiv (0, 0, 1)$ e tale che $\Gamma''(\lambda)$ non sia identicamente nullo.

Sia ora P un punto di massa m vincolato in modo liscio sulla superficie ottenuta nel quesito (ii) e non soggetto ad alcuna forza.

- (iii) Scrivere la Lagrangiana \mathcal{L} del sistema.
- (iv) Determinare una trasformazione lineare $\eta = au + bv$, $\zeta = cu + dv$ in modo che la variabile η risulti ciclica per la Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}$ nelle nuove variabili.
- (v) Scrivere il corrispondente integrale primo I del moto e calcolarne il valore costante lungo la geodetica Γ .
- (vi) Utilizzando l'integrale dell'energia, scrivere l'equazione differenziale per la funzione $\lambda(t)$, legge oraria del parametro λ per il moto di P sulla geodetica Γ .
- (vii) Studiare qualitativamente il moto di P se è posto inizialmente in $P_0 \equiv (0, 0, 1)$ a velocità $\mathbf{v}(0) = (\alpha, \beta, \alpha\gamma^2)$, essendo $\gamma^2 = 1 + (\beta/\alpha)^2$, tracciando il grafico di $\lambda(t)$, $t \geq 0$.

6 Sistemi vincolati

Il moto di un punto materiale su una curva o su una superficie fa parte dello studio dei **sistemi vincolati**, ovvero sistemi di uno o più punti soggetti a limitazioni di tipo geometrico o cinematico.

Il problema viene formalizzato considerando N punti P_1, \dots, P_N nello spazio affine Σ sottoposti ad uno o più **vincoli**, ovvero restrizioni sulle posizioni e sulle velocità. Un vincolo è rappresentabile mediante una relazione del tipo

$$f(P_1, \dots, P_N, \dot{P}_1, \dots, \dot{P}_N, t) = 0,$$

dove

$$f : \Sigma^N \times V_{\Sigma}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Sigma^N = \underbrace{\Sigma \times \dots \times \Sigma}_N, \quad V_{\Sigma}^N = \underbrace{V_{\Sigma} \times \dots \times V_{\Sigma}}_N.$$

Il vincolo si dice

geometrico se non dipende dalle velocità,

cinematico se dipende da una o più velocità.

Prenderemo in considerazione solamente il caso in cui le restrizioni siano tutte geometriche, ovvero sistemi di N punti soggetti alle m limitazioni

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(P_1, \dots, P_N, t) = 0, \\ \dots \\ \dots \\ f_m(P_1, \dots, P_N, t) = 0 \end{array} \right. \quad f_i : U_i \subseteq \Sigma^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m.$$

I sistemi vincolati di tipo (6.1) con tutti i vincoli di tipo geometrico o, come si dice, **intero** (nel senso non differenziato), vengono detti **sistemi olonomi** [$\acute{o}\lambda o\varsigma$: *intero*, $\nu\acute{o}\mu o\varsigma$: *legge*]. I sistemi non olonomi, in cui sono presenti vincoli sulle velocità, oppure vincoli unilateri (ovvero con ≤ 0 anziché $= 0$, ...) sono detti genericamente **anonomi**.

Esempio di sistema anonomo: Si considerino due punti P_1 e P_2 su un piano Π vincolati in modo che la velocità del punto medio M del segmento P_1P_2 abbia velocità parallela alla congiungente $P_1 - P_2$. Per esercizio (facoltativo), si scrivano le condizioni vincolari (appartenenza al piano, parallelismo $\dot{M} // P_1 - P_2$). Il sistema è un modello per il *pattino*, oppure per lo *sci che non derapa*.

Il vincolo intero f_i si dice

fisso se non dipende esplicitamente dal tempo: $f_i(P_1, \dots, P_N) = 0$,

mobile se dipende esplicitamente dal tempo: $f_i(P_1, \dots, P_N, t) = 0$.

Il sistema vincolato (6.1) si dice

scleronomo [$\sigma\kappa\lambda\eta\rho\acute{o}\varsigma$: *rigido*] se tutti i vincoli f_1, \dots, f_m sono fissi,

reonomo [$\rho\epsilon\omega$: *scorrere*] se almeno un vincolo è mobile.

La situazione $m \geq 3N$ conduce generalmente ad un problema di statica o di iperstatica, in cui la configurazione del sistema è di fatto determinata dai vincoli. Escludiamo volutamente questa circostanza e poniamo da ora in poi l'ipotesi

$$(6.2) \quad m < 3N,$$

in base alla quale il sistema si dice **labile**.

Una volta stabilito un sistema di riferimento, la scrittura dei vincoli (6.1) si traduce in relazioni fra le coordinate dei punti: la **scrittura cartesiana** di (6.1) consiste in

$$(6.3) \quad \begin{cases} \hat{f}_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0, \\ \dots \\ \hat{f}_m(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0 \end{cases} \quad \hat{f}_i : \hat{U}_i \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Consideriamo alcuni esempi di sistemi olonomi.

E1. Un punto a distanza costante $R > 0$ da un punto fisso $O \in \Sigma$: si ha $N = 1$, $m = 1$ e il vincolo è $f_1(P_1) = |P_1 - O| - R = 0$ [vincolo fisso]; scelto il sistema cartesiano ortogonale $\{O, \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle\}$, la scrittura cartesiana del vincolo è (considerando in modo equivalente i quadrati) $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0$, con $P_1 - O = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}$; se viene scelto invece un sistema di coordinate sferiche centrato in O , la scrittura del vincolo è $\rho - R = 0$, con $P_1 - O = \rho \mathbf{e}_\rho$. Il sistema è **scleronomo** e realizza il **pendolo sferico**.

E2. Un punto a distanza $R > 0$ da un punto fisso $O \in \Sigma$ e vincolato su un piano Π per O : si ha $N = 1$, $m = 2$ e al vincolo $f_1(P_1) = |P_1 - O| - R = 0$ si deve aggiungere $f_2(P_1) = (P_1 - O) \cdot \mathbf{e} = 0$, essendo \mathbf{e} un versore ortogonale a Π . Il sistema è **scleronomo** e, se il piano è verticale, realizza il **pendolo semplice**, studiato a suo tempo assegnando direttamente la curva (circonferenza verticale) sulla quale è costretto il punto. Scrittura cartesiana dei vincoli: sia O l'origine del sistema di riferimento, \mathbf{i}, \mathbf{k} versori ortogonali su Π e $\mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}$ (dunque $\mathbf{j} = \pm \mathbf{e}$); si ha $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0$, $y_1 = 0$.

E3. Due punti la cui distanza reciproca è $R > 0$: si ha $N = 2$, $m = 1$, con $f_1(P_1, P_2) = |P_1 - P_2| - R = 0$ [vincolo fisso]; scrittura cartesiana: $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - R^2 = 0$, con $P_i - O = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}$, $i = 1, 2$ e O fissato in Σ ; scrittura in coordinate sferiche: si può scegliere, ad esempio, l'origine del sistema in P_1 e scrivere $\rho - R = 0$, essendo $\rho = |P_1 - P_2|$. Il sistema è **scleronomo**.

E4. Due punti la cui distanza reciproca $R(t) \geq 0$ è variabile nel tempo : si ha $N = 2$, $m = 1$, con $f_1(P_1, P_2, t) = |P_1 - P_2| - R(t) = 0$ [vincolo mobile]; scrittura cartesiana: $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - R^2(t) = 0$, con $P_i - O = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}$, $i = 1, 2$ e O fissato in Σ ; scrittura in coordinate sferiche: $\rho - R(t) = 0$, essendo $\rho = |P_1 - P_2|$. Il sistema è **reonomo**.

Esercizio 6.1 Scrivere le equazioni vincolari (6.1) per il sistema di tre punti P_1, P_2 e P_3 vincolati in modo che

1. i tre punti stiano su un piano verticale Π ,
2. P_1 appartenga alla retta orizzontale $r \in \Pi$ passante per O , punto fissato su Π ,
3. P_2 abbia distanza costante R da P_1 ,
4. P_3 sia equidistante da P_1 e P_2 .

Decidere se il sistema è scleronomo o reonomo. Fissare infine un sistema di riferimento cartesiano e scrivere le equazioni cartesiane (6.3) dei vincoli nelle coordinate (x_i, y_i, z_i) di P_i , $i = 1, 2, 3$.

Svolgimento. Sia \mathbf{e} un versore ortogonale a Π ; il gruppo 1 di condizioni è formulato da

$$f_1 = (P_1 - O) \cdot \mathbf{e} = 0, \quad f_2 = (P_2 - O) \cdot \mathbf{e} = 0, \quad f_3 = (P_3 - O) \cdot \mathbf{e} = 0.$$

Chiamando poi \mathbf{i} il versore di r (con verso scelto a piacere), la condizione 2 è realizzata da f_1 unitamente a

$$f_4 = (P_1 - O) \cdot \mathbf{e} \wedge \mathbf{i} = 0.$$

Infine, 3 e 4 sono rispettivamente

$$f_5 = |P_2 - P_1| - R = 0, \quad f_6 = |P_3 - P_1| - |P_3 - P_2| = 0.$$

Il sistema è **scleronomo**, con $N = 3$, $m = 5$.

Il sistema di riferimento viene scelto in base alla convenienza ed alla semplicità di scrittura delle equazioni vincolari: si può scegliere ad esempio il sistema cartesiano con

- l'origine del sistema di riferimento nel punto O ,
- l'asse delle x sulla retta r ,
- l'asse delle z come retta verticale per O , con verso positivo verso l'alto,
- l'asse delle y in modo che la terna dei versori degli assi sia levogira [il versore \mathbf{e} , a seconda del verso scelto è $\pm\mathbf{j}$].

Chiamando (x_i, y_i, z_i) le coordinate dei tre punti, $i = 1, 2, 3$, la scrittura cartesiana delle equazioni vincolari consiste nelle sei equazioni

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{condizione 1}$$

$$z_1 = 0 \quad \text{condizione 2}$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - R^2 = 0 \quad \text{condizione 3}$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 - (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = 0 \quad \text{condizione 4}$$

con $\hat{U} = \mathbb{R}^6$.

Tornando alla scrittura (6.1), definiamo il punto

$$(6.4) \quad P = (P_1, \dots, P_N) \in \Sigma^N = \underbrace{\Sigma \times \dots \times \Sigma}_N$$

punto rappresentativo delle configurazioni del sistema.

Le restrizioni vincolari (6.1) equivalgono al luogo degli zeri di un'unica funzione $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $U = \bigcap_{1 \leq j \leq m} U_j \subseteq \Sigma^N$, supponendo $U \neq \emptyset$, così definita:

$$(6.5) \quad F(P, t) = (f_1(P, t), \dots, f_m(P, t)) \in \mathbb{R}^m, \quad P \in U \subseteq \Sigma^N.$$

Chiamiamo ad ogni istante fissato t l'insieme in Σ^N

$$(6.6) \quad S(t) = \{P \in U \mid F(P, t) = \mathbf{0}\} \subseteq \Sigma^N$$

spazio delle configurazioni all'istante t .

Ad esempio, per il sistema $E1$ lo spazio delle configurazioni è l'insieme dei punti distanti R da O , ovvero la superficie sferica in Σ di centro O e raggio R .

Per il sistema $E2$ lo spazio delle configurazioni è in Σ^2 , spazio affine di dimensione 6; possiamo immaginare S fissando un punto $P_1 \in \Sigma$ e tutti i punti P_2 a distanza R .

6.1 Coordinate lagrangiane

Le restrizioni di tipo geometrico comportano una diminuzione del numero di parametri indispensabili ad individuare una configurazione del sistema: andiamo ora a formalizzare questo concetto.

Supponiamo di aver fissato un riferimento cartesiano $\{O, \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle\}$ rispetto al quale $P_i - O = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}$, $i = 1, \dots, N$ e partiamo dalla scrittura cartesiana (6.3) di (6.1).

Il **punto rappresentativo** (6.4) viene individuato dal **vettore** di $3N$ numeri reali

$$(6.7) \quad X = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) \in \mathbb{R}^{3N}.$$

La scrittura compatta di (6.3) (analoga a (6.5)) è

$$(6.8) \quad \hat{F}(X, t) = \mathbf{0} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_m, \quad X \in \hat{U} \subseteq \mathbb{R}^{3N}$$

con

$$\hat{F}(X, t) = (\hat{f}_1(X, t), \dots, \hat{f}_m(X, t)) : \hat{U} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \hat{U} = \bigcap_{1 \leq i \leq m} \hat{U}_i,$$

dove ciascuna $\hat{f}_i : \hat{U}_i \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$.

Ad ogni istante t , lo **spazio delle configurazioni** (6.6) viene identificato con l'insieme delle $3N$ -uple

$$(6.9) \quad \hat{S}(t) = \{X \in \hat{U} \mid \hat{F}(X, t) = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^{3N}.$$

Fissato un istante $t \in \mathbb{R}$ e $X_0 \in \hat{S}(t)$, gli m vincoli (6.3) si dicono **indipendenti** nel punto di coordinate X_0 se la matrice

$$(6.10) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial z_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial x_N} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial y_N} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial z_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \hat{f}_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{f}_m}{\partial y_1} & \frac{\partial \hat{f}_m}{\partial z_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial \hat{f}_m}{\partial x_N} & \frac{\partial \hat{f}_m}{\partial y_N} & \frac{\partial \hat{f}_m}{\partial z_N} \end{pmatrix}$$

dove le derivate parziali vanno calcolate per $X = X_0$, ha **rango massimo**, ovvero m (vedi (6.2)) [un modo compatto per scrivere la matrice (6.10) è $J_X \hat{F}(X_0, t)$, indicando così la matrice jacobiana della funzione \hat{F} rispetto alle variabili $X = (x_1, \dots, z_N)$ e calcolata per $X = X_0$].

In ciascuna delle righe della matrice (6.10) riconosciamo il **gradiente in coordinate cartesiane** della funzione \hat{f}_i , $i = 1, \dots, m$ rispetto alle $3N$ variabili $X = (x_1, \dots, z_N)$:

$$\left(\frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_1}, \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial y_1}, \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_N}, \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial y_N}, \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial z_N} \right) = \nabla_X \hat{f}_i(X, t) \in \mathbb{R}^{3N}, \quad i = 1, \dots, m$$

Dunque, la condizione di indipendenza $rango = m$ equivale alla condizione di tipo geometrico

$$(6.11) \quad i \text{ vettori } \nabla_X \hat{f}_1(X_0, t), \dots, \nabla_X \hat{f}_m(X_0, t) \text{ sono } m \text{ vettori linearmente indipendenti di } \mathbb{R}^{3N}.$$

Ad esempio, per il sistema $E1$ la matrice (6.10) è la matrice 1×3

$$\left(2x_1 \quad 2y_1 \quad 2z_1 \right)$$

che ha rango massimo = 1, dato che $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \neq 0$ su \mathcal{S} . Lo spazio delle configurazioni (6.9) consiste nella superficie sferica di centro O e raggio R .

Per il sistema $E2$ invece si ha la matrice 2×3

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

di rango massimo = 2, per la medesima ragione dell'esempio precedente. Lo spazio delle configurazioni (6.9) è la circonferenza di raggio R , centro O sul piano $z = 0$.

Esercizio 6.2 Per ognuno dei sistemi $E3$, $E4$ e quello dell'Esercizio 6.1 si determini

- (i) la funzione \hat{F} di (6.8) e il dominio \hat{U} ,
- (ii) lo spazio delle configurazioni \hat{S} di (6.9),
- (iii) la matrice (6.10) [per E4 si tenga conto che t è fissato e non interviene nelle derivazioni], discutendone il rango.

Un esempio di vincoli dipendenti è il seguente (d indica la distanza):

E5. Un punto P_1 , $d(P_1, r) = R > 0$, $P_1 \in \Pi$ dove r e Π sono rispettivamente una retta ed un piano affine fissati in Σ tali che $d(r, \Pi) = R$.

Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano in cui r è l'asse z e Π il piano $x = R$, le equazioni vincolari (6.3) si scrivono

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0, \\ x_1 - R = 0 \end{cases}$$

[per esercizio si scrivano le equazioni vincolari affini (6.1)]. La matrice (6.10) è

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Geometricamente i vincoli confinano il punto all'intersezione del cilindro circolare retto di asse r e al piano tangente al cilindro passante per $(R, 0, 0)$, dunque lo spazio delle configurazioni \mathcal{S} è formato dai punti della retta $x = R, y = 0$ [retta parallela a r passante per $(R, 0, 0)$]. Su \mathcal{S} dunque la matrice 2×2 vale

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 1. In linea con la condizione (6.11), le due righe della matrice sono i vettori gradienti perpendicolari alla superficie del cilindro ed al piano, rispettivamente: lungo la retta \mathcal{S} sono evidentemente paralleli, dunque dipendenti.

A proposito dell'ultima osservazione, si noti che l'assegnazione della superficie come **insieme di livello** (1.25) corrisponde ad un **vincolo geometrico e fisso** per un punto P : l'insieme Φ_0 è lo spazio delle configurazioni. L'ipotesi di **regolarità** (1.26) in un punto è esattamente l'ipotesi di **indipendenza** (6.11) del vincolo nel medesimo punto.

La regolarità (1.26) offre la possibilità di applicare il Teorema della funzione implicita e di **parametrizzare** localmente l'insieme (1.25) come si è fatto in (1.27): la procedura viene ora rivisitata seguendo l'ottica delle **coordinate lagrangiane**.

Caso $m = 1, N = 1$. E' il caso di un punto vincolato su una superficie di \mathbb{R}^3 assegnata in modo implicito. Il Teorema della funzione implicita va applicato come segue [rispetto a (6.8), (6.9) omettiamo $\hat{\cdot}$ in \hat{F} , \hat{U} e \hat{S} , per semplicità]

Proposizione 6.1 Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0, z_0) \in U$, U aperto tali che

- (i) f è almeno $\mathcal{C}^1(U)$,
- (ii) $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$,
- (iii) $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Allora esistono due aperti $V \subseteq \mathbb{R}^2, W \subseteq \mathbb{R}^3, (x_0, y_0, z_0) \in W$ e una funzione

$$X(u, v) : V \rightarrow W_{\mathcal{S}} = W \cap \mathcal{S}$$

tali che:

- (i) X è $\mathcal{C}^1(V)$,

(ii) X è una biiezione $V \leftrightarrow W_S$.

In altri termini, se il vincolo $f(x, y, z) = 0$ è **indipendente** (vedi (6.10) in una posizione dello spazio delle configurazioni individuata dalle coordinate (x_0, y_0, z_0) , allora è possibile determinare localmente due coordinate (u, v) , dette **coordinate lagrangiane** o **parametri lagrangiani**, mediante le quali attorno a (x_0, y_0, z_0) lo spazio delle configurazioni \mathcal{S} è **parametizzabile** mediante la funzione $X(u, v)$:

$$(6.12) \quad X(u, v) = \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

per $(u, v) \in V$ aperto di \mathbb{R}^2 .

Si osservi che:

1. nella versione, per così dire, cartesiana, probabilmente più familiare dal Corso di Analisi, si assume ad esempio $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ e si ricava $z = z(x, y)$: è un caso particolare, in cui x e y sono le coordinate lagrangiane;
2. al posto delle tre coordinate (x, y, z) , non libere ma costrette a rispettare la condizione vincolare, si sostituiscono le coordinate (u, v) **libere** nell'aperto V .

Dato che $f(X(u, v)) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0$ per ogni $(u, v) \in V$, si ha, derivando rispetto a u e v :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

o, più sinteticamente,

$$(6.13) \quad \nabla f \cdot X_u = 0, \quad \nabla f \cdot X_v = 0$$

dove

$$(6.14) \quad X_u(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad X_v(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

3. L'eventuale presenza del tempo nel vincolo $f(x, y, z, t) = 0$ (**vincolo mobile**) non altera affatto le conclusioni: si applica il Teorema ad ogni istante t fissato, richiedendo la regolarità $\nabla f(x_0, y_0, z_0, t) \neq 0$ [il gradiente è calcolato rispetto alle variabili x, y e z , per ogni t fissato]; si ha $V = V(t)$, $\mathcal{S}(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z, t) = 0, t \text{ fissato}\}$, e la (6.12) è del tipo

$$(6.15) \quad X(u, v, t) = \begin{cases} x = x(u, v, t) \\ y = y(u, v, t) \\ z = z(u, v, t) \end{cases} \quad (u, v) \in V(t)$$

Le (6.13) sono identiche, dato che le derivate riguardano solo u e v .

Consideriamo il seguente esempio.

E6. Un punto P a distanza $R(t) \geq 0$ da una retta r : la scrittura (6.1) è $|f(P, t) = |(P_1 - O) \wedge \mathbf{e}| - R(t) = 0$, dove O è un qualunque punto di r e \mathbf{e} un versore parallelo a r . Si fissa un sistema di riferimento in cui r è l'asse z : la scrittura cartesiana del vincolo è $x^2 + y^2 - R^2(t) = 0$. La matrice (6.10) è $\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$ e il rango è 1 in ogni istante in cui $R(t) > 0$. Lo spazio delle configurazioni $\hat{\mathcal{S}}(t)$ è la superficie del cilindro di asse r e direttrice la circonferenza di raggio $R(t)$ sul piano $z = 0$: il cilindro è dunque mobile nel tempo. Una possibile scelta delle due coordinate lagrangiane consiste nelle coordinate di tipo cartesiano:

$$\begin{array}{ll} I & \begin{cases} x = u \\ y = \sqrt{R^2(t) - u^2} \\ z = v \end{cases} & II & \begin{cases} x = u \\ y = -\sqrt{R^2(t) - u^2} \\ z = v \end{cases} \\ III & \begin{cases} x = \sqrt{R^2(t) - u^2} \\ y = u \\ z = v \end{cases} & IV & \begin{cases} x = -\sqrt{R^2(t) - u^2} \\ y = u \\ z = v \end{cases} \end{array}$$

dove $(u, v) \in V(t) = (-R(t), R(t)) \times \mathbb{R}$ [l'uso di *I*, *II*, *III* oppure *IV* dipende dalla posizione di (x_0, y_0, z_0) in $\hat{S}(t)$]. Riguardo a (6.14), si ha

$$X_u(u, v, t) = \left(1, \frac{u}{\sqrt{R^2(t) - u^2}}, 0 \right), \quad X_v(u, v, t) = (0, 0, 1)$$

per *I*, in modo analogo per le altre tre.

Decisamente più conveniente è l'utilizzo delle coordinate cilindriche come parametri lagrangiani:

$$(6.16) \quad I \quad \begin{cases} x = R(t) \cos v \\ y = R(t) \sin v \\ z = u \end{cases} \quad II \quad \begin{cases} x = -R(t) \cos v \\ y = R(t) \sin v \\ z = u \end{cases}$$

con $(u, v) \in V(t) = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$. La (6.14) per la *I* è

$$X_u(u, v, t) = R(t)(-\sin v, \cos v, 0) \quad X_v(u, v, t) = (0, 0, 1)$$

e analogamente per la *II*.

Caso $m > 1$, $N \geq 1$ oppure $m \geq 1$, $N > 1$. È il caso generale di uno o più punti vincolati come in (6.8). La Proposizione 6.1 viene generalizzata come segue [anche qui, rispetto a (6.8), (6.9) omettiamo $\hat{}$ in \hat{F} , \hat{U} e \hat{S} , per semplicità].

Proposizione 6.2 Sia $F : U \subseteq \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$F(X) = (f_1(X), \dots, f_m(X)), \quad m < 3N, \quad X = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N), \quad U \text{ aperto}$$

e $X_0 \in U$ tali che

- (i) F è almeno $\mathcal{C}^1(U)$,
- (ii) $X_0 \in \mathcal{S} = \{X \in \mathbb{R}^{3N}; | F(X) = 0\}$,
- (iii) la matrice (6.10) $J_X F(X_0)$ calcolata per $X = X_0$ è di rango m .

Allora esistono due aperti $K \subseteq \mathbb{R}^\ell$, con $\ell = 3N - m$, $W \subseteq \mathbb{R}^{3N}$, $X_0 \in W$ e una funzione

$$X(q_1, \dots, q_\ell) : K \rightarrow W_{\mathcal{S}} = W \cap \mathcal{S}$$

tali che:

- (i) X è $\mathcal{C}^1(K)$,
- (ii) X è una biiezione $K \leftrightarrow W_{\mathcal{S}}$.

In Geometria l'insieme $F(X) = 0$ viene detto **sottovarietà regolare** in \mathbb{R}^{3N} di dimensione ℓ : è un esempio di **varietà differenziabile**, ovvero (detto in modo molto semplice) di insieme che localmente è isomorfo in modo differenziabile (*diffeomorfo*) ad un aperto di \mathbb{R}^ℓ . Una ℓ -upla (q_1, \dots, q_ℓ) individua un unico punto in $W_{\mathcal{S}}$, spazio delle configurazioni attorno alla posizione prescelta; viceversa, una configurazione in $W_{\mathcal{S}}$ è ricondotta ad un'unica ℓ -upla in K .

In Meccanica, il risultato è fondamentale per lo studio dei sistemi vincolati: lo spazio delle configurazioni di un sistema di N punti con m vincoli **indipendenti** in X_0 viene **parametrizzato** localmente dalle $\ell = 3N - m$ **coordinate lagrangiane** attorno a X_0 :

$$(6.17) \quad X(q_1, \dots, q_\ell) = \begin{cases} x_1 = x_1(q_1, \dots, q_\ell) \\ y_1 = y_1(q_1, \dots, q_\ell) \\ z_1 = z_1(q_1, \dots, q_\ell) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_N = x_N(q_1, \dots, q_\ell) \\ y_N = y_N(q_1, \dots, q_\ell) \\ z_N = z_N(q_1, \dots, q_\ell) \end{cases} \quad (q_1, \dots, q_\ell) \in K \subseteq \mathbb{R}^\ell.$$

Il numero ℓ , che corrisponde al numero di coordinate totali $3N$ a cui si toglie un'unità per ogni vincolo indipendente, viene detto **numero dei gradi di libertà** del sistema.

Le osservazioni che seguono la (6.12) sono le medesime:

1. nella versione cartesiana si conclude che esistono $\ell = 3N - m$ coordinate fra le X in funzione delle quali si possono esprimere le rimanenti m : il gruppo delle variabili indipendenti dipende dalla posizione del minore non singolare di ordine m in (6.10).
2. Alle $3N$ coordinate cartesiane, sottoposte alle limitazioni vincolari, si sostituiscono le ℓ **coordinate lagrangiane** q_1, \dots, q_ℓ libere nell'aperto K . Dalle identità

$$f_1(X(q_1, \dots, q_\ell)) = 0, \quad f_m(X(q_1, \dots, q_\ell)) = 0 \quad \forall (q_1, \dots, q_\ell) \in K$$

si determina, derivando ciascuna funzione f_1, \dots, f_m rispetto a ciascuna delle variabili q_1, \dots, q_ℓ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial z_N} \frac{\partial z_N}{\partial q_1} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_\ell} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial z_N} \frac{\partial z_N}{\partial q_\ell} = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial z_N} \frac{\partial z_N}{\partial q_1} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_\ell} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial z_N} \frac{\partial z_N}{\partial q_\ell} = 0, \end{aligned}$$

o, più sinteticamente,

$$(6.18) \quad \nabla_X f_j \cdot X_{q_i} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, \ell$$

dove $\nabla_X f_j$ indica il gradiente rispetto alle $3N$ variabili cartesiane e, analogamente a (6.14),

$$(6.19) \quad X_{q_i} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}, \dots, \frac{\partial z_N}{\partial q_i} \right) \in \mathbb{R}^{3N}, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

3. La situazione più generale (6.8) di (**vincoli mobili**) va trattata nel medesimo modo: la Proposizione 6.2 viene applicata ad ogni istante t in cui la matrice (6.10) ha rango massimo; si ha $K = K(t) \subseteq \mathbb{R}^\ell$, $\mathcal{S}(t) = \{X \in \mathbb{R}^{3N} \mid f(X, t) = 0, t \text{ fissato}\}$, e la (6.17) è del tipo

$$(6.20) \quad X(q_1, \dots, q_\ell, t) = \begin{cases} x_1 = x_1(q_1, \dots, q_\ell, t) \\ y_1 = y_1(q_1, \dots, q_\ell, t) \\ z_1 = z_1(q_1, \dots, q_\ell, t) \\ \dots \\ \dots \\ x_N = x_N(q_1, \dots, q_\ell, t) \\ y_N = y_N(q_1, \dots, q_\ell, t) \\ z_N = z_N(q_1, \dots, q_\ell, t) \end{cases}$$

Le (6.18) rimangono identiche, dato che le derivate riguardano solo le variabili lagrangiane q_1, \dots, q_ℓ .

6.2 Spazio normale, spazio tangente

Partiamo dal caso $m = 1$, $N = 1$ con P vincolato da $f(P, t) = 0$. Sia il vincolo indipendente in $P_0 \in \mathcal{S}(t)$ per un t fissato e si consideri l'insieme dei vettori applicati in P_0

$$(6.21) \quad \mathcal{N}_{P_0}(t) = \{(P_0, \mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in V_\Sigma, \mathbf{u} = \lambda \nabla f(P_0, t), \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{S}(t) \times V_\Sigma.$$

La scrittura in coordinate cartesiane (vedi (6.9)) dello spazio normale è

$$(6.22) \quad \mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}(t) = \{(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} = \lambda \nabla \hat{f}(\mathbf{x}_0, t), \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \hat{\mathcal{S}}(t) \times \mathbb{R}^3,$$

se \mathbf{x}_0 sono le coordinate di P_0 nel riferimento cartesiano.

Graficamente, l'insieme consiste in tutti e soli i vettori ortogonali alla superficie $f(P, t) = 0$ nel punto P_0 all'istante t . Per la (6.11), il vincolo è indipendente se e solo se il vettore $\nabla f(P_0, t)$ è non nullo.

Si verifica immediatamente che $\mathcal{N}_{P_0}(t)$ è uno **spazio vettoriale** di dimensione 1 generato da $\nabla f(P_0, t)$. Lo spazio (6.26) viene detto **spazio normale** all'insieme di livello $f(P, t) = 0$ nel punto P_0 all'istante t .

Chiamiamo allo stesso modo lo spazio $\mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}(t)$ **spazio normale** alla superficie di livello $f(x, y, z, t) = 0$ nel punto \mathbf{x}_0 all'istante t .

Sia ora (6.15) una parametrizzazione locale per $f(x, y, z, t) = 0$: per un istante t fissato e in corrispondenza di una posizione $P_0 \in \mathcal{S}(t)$ di coordinate $\mathbf{x}_0 = X(u_0, v_0, t)$ per opportuni $(u_0, v_0) \in V(t)$, si considerino le combinazioni lineari dei vettori (6.14):

$$(6.23) \quad \mathcal{T}_{P_0}(t) = \{(P_0, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} = \beta_1 X_u(u_0, v_0, t) + \beta_2 X_v(u_0, v_0, t), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathcal{S}(t) \times \mathbb{R}^3$$

viene detto **spazio tangente** in P_0 all'istante t . Nella (6.23) va riconosciuta la definizione (1.14) (oppure la (1.15)): l'unica differenza è l'ambientazione in \mathbb{R}^3 , anziché in una costruzione dell'insieme per ogni t fissato. Graficamente, l'insieme (6.23) consiste in tutti e soli i vettori applicati in P_0 e appartenenti al piano tangente alla superficie \mathcal{S} in P_0 all'istante fissato t . Non è difficile verificare che

1. se il vincolo è indipendente in P_0 i due vettori $X_u(u_0, v_0, t)$ e $X_v(u_0, v_0, t)$ sono **linearmente indipendenti**, qualunque sia la parametrizzazione;
2. l'insieme (6.23) è uno **spazio vettoriale** di dimensione 2 generato dai vettori $\langle X_u(u_0, v_0, t), X_v(u_0, v_0, t) \rangle$;
3. gli spazi (6.22) e (6.23) sono l'uno il **complemento ortogonale** dell'altro, nel senso che

$$(6.24) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \forall (P_0, \mathbf{u}) \in \mathcal{N}_{P_0}(t), \forall (P_0, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}_{P_0}(t),$$

in virtù della (6.13);

4. lo spazio dei vettori applicati in P_0 è la **somma diretta** dei due spazi (6.22), (6.23):

$$(6.25) \quad \mathcal{T}_{P_0}\Sigma = \{(P_0, \mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in V_\Sigma\} = \mathcal{T}_{P_0}(t) \oplus \mathcal{N}_{P_0}(t).$$

Esercizio 6.3 *Calcoliamo, ad esempio, gli spazi (6.22), (6.23) per il sistema E6, nella posizione P_0 di coordinate, rispetto al sistema cartesiano fissato, $(-R(t), 0, 1)$, t fissato.*

Svolgimento. Il punto P_0 è in $\mathcal{S}(t)$, dato che le coordinate verificano $x^2 + y^2 - R^2(t) = 0$; le coordinate lagrangiane del punto sono $u = 1, v = 0$ secondo la parametrizzazione II di (6.16).

Si ha

$$\nabla f(x, y, z, t)|_{x=-R(t), y=0, z=1} = (-2R(t), 0, 0),$$

$$X_u(u, v, t)|_{u=1, v=0} = (0, 0, 1), \quad X_v(u, v, t)|_{u=1, v=0} = (0, R(t), 0).$$

L'insieme (6.22) è dunque l'unidimensionale dei vettori applicati in $(-R(t), 0, 1)$ con direzione \mathbf{i} [geometricamente da identificare con la **retta ortogonale** alla superficie cilindrica in P_0]:

$$\mathcal{N}_{P_0}\mathcal{S}(t) = \{((-R(t), 0, 1), \mathbf{u}) \mid \mathbf{u} = \lambda \mathbf{i}, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

mentre (6.23) è lo spazio bidimensionale dei vettori applicati in $(-R(t), 0, 1)$ generato da $\langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ [da identificare con il **piano tangente** alla superficie cilindrica in P_0]:

$$\mathcal{T}_{P_0}\mathcal{S}(t) = \{((-R(t), 0, 1), \mathbf{v}) \mid \mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{j} + \beta_2 \mathbf{k}, (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

La proprietà (6.24) è evidente.

Passiamo ora al caso generale $m \geq 1$, $N \geq 1$: siano P_1, \dots, P_N vincolati come in (6.8) e $P_0 \in \mathcal{S}(t)$ (vedi (6.6)) di coordinate $X_0 \in \mathbb{R}^{3N}$. Se i vincoli sono indipendenti, le combinazioni lineari dei vettori (6.11) definiscono lo **spazio normale** in P_0 al tempo t :

$$(6.26) \quad \mathcal{N}_{P_0}(t) = \{(P_0, \mathbf{u}) \mid \mathbf{u} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \nabla_P f_k(P_0, t), (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathcal{S}(t) \times V_{\Sigma}^N$$

Per ogni t fissato e in ogni posizione $P_0 \in \mathcal{S}(t)$ $\mathcal{N}_{P_0}(t)$ è **canonicamente isomorfo** allo **spazio vettoriale** di dimensione m

$$(6.27) \quad \mathbb{N}_{P_0}(t) = \{\mathbf{u} \in V_{\Sigma}^N \mid (P_0, \mathbf{u}) \in \mathcal{N}_{P_0}(t)\} \subseteq V_{\Sigma}^N$$

mediante l'isomorfismo $(P_0, \mathbf{u}) \leftrightarrow \mathbf{u}$. Una base per $\mathbb{T}_{P_0}(t)$ è

$$(6.28) \quad \langle \nabla_P f_1(P_0, t), \dots, \nabla_P f_m(P_0, t) \rangle.$$

Si considerino ora ad un istante t fissato le (??) nella posizione $P_0 = P(q_0, t)$, $q_0 = (q_1^0, \dots, q_{\ell}^0) \in K$. Le ℓ curve in Σ^N

$$(6.29) \quad \Gamma_k(\lambda, t) = P((q_1^0, \dots, q_{k-1}^0, q_k^0 + \lambda, q_{k+1}^0, \dots, q_{\ell}^0), t), \quad \lambda \in (-\alpha, \alpha), \alpha > 0, \quad k = 2, \dots, \ell - 1,$$

con α in modo che $(q_1^0, \dots, q_{k-1}^0, q_k^0 + \lambda, q_{k+1}^0, \dots, q_{\ell}^0) \in K$ per $\lambda \in (-\alpha, \alpha)$, sono le **linee coordinate** associate al sistema di parametri (q_1, \dots, q_{ℓ}) , all'istante fissato t .

Generalizzando le (1.4), si ha che i vettori tangenti corrispondono a

$$(6.30) \quad \Gamma'_j(0, t) = \frac{\partial P}{\partial q_j}(q_0, t), \quad j = 1, \dots, \ell$$

essendo $q_0 = (q_1^0, \dots, q_{\ell}^0)$.

Definizione 6.1 Fissato un istante t ed una posizione $P_0 \in \mathcal{S}(t)$, l'insieme dei vettori applicati in P_0

$$(6.31) \quad \mathcal{T}_{P_0}(t) = \left\{ (P_0, \mathbf{v}) \mid \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j \frac{\partial P}{\partial q_j}(q_0, t), (\beta_1, \dots, \beta_{\ell}) \in \mathbb{R}^{\ell} \right\} \subseteq \mathcal{S}(t) \times V_{\Sigma}^N$$

viene detto **spazio tangente** in P_0 all'istante t .

Per ogni t fissato e in ogni posizione $P_0 \in \mathcal{S}(t)$ $\mathcal{T}_{P_0}(t)$ è **canonicamente isomorfo** allo **spazio vettoriale** di dimensione ℓ

$$(6.32) \quad \mathbb{T}_{P_0}(t) = \{\mathbf{v} \in V_{\Sigma}^N \mid (P_0, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}_{P_0}(t)\} \subseteq V_{\Sigma}^N$$

mediante l'isomorfismo $(P_0, \mathbf{v}) \leftrightarrow \mathbf{v}$. Una base per $\mathbb{T}_{P_0}(t)$ è

$$(6.33) \quad \left\langle \frac{\partial P}{\partial q_1}(q_0, t), \dots, \frac{\partial P}{\partial q_{\ell}}(q_0, t) \right\rangle.$$

Ci riferiamo ugualmente ai sottospazi vettoriali di V_{Σ}^N (6.27) e (6.32) come, rispettivamente, allo **spazio normale** e allo **spazio tangente** in P_0 all'istante t .

Proprietà 6.1 Gli spazi $\mathbb{N}_{P_0}(t)$ e $\mathbb{T}_{P_0}(t)$ sono ad ogni istante e per ogni $P_0 \in \mathcal{S}(t)$ fra loro **ortogonali** rispetto al prodotto scalare euclideo (??) in Σ^N , ovvero

$$(6.34) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{T}_{P_0}(t), \mathbf{v} \in \mathbb{N}_{P_0}(t)$$

Dim. Da (6.1) e da (??) si ha

$$(6.35) \quad f_j(P(q, t), t) \equiv 0 \quad \forall q \in K, \quad j = 1, \dots, m.$$

Se dunque si considera, fissato un istante t e scelto j fra $1 \leq j \leq m$, la funzione $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\varphi(q) = f_j(P(q, t), t)$, troviamo

$$0 \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} = \nabla_P f_j(P(q, t), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial q_k}$$

per ogni j , $j = 1, \dots, m$ e per ogni k , $k = 1, \dots, \ell$. Pertanto, ricordando anche la (6.30) ogni vettore della base di $\mathbb{N}_{P_0}(t)$ è ortogonale ad ogni vettore della base di $\mathbb{T}_{P_0}(t)$ e la (6.34) è dimostrata. \square

Corollario 6.1 *Ad ogni istante t fissato ed in ogni posizione $P \in \mathcal{S}(t)$ lo spazio V_Σ^N è la somma diretta*

$$(6.36) \quad V_\Sigma^N = \mathbb{T}_{P_0}(t) \oplus \mathbb{N}_{P_0}(t)$$

In conseguenza della (6.36) si ha anche il fatto che $\mathbb{V}_{P_0}(t)$, come complemento ortogonale di $\mathbb{N}_{P_0}(t)$, è indipendente dalla scelta della parametrizzazione.

6.3 Cinematica: velocità possibili

6.4 Energia cinetica nelle variabili lagrangiane

6.5 Dinamica: Equazioni di Lagrange

6.6 Equilibrio e piccole oscillazioni

7 Esempi di studio del moto rigido, A. A. 2010/11

Per la parte teorica dello studio dei **sistemi rigidi** si deve fare riferimento alle Dispense del Corso di Teoria di Sistemi Dinamici.

Negli appunti che seguono si esaminano in dettaglio alcuni esercizi, aprendo eventualmente alcune parentesi per approfondire aspetti teorici o per generalizzare la particolare istanza a situazioni simili.

7.1 Esercizio 1

Sia \mathcal{A} una sbarretta omogenea di estremi A, B , massa $m_{\mathcal{A}}$ e lunghezza ℓ . L'estremo A è vincolato a scorrere su una guida rettilinea orizzontale r , l'estremo B sulla guida verticale s passante per $O \in r$. Sulla sbarretta agiscono la forza peso ed una forza elastica di costante $k > 0$ applicata nel punto A e di richiamo verso il punto O . I vincoli sono lisci.

- (i) Stabilire il numero dei gradi di libertà del sistema e introdurre opportune coordinate lagrangiane.
- (ii) Determinare la posizione del centro di massa P_0 del sistema.
- (iii) Scrivere la quantità di moto del sistema.
- (iv) Elencare tutte le forze che agiscono sul sistema, classificandole nella duplice suddivisione interne oppure esterne, direttamente applicate oppure vincolari.
- (v) Scrivere la prima equazione cardinale del sistema.
- (vi) Calcolare il vettore ω , velocità angolare del sistema.
- (vii) Scrivere l'energia cinetica T del sistema.
- (viii) Calcolare il momento della quantità di moto del sistema rispetto al punto M e rispetto al punto A .
- (ix) Scrivere la seconda equazione cardinale utilizzando M , punto medio della sbarretta, per il calcolo dei momenti.
- (x) Scrivere la medesima equazione rispetto al punto A .
- (xi) Esaminare le posizioni di equilibrio del sistema mediante le equazioni cardinali.
- (xii) Scrivere la Lagrangiana del sistema $\mathcal{L} = T + U$, U potenziale delle forze direttamente applicate.
- (xiii) Esaminare le posizioni di equilibrio del sistema mediante la stazionarietà del potenziale e determinarne il carattere stabile o instabile.
- (xiv) Scrivere le equazioni di moto di Lagrange.
- (xv) Fissate le condizioni di posizione iniziale e velocità angolare iniziale, stabilire quanto valgono le reazioni vincolari durante il moto del sistema, conoscendo solo l'inclinazione della sbarretta rispetto alle guide.

Svolgimento.

(i) Una definizione rigorosa di gradi di libertà è stata formulata per un sistema costituito da un numero finito di punti (**sistema discreto**), mediante il rango della matrice jacobiana delle funzioni che descrivono i vincoli.

Per un **sistema continuo**, ovvero un sistema rappresentabile come una curva, una superficie, o una regione dello spazio, possiamo utilizzare una definizione concreta di **gradi di libertà**, affermando che il numero di questi ultimi consiste nel **numero di parametri** q_1, \dots, q_ℓ , variabili in un aperto $K \subseteq \mathbb{R}^\ell$, in corrispondenza biunivoca con le configurazioni del sistema. Come nel caso dei sistemi discreti, la rappresentazione parametrica può essere locale, ovvero la totalità delle configurazioni può richiedere più aperti connessi K_1, \dots, K_N per essere completamente descritta.

Nel caso dell'esercizio, la posizione dell'asta è completamente determinata fissando ad esempio l'angolo ϑ che la direzione $B - A$ forma con la guida orizzontale: il sistema ha dunque un solo grado di libertà e ϑ è la coordinata lagrangiana scelta, $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

Il **sistema di riferimento** è generalmente suggerito dalla geometria del problema: nel nostro caso, è naturale porre la guida r come asse x , la retta s come asse y . Chiamiamo \mathbf{i} e \mathbf{j} i versori degli assi. L'angolo ϑ , fra le direzioni orientate $B - A$ e \mathbf{i} , è scelto crescente nel verso orario.

Le posizioni dei punti significativi sono determinate dai vettori

$$(7.1) \quad A - O = \ell \cos \vartheta \mathbf{i}, \quad B - O = \ell \sin \vartheta \mathbf{j}, \quad M - O = \frac{\ell}{2}(\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{j})$$

essendo M il punto medio della sbarretta.

(ii) Il **centro di massa** P_0 di un sistema discreto di punti P_1, \dots, P_N di masse rispettivamente m_1, \dots, m_N è, per definizione

$$(7.2) \quad P_0 - Q = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - Q)$$

dove $m = \sum_{i=1}^N m_i$ e Q è un punto arbitrario in Σ . Si verifica subito che la definizione (7.2) è indipendente da Q .

Definito un **piano di simmetria materiale** del sistema discreto come un piano in Σ di **simmetria geometrica** con la proprietà ulteriore che i punti simmetrici hanno **medesima massa**, si ha la seguente utile

Proprietà 7.1 *Se esiste un piano di simmetria materiale Π_0 per il sistema di punti, allora $P_0 \in \Pi_0$.*

Dim. Per definizione, il sistema è costituito da coppie di punti (P_h, P_k) che hanno medesima distanza da Π_0 e medesima massa m_h , oppure da punti singoli P_r che appartengono al piano Π_0 .

Sia Q un punto di Π_0 . E' immediato comprendere che nella sommatoria (7.2) sia ogni vettore $m_r(P - r_0)$ che ogni vettore $m_h[(P_h - Q) + (P_k - Q)]$ appartiene a Π_0 , dunque $P_0 - Q$ è parallelo a Π_0 e $P_0 \in \Pi_0$. \square

Per un **sistema continuo** \mathcal{C} di massa $m = \int_{\mathcal{C}} \varrho(P) dP$, dove $\varrho(P)$ è la densità, la definizione di **centro di massa** consiste in

$$(7.3) \quad P_0 - Q = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} \varrho(P)(P - Q) dP$$

e l'integrale è di linea, di superficie o di volume, a seconda della geometria del sistema.

La Proprietà 3.1 continua a valere, intendendo la simmetria materiale come simmetria geometrica più simmetria della funzione $\varrho(P)$ rispetto al piano π_0 (ovvero punti simmetrici rispetto a π_0 devono avere medesima densità).

Se il mezzo continuo è un **omogeneo**, ovvero a densità costante, si trova $\varrho = \frac{m}{\text{mis } \mathcal{C}}$, essendo $\text{mis } \mathcal{C} = \int_{\mathcal{C}} dP$ la misura del mezzo continuo (la lunghezza, l'area o il volume), pertanto

$$(7.4) \quad P_0 - Q = \frac{1}{\text{mis } \mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} (P - Q) dP.$$

Per un mezzo continuo omogeneo dunque la **simmetria materiale** coincide con la **simmetria geometrica** e la Proprietà 3.1 viene utilizzata, una volta stabilite eventuali simmetrie del sistema, per individuare P_0 evitando il calcolo di integrali.

Ad esempio, per un **disco omogeneo**, il piano Π contenente il disco e ogni piano del fascio che ha per asse la retta r passante per il centro del disco e ortogonale a Π è di simmetria, dunque il centro di massa è il **centro del disco**.

Per l'asta omogenea si ragiona ugualmente concludendo che il centro di massa è il **punto medio** dell'asta: nel caso dell'Esercizio si tratta del punto M .

(iii) Per il calcolo della **quantità di moto** \mathbf{K} si utilizza la relazione

$$(7.5) \quad \mathbf{K} = m\dot{\mathbf{P}}_0$$

dove m è la massa totale del sistema. Dunque

$$(7.6) \quad \mathbf{K} = m_A \dot{\mathbf{M}} = m_A \frac{\ell}{2} \dot{\vartheta} (-\sin \vartheta \mathbf{i} + \cos \vartheta \mathbf{j}).$$

(iv) Esaminiamo ora le forze a cui è soggetto il sistema. In generale, le **forze direttamente applicate** sono i campi applicati di forze o le forze agenti in un singolo punto, mediante assegnazione diretta e contenute nel testo dell'Esercizio; le **forze vincolari** consistono nell'insieme delle forze che si introducono durante la risoluzione al fine di realizzare le restrizioni descritte nel testo.

In base ad una differente suddivisione, basata sul III Principio della Dinamica (azione–reazione), si chiamano forze **interne** ad un sistema materiale le mutue azioni fra parti del sistema, **esterne** quelle di interazione con parti esterne al sistema in esame. Nel caso dell'Esercizio, si hanno le

- **forze direttamente applicate:** il campo della forza peso \mathbf{F}^{peso} dei punti del sistema, la forza elastica \mathbf{F}^{el} applicata in A ,
- **forze vincolari:** la forza Φ_A applicata in A che vincola l'estremo dell'asta alla guida orizzontale e la forza Φ_B che costringe il punto B sulla guida verticale

Le forze elencate sono tutte **esterne**.

Sono utili le seguenti osservazioni.

- ▷ Il campo della forza peso di un sistema di più punti è un sistema di **vettori paralleli**, tutti aventi la direzione della verticale, il cui centro è il centro di massa del sistema dei punti: si considera dunque il sistema di forze equivalente dato dalla **risultante** applicata nel **centro di massa**. Se il sistema è composto da più parti rigide, conviene utilizzare questa proprietà per ogni singola parte.
- ▷ Fra i vincoli non si considerano i vincoli di rigidità. Allo stesso modo, se il sistema è piano ed è soggetto a forze direttamente applicate contenute sul piano, è ragionevole prendere in considerazione solo le forze vincolari appartenenti al piano del moto, tralasciando quelle che effettivamente mantengono il moto sul piano (nel caso dell'Esercizio, dirette come $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$).
- ▷ L'appartenenza di una forza alla categoria interna oppure esterna dipende dal sistema di punti che si vuole esaminare: se, ad esempio, nell'Esercizio in esame si aggiungesse un punto che può scorrere lungo la sbarra, la forza vincolare esercitata sul punto sarebbe esterna.

Per quanto riguarda l'Esercizio 1, rispetto al sistema di riferimento scelto le forze direttamente applicate si scrivono come

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}^{peso} &= -m_A g \mathbf{j} \quad \text{applicata in } M, \\ \mathbf{F}^{el} &= -k(A - O) = -k\ell \cos \vartheta \mathbf{i} \quad \text{applicata in } A \end{aligned}$$

essendo $g > 0$ la costante di gravitazione universale.

Nella scrittura delle forze vincolari si deve tenere conto del fatto che i vincoli sono lisci. Per il moto di un punto su una curva o su una superficie fissa tale ipotesi consiste nell'ortogonalità della forza vincolare rispetto a tutte le possibili velocità del punto. Nella situazione in esame si deve trasferire il medesimo concetto pensando al moto del punto A o del punto B sulle guide orizzontale e verticale. Dunque, ricavando da (7.1) le velocità degli estremi

$$(7.8) \quad \dot{\mathbf{A}} = -\ell \dot{\vartheta} \sin \vartheta \mathbf{i}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \ell \dot{\vartheta} \cos \vartheta \mathbf{j}$$

l'ipotesi di **vincoli lisci** comporta

$$(7.9) \quad \begin{aligned} \Phi_A &= \Phi_A \mathbf{j}, \quad \text{applicata in } A \\ \Phi_B &= \Phi_B \mathbf{i}, \quad \text{applicata in } B \end{aligned}$$

dove Φ_A e Φ_B sono due funzioni scalari incognite.

(v) La **prima equazione cardinale** consiste in $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{R}^{(e)}$, essendo \mathbf{K} la quantità di moto del sistema e $\mathbf{R}^{(e)}$ la risultante, ovvero la somma, delle forze esterne, direttamente applicate o vincolari. Nel nostro caso, la prima equazione cardinale si scrive in componenti (ricordare (7.6) e la scomposizione delle forze)

$$\begin{cases} m_A \frac{\ell}{2} \left(-\ddot{\vartheta} \sin \vartheta - \dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta \right) = -k\ell \cos \vartheta + \Phi_B \\ m_A \frac{\ell}{2} \left(\ddot{\vartheta} \cos \vartheta - \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta \right) = -m_A g + \Phi_A \end{cases}$$

ovvero

$$(7.10) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \left(-\ddot{\vartheta} \sin \vartheta - \dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta \right) = -\frac{k}{m_A} \cos \vartheta + \frac{\Phi_B}{m_A \ell} \\ \frac{1}{2} \left(\ddot{\vartheta} \cos \vartheta - \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta \right) = -\frac{g}{\ell} + \frac{\Phi_A}{m_A \ell}. \end{cases}$$

Le incognite nelle due equazioni (7.10), scritte con coefficienti dimensionalmente pari a tempo^{-2} , sono $\vartheta(t)$, Φ_A e Φ_B .

(vi) Il campo delle velocità di un sistema rigido \mathcal{S} è dato dalla formula

$$(7.11) \quad \dot{P}(t) = \dot{Q} + \omega \wedge (P - Q)$$

dove Q è fissato in \mathcal{S} e $P \in \mathcal{S}$ un generico punto del sistema; il vettore ω si dice **velocità angolare** di \mathcal{S} . La precedente formula è equivalente a

$$(7.12) \quad \dot{\mathbf{e}} = \omega \wedge \mathbf{e}$$

che verifica ogni **versore e solidale** con il mezzo rigido \mathcal{S} .

La seguente Proprietà permette di calcolare facilmente il vettore ω di un sistema rigido piano:

Proprietà 7.2 *Se il sistema rigido è piano e contenuto nel piano Π , allora*

$$(7.13) \quad \omega = \pm \dot{\varphi} \mathbf{k}$$

dove il versore \mathbf{k} è ortogonale a Π , φ è un qualunque angolo che una direzione solidale su Π forma con una direzione fissa e il segno \pm va scelto se la direzione orientata \mathbf{e} osserva φ crescere nel verso antiorario, - nel caso contrario.

Per la dimostrazione della Proprietà, oltre al calcolo della matrice ortogonale della rotazione \mathbf{e} , per derivazione, della matrice antisimmetrica che dà luogo al vettore ω , possiamo utilizzare la (7.12) scrivendo $\mathbf{e} = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}$, $\omega = \omega_i \mathbf{i} + \omega_j \mathbf{j} + \omega_k \mathbf{k}$, con \mathbf{i} e \mathbf{j} direzioni fisse e ortogonali in Π , $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$ e calcolando

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\varphi} (-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}) = \omega \wedge (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) = \omega_k (-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}) + (\omega_i \sin \varphi - \omega_j \cos \varphi) \mathbf{k}$$

da cui $\omega_i = \omega_j = 0$, $\omega_k = \dot{\varphi}$. Se il versore ortogonale a Π fosse $\mathbf{j} \wedge \mathbf{i}$, nella (7.13) si avrebbe il segno $-$. Nel caso dell'Esercizio 1, si ha

$$(7.14) \quad \omega = -\dot{\vartheta} \mathbf{k},$$

con $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$.

(vii) L'**energia cinetica** di un sistema rigido discreto \mathcal{S} viene scritta mediante (7.11):

$$(7.15) \quad T = \frac{1}{2} m \dot{Q}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\omega \wedge (P_i - Q)]^2 + m \dot{Q} \cdot \omega \wedge (P_0 - Q)$$

dove $m = \sum_{i=1}^N$ è la massa complessiva.

E' chiaro che il calcolo dell'energia cinetica si semplifica nel caso in cui Q sia il centro di massa oppure un punto fermo (se esiste): in entrambe le circostanze l'ultimo termine (7.15) è nullo.

Per quanto riguarda il calcolo del termine con la sommatoria in (7.15), conviene avere presente il seguente argomento inerente alla **geometria delle masse** di un sistema, ovvero lo studio delle proprietà geometriche di un sistema provenienti dalla distribuzione delle masse nel sistema medesimo.

In generale, per un sistema di punti materiali $(P_1, m_1), \dots, (P_N, m_N)$, fissata una retta r di versore orientato \mathbf{e}_r e fissato $Q \in r$ un punto su di essa, lo scalare non negativo

$$(7.16) \quad I_r = \sum_{i=1}^N m_i [(P_i - Q) \wedge \mathbf{e}_r]^2$$

viene detto **momento di inerzia** di secondo grado del sistema rispetto alla retta di direzione \mathbf{e}_r e passante per Q .

Il **momento deviatore** o **momento centrifugo** del sistema di punti rispetto alla coppia di piani non paralleli Π_1, Π_2 consiste in:

$$(7.17) \quad I_{\Pi_1, \Pi_2} = - \sum_{i=1}^N m_i [(P_i - Q) \cdot \mathbf{e}_1] [(P_i - Q) \cdot \mathbf{e}_2]$$

dove $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ sono versori ortogonali a Π_1, Π_2 , rispettivamente, e $Q \in \Pi_1 \cap \Pi_2$.
Le seguenti proprietà sono di immediata verifica.

Proprietà 7.3

1. *I momenti di inerzia I_r e I_{Π_1, Π_2} non dipendono dalla scelta di $Q \in r$ e di $Q \in \Pi_1 \cap \Pi_2$.*
2. *Il momento I_r è nullo se e solo se il sistema è costituito da punti tutti appartenenti alla retta r .*
3. *Ogni termine $[(P_i - Q) \wedge \mathbf{e}_r]^2$, $i = 1, \dots, N$, corrisponde al quadrato della distanza di P_i dalla retta r , così come ciascun termine $(P_i - Q) \cdot \mathbf{e}_k$, $k = 1, 2$, è in modulo la distanza di P_i da Π_k .*
4. *Se P_0 è il **centro di massa** (7.2) del sistema, valgono le relazioni (di **Huygens**)*

$$(7.18) \quad \begin{aligned} I_r &= I_{r_0} + m[(P_0 - Q) \wedge \mathbf{e}_r]^2 \\ I_{\Pi_1, \Pi_2} &= I_{\Pi_1^0, \Pi_2^0} - m[(P_0 - Q) \cdot \mathbf{e}_1] [(P_0 - Q) \cdot \mathbf{e}_2] \end{aligned}$$

dove I_r è il momento di inerzia del sistema calcolato rispetto alla retta r_0 di medesima direzione \mathbf{e}_r e passante per P_0 , $I_{\Pi_1^0, \Pi_2^0}$ è il momento deviatore calcolato rispetto alla coppia di piani Π_1^0, Π_2^0 paralleli a Π_1, Π_2 , rispettivamente, e passanti per P_0 .

5. *Se \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 sono versori ortogonali, allora detti I_{r_1}, I_{r_2} e I_s i momenti di inerzia rispetto, nell'ordine, alle rette di direzioni $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ e passanti per il medesimo punto Q , si ha*

$$(7.19) \quad I_s + I_{r_1} + I_{r_2} = 2 \sum_{i=1}^N m_i (P_i - Q)^2.$$

6. *Se il sistema di punti è contenuto nel piano Π dei versori ortogonali \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , si ha*

$$(7.20) \quad I_s = I_{r_1} + I_{r_2}$$

dove I_{r_1}, I_{r_2} e I_s sono come nel punto 5 e $Q \in \Pi$.

Per la (7.19), si utilizzino i passaggi

$$\begin{aligned} [(P_i - Q) \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)]^2 &= [\mathbf{e}_2 \cdot (P_i - Q)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \cdot (P_i - Q)\mathbf{e}_2]^2 = \\ &= [\mathbf{e}_1 \cdot (P_i - Q)]^2 + [\mathbf{e}_2 \cdot (P_i - Q)]^2 = 2(P_i - Q)^2 - [(P_i - Q) \wedge \mathbf{e}_1]^2 - [(P_i - Q) \wedge \mathbf{e}_2]^2. \end{aligned}$$

Infine, la (7.20) si ottiene osservando che, nel caso del sistema piano, si ha $I_s = \sum_{i=1}^N (P_i - Q)^2$, essendo $P_i - Q$ ortogonale a $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, per ogni $i = 1, \dots, N$.

Per un **sistema continuo** \mathcal{C} di densità $\varrho(P)$, le definizioni (7.16), (7.17), analogamente a (7.3), consistono nell'integrale di linea, di superficie o di volume

$$(7.21) \quad \begin{aligned} I_r &= \int_{\mathcal{C}} \varrho(P) [(P - Q) \wedge \mathbf{e}]^2 dP, \\ I_{\Pi_1, \Pi_2} &= - \int_{\mathcal{C}} \varrho(P) [(P - Q) \cdot \mathbf{e}_1] [(P - Q) \cdot \mathbf{e}_2] dP. \end{aligned}$$

Per un sistema continuo **omogeneo** di massa m le formule si scrivono

$$(7.22) \quad \begin{aligned} I_r &= \frac{m}{\text{mis } \mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} [(P - Q) \wedge \mathbf{e}]^2 dP, \\ I_{\Pi_1, \Pi_2} &= - \frac{m}{\text{mis } \mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} [(P - Q) \cdot \mathbf{e}_1] [(P - Q) \cdot \mathbf{e}_2] dP. \end{aligned}$$

Le Proprietà 3.3 sono estendibili in modo ovvio ai sistemi rigidi continui. Inoltre, fa comodo mettere in evidenza il carattere additivo del momento:

Proprietà 7.4 *Se un sistema continuo \mathcal{C} è unione di due continui: $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, $\text{mis}[\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2] = 0$, allora*

$$(7.23) \quad I_r(\mathcal{C}) = I_r(\mathcal{C}_1) + I_r(\mathcal{C}_2).$$

Come esempio, eseguiamo il calcolo di I_r per una sbarretta omogenea \mathcal{A} di estremi A e B , di massa $m_{\mathcal{A}}$ e di lunghezza ℓ . Calcoliamo il momento di inerzia I_{r_0} rispetto ad una qualunque retta di direzione \mathbf{e}_{r_0} ortogonale alla direzione $B - A$ e passante per il centro di massa. Scegliendo un riferimento ortogonale (ξ, η) in cui la sbarretta occupa le posizioni $-\ell/2 \leq \xi \leq \ell/2$ e \mathbf{e}_r è il versore dell'asse η , si ha che il centro di massa è nell'origine degli assi e il calcolo di (7.22) consiste in

$$(7.24) \quad I_{r_0} = \frac{m_{\mathcal{A}}}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} [\xi \mathbf{e}_{\xi} \wedge \mathbf{e}_{\eta}]^2 d\xi = \frac{m_{\mathcal{A}}}{\ell} \left. \frac{\xi^3}{3} \right|_{-\ell/2}^{\ell/2} = m_{\mathcal{A}} \frac{\ell^2}{12}.$$

essendo \mathbf{e}_{ξ} e \mathbf{e}_{η} i versori degli assi. Se occorre calcolare il momento di inerzia della medesima sbarretta rispetto ad una qualunque retta di direzione \mathbf{e}_r ortogonale alla direzione $B - A$ e passante da uno degli estremi, si utilizza (7.18) per ottenere

$$(7.25) \quad I_r = m_{\mathcal{A}} \frac{\ell^2}{12} + m_{\mathcal{A}} \frac{\ell^2}{4} = m_{\mathcal{A}} \frac{\ell^2}{3}.$$

La presenza del momento di inerzia nell'energia cinetica (7.15) è evidente nel termine con la sommatoria, se scriviamo $\omega = |\omega| \mathbf{e}_{\omega}$, quest'ultimo versore di direzione orientata ω :

$$\sum_{i=1}^N m_i [\omega \wedge (P_i - Q)]^2 = I_{\omega} \omega^2,$$

essendo I_{ω} il momento di inerzia del sistema calcolato rispetto alla retta passante per Q e di direzione ω . La medesima considerazione vale nel caso di un sistema continuo.

La (7.15) assume dunque la forma

$$(7.26) \quad T = \frac{1}{2} m \dot{Q}^2 + \frac{1}{2} I_{\omega} \omega^2 + m \dot{Q} \cdot \omega \wedge (P_0 - Q)$$

con l'annullamento dell'ultimo termine se $Q = P_0$ oppure se $\dot{Q} = \mathbf{0}$.

Tornando all'Esercizio 1, alla luce di quanto si è esposto, possiamo operare il calcolo in (7.15) e scrivere, ricordando la (7.6) e la (7.14):

$$(7.27) \quad T = \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}}\dot{M}^2 + \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}}\frac{\ell^2}{12}\omega^2 = m_{\mathcal{A}}\frac{\ell^2}{8}\dot{\vartheta}^2 + m_{\mathcal{A}}\frac{\ell^2}{24}\dot{\vartheta}^2 = m_{\mathcal{A}}\frac{\ell^2}{6}\dot{\vartheta}^2.$$

Naturalmente, l'utilizzo del punto A in (7.26) (al di là della convenienza della scelta) porta a (ricordare (7.8) e (7.25))

$$T = \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}}\ell^2\dot{\vartheta}^2 \sin^2 \vartheta + \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}}\frac{\ell^2}{3}\dot{\vartheta}^2 + m_{\mathcal{A}}(-\ell\dot{\vartheta} \sin \vartheta \mathbf{i}) \cdot (-\dot{\vartheta} \mathbf{k}) \wedge \frac{\ell}{2}(\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{j})$$

che coincide con (7.27).

(viii) Il **momento della quantità di moto** rispetto ad un punto Q di un sistema di punti consiste in

$$\mathbf{L}(Q) = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - Q) \wedge \dot{P}_i.$$

Nel caso di un sistema rigido di punti, la (7.11) e la (7.2) (oppure la (7.3)) comportano

$$(7.28) \quad \begin{aligned} \mathbf{L}(Q) &= m(P_0 - Q) \wedge \dot{Q} + \sum_{i=1}^N m_i (P_i - Q) \wedge [\omega \wedge (P_i - Q)], \\ \mathbf{L}(Q) &= m(P_0 - Q) \wedge \dot{Q} + \int_{\mathcal{C}} \varrho(P) (P - Q) \wedge [\omega \wedge (P - Q)] dP, \end{aligned}$$

rispettivamente nei casi discreto e continuo.

Il calcolo di \mathbf{L} fa intervenire le quantità tipiche della geometria delle masse di un sistema (7.16) e (7.17), come andiamo a verificare. Iniziamo ricordando che la posizione

$$(7.29) \quad \mathbf{v} \rightarrow \sigma(Q)(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - Q) \wedge [\mathbf{v} \wedge (P_i - Q)] \in V_{\Sigma}, \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\Sigma}$$

definisce un **endomorfismo** in V_{Σ} che viene detto **omografia di inerzia** del sistema discreto $(P_1, m_1), \dots, (P_N, m_N)$ rispetto al punto Q . L'analoga definizione con l'integrale al posto della sommatoria vale per un sistema continuo.

Per la scrittura della matrice $A(Q)$ dell'endomorfismo $\sigma(Q)$ rispetto ad una base fissata nello spazio $\mathcal{T}_Q \Sigma$ dei vettori applicati in Q , si può utilizzare la seguente significativa

Proprietà 7.5 Fissato $Q \in \Sigma$ si ha, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_{\Sigma}$, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \neq 0$:

$$(7.30) \quad \begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \sigma(Q)\mathbf{v} &= I_r |\mathbf{v}|^2, \\ \mathbf{u} \cdot \sigma(Q)\mathbf{v} &= I_{\Pi_1, \Pi_2} |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| + \sum_{i=1}^N m_i (P_i - Q)^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

dove I_r è il momento di inerzia (7.16) calcolato rispetto alla retta di direzione orientata \mathbf{v} passante per Q , I_{Π_1, Π_2} è il momento deviatore (7.17) calcolato rispetto alla coppia di piani passanti per Q e ortogonali alle direzioni \mathbf{u}, \mathbf{v} .

Dim. Per la prima in (7.30) basta ricordare la proprietà del prodotto misto $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$:

$$\mathbf{v} \cdot \sigma(Q)\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \sum_{i=1}^N m_i (P_i - Q) \wedge [\mathbf{v} \wedge (P_i - Q)] = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v} \wedge (P_i - Q) \cdot [\mathbf{v} \wedge (P_i - Q)] = I_r |\mathbf{v}|^2.$$

Per la seconda va invece ricordata l'identità del doppio prodotto vettoriale $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$:

$$\mathbf{u} \cdot \sigma(Q)\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - Q)^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \sum_{i=1}^N m_i [(P_i - Q) \cdot \mathbf{v}] [(P_i - Q) \cdot \mathbf{u}]$$

da cui la seconda delle (7.30). Si noti che $\mathbf{u} \cdot \sigma(Q)\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \sigma(Q)\mathbf{u}$. \square

La prima delle (7.30) permette le seguenti osservazioni:

1. una scrittura dell'energia cinetica alternativa a (7.26) è

$$(7.31) \quad T = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}\omega \cdot \sigma(Q)\omega + m\dot{Q} \cdot \omega \wedge (P_0 - Q),$$

2. la **forma quadratica** $\mathbf{v} \cdot \sigma(Q)\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in V_\Sigma$, è **semidefinita positiva**, ovvero $\mathbf{v} \cdot \sigma(Q)\mathbf{v} \geq 0 \forall \mathbf{v} \in V_\Sigma$ e **definita positiva** (ovvero $\mathbf{v} \cdot \sigma(Q)\mathbf{v} = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$) per ogni sistema non costituito da punti tutti allineati.

Se ora fissiamo un sistema di riferimento $\{Q, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle\}$ con $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ **base ortonormale** per $\mathcal{T}_Q\Sigma$, la matrice $A(Q)$ è la matrice delle componenti controvarianti $\alpha_{i,j}$, $i, j = 1, 2, 3$ tali che $\sigma(Q)\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{i,j}\mathbf{e}_j$. Essendo la base ortonormale, componenti controvarianti e covarianti coincidono, pertanto dalle (7.30) si ha

$$(7.32) \quad A(Q) = \begin{pmatrix} I_1 & I_{1,2} & I_{1,3} \\ I_{2,1} & I_2 & I_{2,3} \\ I_{3,1} & I_{3,2} & I_3 \end{pmatrix}$$

dove:

I_1, I_2, I_3 sono i **momenti di inerzia** (7.16) calcolati rispetto agli assi coordinati, ovvero le tre rette passanti per Q di direzione orientata $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ rispettivamente.

$I_{1,2} = I_{2,1}, I_{1,3} = I_{3,1}, I_{2,3} = I_{3,2}$ sono i **momenti deviatori** (7.17) rispetto alle coppie di piani coordinati, ovvero rispetto alle coppie di piani contenenti Q e di versori normali $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3), (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, rispettivamente.

La matrice simmetrica $A(Q)$ è, per il Teorema spettrale, diagonalizzabile, ovvero esiste una matrice ortogonale B tale che $BAB^T = BAB^{-1}$ è una matrice diagonale. La matrice B è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ a $\bar{\mathcal{B}} = \langle \bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3 \rangle$ e rispetto a quest'ultima la matrice dell'endomorfismo $\sigma(Q)$ è diagonale, con elementi diagonali non negativi. Si ha dunque la notevole

Proprietà 7.6 *Esiste una base per $\mathcal{T}_Q\Sigma$ rispetto alla quale la matrice dell'endomorfismo (7.29) è costituita dai momenti di inerzia non negativi rispetto alle direzioni degli assi e dai momenti deviatori rispetto ai piani coordinati tutti nulli.*

Un sistema di riferimento $\{Q, \bar{\mathcal{B}}\}$ con le caratteristiche della Proprietà appena scritta si dice **terna principale di inerzia**.

Diremo che la direzione \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$ è una **direzione principale di inerzia** se i due momenti deviatori $I_{i,j}$, $j = 1, 2, 3, j \neq i$ che compaiono nella i -esima riga di (7.32) sono entrambi nulli. Una terna principale è dunque costituita da tre direzioni principali di inerzia mutuamente ortogonali.

Se $Q = P_0$, centro di massa, la terna viene detta **terna principale centrale di inerzia**.

La ricerca delle direzioni principali consiste nel problema algebrico di diagonalizzazione della matrice (7.32). D'altra parte, eventuali simmetrie del sistema di punti permettono di costruire geometricamente un sistema di riferimento principale, analogamente a quanto si è visto per la ricerca del centro di massa del sistema.

Le principali regole che è utile avere presente per la ricerca delle direzioni principali sono riassunte nella

Proposizione 7.1

1. Se Π è un **piano di simmetria materiale** per il sistema di punti e Q è un qualunque punto del piano, allora la retta ortogonale a Π passante per Q individua una direzione principale di inerzia.
2. Se $\{P_0, \bar{\mathcal{B}}\}$ è una **terna principale centrale di inerzia**, qualunque sistema di riferimento $\{Q, \bar{\mathcal{B}}\}$ con Q appartenente ad uno degli assi principali, è principale di inerzia.

Dim. Per il punto 1, sia $Q \in \Pi$, r ortogonale a Π in Q e Π_1 un qualunque piano contenente r . Il momento deviatore (7.17) è

$$I_{\Pi, \Pi_1} = - \sum_{i=1}^N m_i \left\{ [(P_i^{(1)} - Q) \cdot \mathbf{e}] [(P_i^{(1)} - Q) \cdot \mathbf{e}_1] + [(P_i^{(2)} - Q) \cdot \mathbf{e}] [(P_i^{(2)} - Q) \cdot \mathbf{e}_1] \right\}$$

con \mathbf{e} e \mathbf{e}_1 versori ortogonali rispettivamente a Π e Π_1 e $P_i^{(1)}, P_i^{(2)}$ coppie di punti materiali simmetrici rispetto a Π . Essendo \mathbf{e}_1 parallelo a Π , si ha che $(P_i^{(1)} - Q) \cdot \mathbf{e}_1 = (P_i^{(2)} - Q) \cdot \mathbf{e}_1$; d'altra parte $(P_i^{(1)} - Q) \cdot \mathbf{e} = -(P_i^{(2)} - Q) \cdot \mathbf{e}$, dunque $I_{\Pi, \Pi_1} = 0$.

Il punto 2 è una conseguenza della seconda in (7.18): i momenti deviatori relativi al sistema $\{Q, \mathcal{B}\}$ verificano

$$I_{\Pi_i, \Pi_j} = -m[(P_0 - Q) \cdot \mathbf{e}_i] [(P_0 - Q) \cdot \mathbf{e}_j], \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j$$

essendo Π_1, Π_2, Π_3 i piani coordinati e $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = \mathcal{B}$. Dato che Q è per ipotesi su uno degli assi principali centrali, si ha che $P_0 - Q$ è ortogonale ad almeno uno dei versori della base \mathcal{B} . \square

La verifica delle seguenti conseguenze della Proposizione appena dimostrata viene lasciata per esercizio.

Corollario 7.1

1. Se il sistema di punti è piano, allora ogni retta ortogonale al piano che contiene i punti individua una direzione principale di inerzia.
2. Se si sono individuate in Q due direzioni principali di inerzia \mathbf{u} e \mathbf{v} fra loro ortogonali, allora una terna principale è costituita dalle direzioni \mathbf{u}, \mathbf{v} e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.
3. Se un sistema possiede due piani di simmetria materiale Π_1, Π_2 fra loro ortogonali, allora le direzioni ortogonali ai piani $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ formano una terna principale in qualunque punto $Q \in \Pi_1 \cap \Pi_2$.

Le considerazioni svolte nel caso discreto da (7.29) in poi sono facilmente estendibili al caso continuo.

Tornando alla (7.28), possiamo esprimere il momento della quantità di moto di un sistema rigido come

$$(7.33) \quad \mathbf{L}(Q) = m(P_0 - Q) \wedge \dot{Q} + \sigma(Q)\omega,$$

con la semplificazione $\mathbf{L}(Q) = \sigma(Q)\omega$ nel caso in cui $Q = P_0$ oppure nel caso in cui il sistema ha un punto fisso Q . Il calcolo del momento presuppone dunque la scrittura della matrice dell'omografia di inerzia: nelle applicazioni è evidentemente conveniente scegliere un sistema di riferimento **solidale** (in modo che i momenti in (7.32) siano costanti) e possibilmente **principale** (in modo che i momenti deviatori siano nulli).

Possiamo ora risolvere il punto (viii) dell'Esercizio 1. La formula (7.33) relativa al punto M , centro di massa, consiste in $\mathbf{L}(M) = \sigma(M)\omega$. Fissiamo un sistema di riferimento solidale in cui $\mathbf{e}_1 = (A - B)/\ell$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. Il sistema è ortonormale e individua tre direzioni principali: fra le varie possibilità di verifica, proponiamo le seguenti considerazioni:

- ▷ la direzione \mathbf{e}_3 ortogonale al piano del moto è principale per il punto 1 del Corollario 3.1,
- ▷ la direzione \mathbf{e}_1 è principale per il punto 1 della Proposizione 3.1, essendo il piano ortogonale a $B - A$ passante per M di simmetria materiale per la sbarretta,
- ▷ la direzione \mathbf{e}_2 è principale, in virtù del punto 2 del Corollario 3.1.

La (7.33), ricordando (7.14) e (7.24), si scrive dunque nel sistema di riferimento $\{M, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle\}$

$$(7.34) \quad \mathbf{L}(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_A \frac{\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m_A \frac{\ell^2}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\vartheta} \end{pmatrix} = -m_A \frac{\ell^2}{12} \dot{\vartheta} \mathbf{k}.$$

Per il calcolo di $\mathbf{L}(A)$ si può utilizzare la **formula di trasposizione dei momenti**

$$(7.35) \quad \mathbf{L}(Q_1) = \mathbf{L}(Q) + (Q - Q_1) \wedge \mathbf{K}, \quad \forall Q, Q_1 \in \Sigma$$

(osservare che la quantità di moto \mathbf{K} ha il ruolo di risultante) e scrivere, ricordando anche (7.6)

$$(7.36) \quad \begin{aligned} \mathbf{L}(A) &= -m_A \frac{\ell^2}{12} \dot{\vartheta} \mathbf{k} + \frac{\ell}{2} (-\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{j}) \wedge [m_A \frac{\ell}{2} \dot{\vartheta} (-\sin \vartheta \mathbf{i} + \cos \vartheta \mathbf{j})] = \\ &= \frac{1}{2} m_A \left(\frac{1}{3} - \cos^2 \vartheta \right) \ell^2 \dot{\vartheta} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Equivalentemente, anziché utilizzare (7.35), si può calcolare direttamente (7.33) come $\mathbf{L}(A) = m_A(M - A) \wedge \dot{A} + \sigma(A)\omega$ e scegliere in A il sistema di riferimento $\{A, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle\}$, con i medesimi versori del sistema scelto in M . Il sistema è ancora principale, per la Proposizione 3.1, punto 2. Si trova dunque, avendo presente anche (7.25):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(A) &= m_A \frac{\ell}{2} (-\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{j}) \wedge (-\ell \sin \vartheta \dot{\vartheta} \mathbf{i}) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_A \frac{\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & m_A \frac{\ell^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\vartheta} \end{pmatrix} = \\ &= m_A \left(\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right) \ell^2 \dot{\vartheta} \mathbf{k} \end{aligned}$$

che coincide con (7.36).

(ix) La **seconda equazione cardinale** consiste in

$$(7.37) \quad \dot{\mathbf{L}}(Q) = \mathbf{M}^{(e)}(Q) - \dot{Q} \wedge \mathbf{K}$$

dove $\mathbf{M}^{(e)}(Q)$ è il momento delle forze esterne agenti sul sistema, sia direttamente applicate che di tipo vincolare, calcolato rispetto al punto prescelto Q . Si osservi che, in base alla (7.5), se Q è il centro di massa del sistema il termine $\dot{Q} \wedge \mathbf{K}$ è nullo.

Nel caso dell'Esercizio, scegliendo $Q = M$, si ha

$$(7.38) \quad \begin{aligned} \mathbf{M}^{(e)}(M) &= (A - M) \wedge \Phi_A + (B - M) \wedge \Phi_B + (A - M) \wedge [-k(A - O)] = \\ &= \frac{\ell}{2} \cos \vartheta \mathbf{i} \wedge \Phi_A \mathbf{j} + \frac{\ell}{2} \sin \vartheta \mathbf{j} \wedge \Phi_B \mathbf{i} - \frac{k\ell^2}{2} (-\sin \vartheta \mathbf{j}) \wedge \cos \vartheta \mathbf{i} = \\ &= \frac{\ell}{2} (\Phi_A \cos \vartheta - \Phi_B \sin \vartheta - k\ell \sin \vartheta \cos \vartheta) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Derivando rispetto a t la (7.34) si arriva alla scrittura della seconda equazione cardinale (7.37) per il moto della sbarretta:

$$(7.39) \quad \frac{1}{6} \ddot{\vartheta} = -\frac{\Phi_A}{m_A \ell} \cos \vartheta + \frac{\Phi_B}{m_A \ell} \sin \vartheta + \frac{k}{m_A} \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

La (7.39) va considerata unitamente alla prima equazione cardinale (7.10), come insieme di tre equazioni nelle tre incognite ϑ , Φ_A e Φ_B .

In generale, utilizzare le (7.10) per eliminare le reazioni vincolari da (7.39) porta alla scrittura dell'**equazione pura del moto**, ovvero nella sola incognita ϑ : nel nostro caso, moltiplicando le (7.10) rispettivamente per $\sin \vartheta$, $\cos \vartheta$ e sostituendo in (7.39), si trova l'equazione pura del moto

$$(7.40) \quad \frac{2}{3} \ddot{\vartheta} = \frac{2k}{m_A} \sin \vartheta \cos \vartheta - \frac{g}{\ell} \cos \vartheta.$$

La (7.40) si presta al confronto con l'equazione di moto lagrangiana, priva per definizione delle forze vincolari.

(x) Se ci riferiamo al punto A per il calcolo dei momenti, si trova da (7.7):

$$(7.41) \quad \begin{aligned} \mathbf{M}^{(e)}(A) &= (M - A) \wedge \mathbf{F}^{peso} + (B - A) \wedge \Phi_B = -\frac{\ell}{2} \cos \vartheta \mathbf{i} \wedge (-m_A g \mathbf{j}) + \ell \sin \vartheta \mathbf{j} \wedge \Phi_B \mathbf{i} = \\ &= \ell \left(\frac{m_A}{2} g \cos \vartheta - \Phi_B \sin \vartheta \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Formalmente, possiamo anche riferirci alla formula di trasposizione $\mathbf{M}^{(e)}(A) = \mathbf{M}^{(e)}(M) + (M - A) \wedge \mathbf{R}^{(e)}$ per ottenere il medesimo risultato.

Da (7.8) e da (7.6) si trova $\dot{A} \wedge \mathbf{K} = -\frac{m_A \ell^2}{2} \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \mathbf{k}$, dunque la (7.37) riferita ad A per il calcolo dei momenti si scrive, ricordando la (7.36):

$$\frac{m_A \ell^2}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{1}{3} - \cos^2 \vartheta \right) \dot{\vartheta} \right] = \frac{m_A \ell}{2} g \cos \vartheta - \Phi_B \ell \sin \vartheta + \frac{m_A \ell^2}{2} \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

ovvero

$$(7.42) \quad \left(\frac{1}{3} - \cos^2 \vartheta \right) \ddot{\vartheta} = \frac{g}{\ell} \cos \vartheta - \frac{2\Phi_B}{m_A \ell} \sin \vartheta - \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Ovviamente, il sistema di equazioni (7.10), (7.39) deve essere equivalente al sistema (7.10), (7.42): la semplice verifica è lasciata per esercizio.

In modo alternativo, si può dedurre la seconda equazione cardinale riferita al punto A da quella già scritta per il punto M . In effetti, supponiamo di avere già scritto la (7.37) e di voler scrivere l'equazione $\dot{\mathbf{L}}(Q_1) = \mathbf{M}^{(e)}(Q_1) - \dot{Q}_1 \wedge \mathbf{K}$. Utilizzando le formule di trasposizione dei momenti della quantità di moto e delle forze esterne, si verifica subito che

$$(7.43) \quad \dot{\mathbf{L}}(Q_1) - [\mathbf{M}^{(e)}(Q_1) - \dot{Q}_1 \wedge \mathbf{K}] = \dot{\mathbf{L}}(Q) - [\mathbf{M}^{(e)}(Q) - \dot{Q} \wedge \mathbf{K}] - (Q - Q_1) \wedge \mathbf{R}^{(e)},$$

dunque la scrittura della seconda equazione cardinale riferita a Q_1 necessita solo del calcolo di $(Q - Q_1) \wedge \mathbf{R}^{(e)}$, una volta scritta la (7.37).

(xi) Le **posizioni di equilibrio**, soluzioni costanti delle equazioni cardinali, corrispondono alle soluzioni del sistema $\mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}^{(e)} = \mathbf{0}$. Il calcolo del momento è indipendente dal polo, essendo la risultante nulla. Nel caso dell'Esercizio 1, troviamo da (7.10) e da (7.38):

$$(7.44) \quad \begin{cases} \Phi_B = k\ell \cos \vartheta \\ \Phi_A = m_A g \\ -\Phi_A \cos \vartheta + \Phi_B \sin \vartheta + k\ell \sin \vartheta \cos \vartheta = 0. \end{cases}$$

Utilizzando (7.41) anziché (7.38), la terza equazione in (7.44) di annullamento del momento va sostituita con $\Phi_A \cos \vartheta = 2\Phi_B \sin \vartheta$: il sistema ottenuto è equivalente a (7.44) (verificare).

Le tre incognite nelle (7.44) sono le posizioni di equilibrio ϑ e le corrispondenti reazioni vincolari Φ_A , Φ_B . Sostituendo nelle terza equazione, si ha

$$(7.45) \quad \cos \vartheta \left(\sin \vartheta - \frac{\alpha}{2} \right) = 0$$

essendo α il parametro adimensionale positivo $m_A g / k\ell$. Nell'intervallo $0 \leq \vartheta < 2\pi$ le soluzioni di (7.45) sono $\vartheta = \pi/2$, $\vartheta = 3\pi/2$ e i due angoli ϑ^* , $\pi - \vartheta^*$, con $0 < \vartheta^* < \pi/2$, soluzioni di $\sin \vartheta = \alpha/2$, nel caso in cui $\alpha < 2$ (α piccolo, fisicamente, significa che la molla riesce a contrastare il peso).

(xii) La **Lagrangiana** del sistema è $\mathcal{L} = T + U$, dove U è il potenziale delle forze direttamente applicate, che devono dunque essere di tipo gradiente. Nel caso dell'Esercizio, le forze (7.7) si riconducono al potenziale della forza peso $\mathcal{U}^{peso}(x, y, z) = -mgz$ e a quello della forza elastica $\mathcal{U}^{el}(x, y, z) = -\frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$. Le coordinate

devono essere quelle dei punti nei quali agisce ciascuna forza, in questo caso le coordinate (x_M, y_M, z_M) di M per la forza peso e le coordinate (x_A, y_A, z_A) di A per la forza elastica:

$$\mathcal{U}(x_M, y_M, z_M, x_A, y_A, z_A) = \mathcal{U}^{peso}(x_M, y_M, z_M) + \mathcal{U}^{el}(x_A, y_A, z_A),$$

che si esprime nella coordinata lagrangiana come (vedi (7.1))

$$(7.46) \quad U(\vartheta) = -m_A g \frac{\ell}{2} \sin \vartheta - \frac{k}{2} \ell^2 \cos^2 \vartheta.$$

Si ha dunque ricordando (7.27):

$$(7.47) \quad \mathcal{L}(\vartheta, \dot{\vartheta}) = m_A \frac{\ell^2}{6} \dot{\vartheta}^2 - m_A g \frac{\ell}{2} \sin \vartheta - \frac{k}{2} \ell^2 \cos^2 \vartheta.$$

(xiii) Le posizioni di **equilibrio** utilizzando il potenziale U corrispondono alle soluzioni di

$$0 = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -m_A g \frac{\ell}{2} \cos \vartheta + k \ell^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

che equivale alla (7.45). L'uso del potenziale permette di comprendere agevolmente il carattere **stabile** o **instabile** delle posizioni trovate: in base al Criterio di Dirichlet, le posizioni stabili corrispondono ai massimi isolati per U .

Dato che $\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = k \ell^2 [(\alpha/2 - \sin \vartheta) \sin \vartheta + \cos^2 \vartheta]$, si determina il seguente schema:

$$\alpha \geq 2 : \begin{cases} \vartheta = \pi/2 & \text{instabile} \\ \vartheta = 3\pi/2 & \text{stabile} \end{cases}$$

$$0 < \alpha < 2 : \begin{cases} \vartheta = \vartheta^* & \text{instabile} \\ \vartheta = \pi/2 & \text{stabile} \\ \vartheta = \pi - \vartheta^* & \text{instabile} \\ \vartheta = 3\pi/2 & \text{stabile} \end{cases}$$

(per il caso $\alpha = 2$, si osservi che le due soluzioni di $\sin \vartheta = \alpha/2$ coincidono in $\vartheta^* = \pi/2$).

(xiv) L'**equazione di moto lagrangiana** è

$$(7.48) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = m_A \frac{\ell^2}{3} \ddot{\vartheta} + m_A g \frac{\ell}{2} \cos \vartheta - k \ell^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$$

che coincide con (7.40) moltiplicata per $m_A \ell^2/2$.

(xv) Le reazioni vincolari $\Phi_A \mathbf{j}$, $\Phi_B \mathbf{i}$ sono note una volta risolto il sistema (7.10), (7.39) (oppure (7.42)), che prevede l'integrazione della funzione $\vartheta(t)$. Possiamo tuttavia cercare di esprimere le forze vincolari in funzione della sola ϑ (e non delle derivate prima e seconda), operando come segue.

I dati iniziali assegnano $\vartheta_0 = \vartheta(0)$ e $\dot{\vartheta}_0 = \dot{\vartheta}(0)$. L'osservazione fondamentale consiste nello scrivere la **conservazione dell'energia**

$$(7.49) \quad T - U = m_A \frac{\ell^2}{6} \dot{\vartheta}^2 + m_A g \frac{\ell}{2} \sin \vartheta + \frac{k}{2} \ell^2 \cos^2 \vartheta \equiv m_A \frac{\ell^2}{6} \dot{\vartheta}_0^2 + m_A g \frac{\ell}{2} \sin \vartheta_0 + \frac{k}{2} \ell^2 \cos^2 \vartheta_0 = E,$$

valida per i sistemi a vincoli fissi, lisci e soggetti a forze di tipo gradiente.

Riferendoci alla (7.42) e utilizzando (7.40), si ha

$$\Phi_B = \frac{3}{4} m_A g \sin \vartheta \cos \vartheta - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \right) k \ell \cos \vartheta - \frac{m_A \ell}{2} \dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta$$

e ricavando $m_A \ell^2 \dot{\vartheta}^2$ da (7.49), si ottiene

$$\Phi_B = \frac{9}{4} m_A g \sin \vartheta \cos \vartheta - \left(\frac{1}{2} - 3 \cos^2 \vartheta \right) k \ell \cos \vartheta - 3E \cos \vartheta.$$

Dalle (7.10), (7.40) si trova poi

$$\Phi_B \sin \vartheta - \Phi_A \cos \vartheta = -\frac{1}{4} m_A g \cos \vartheta - \frac{1}{2} k \ell \cos \vartheta \sin \vartheta$$

che permette di determinare anche Φ_A in funzione di ϑ e delle condizioni iniziali E .

7.2 Esercizio 2

Si studi il moto della sbarretta omogenea dell'Esercizio 1, con la differenza che l'estremo A è vincolato in modo liscio su un piano orizzontale Π_0 anziché su una guida rettilinea. Le forze applicate sono le medesime. Risolvere i seguenti quesiti:

- (i) Stabilire il numero dei gradi di libertà del sistema e introdurre opportune coordinate lagrangiane.
- (ii) Determinare la posizione del centro di massa P_0 del sistema e scrivere la quantità di moto del sistema.
- (iii) Scrivere la prima equazione cardinale del sistema.
- (iv) Calcolare il vettore ω , velocità angolare del sistema.
- (v) Scrivere l'energia cinetica T del sistema.
- (vi) Calcolare il momento della quantità di moto del sistema rispetto al punto M , punto medio della sbarretta.
- (vii) Esaminare le posizioni di equilibrio del sistema mediante le equazioni cardinali.
- (viii) Scrivere la Lagrangiana del sistema $\mathcal{L} = T + U$, U potenziale delle forze direttamente applicate.
- (ix) Esaminare le posizioni di equilibrio del sistema mediante la stazionarietà del potenziale e determinarne il carattere stabile o instabile.
- (x) Scrivere le equazioni di moto di Lagrange.
- (xi) Individuare due integrali primi del moto e indicare un procedimento per studiare qualitativamente il moto.

Svolgimento. Ripercorriamo i quesiti dell'Esercizio 1, soffermandosi solo sulle differenze sostanziali.

(i) I **gradi di libertà** sono in questo caso due: detto O il punto di intersezione fra il piano Π_A e la guida verticale s , le configurazioni del sistema sono determinate dall'angolo $\vartheta \in [0, 2\pi)$ che la direzione $B - A$ forma con $A - O$ e dall'angolo $\varphi \in [0, 2\pi)$ che la direzione $A - O$ forma con una retta di riferimento r_0 fissata su Π_0 e passante per O . Si osserva che se l'estremo A è in O , configurazione per cui assumiamo $\vartheta = \pi/2$, l'angolo φ è indefinito ed è necessario introdurre un secondo sistema di coordinate locali: affronteremo solo marginalmente tale questione.

(ii) Fissiamo un sistema di riferimento fisso $\Sigma = \{O, \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle\}$, dove \mathbf{i} è il versore della retta r_0 , \mathbf{k} il versore della retta s , nel verso della verticale ascendente, e $\mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}$. Si ha

$$A - O = \ell \cos \vartheta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}), \quad B - O = \ell \sin \vartheta \mathbf{k}$$

Il **centro di massa** è posizionato nel punto medio M della sbarretta:

$$M - O = \frac{\ell}{2} [\cos \vartheta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) + \sin \vartheta \mathbf{k}]$$

dunque la **quantità di moto** del sistema è

$$(7.50) \quad \mathbf{K} = m_A \dot{M} = m_A \frac{\ell}{2} \left\{ [-\dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \vartheta] \mathbf{i} + [-\dot{\vartheta} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \vartheta] \mathbf{j} + \dot{\vartheta} \cos \vartheta \mathbf{k} \right\}$$

E' utile considerare un secondo sistema di riferimento $S_0 = \Sigma = \{O, \langle \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{k} \rangle\}$, con

$$(7.51) \quad \mathbf{i}_1 = \frac{1}{|A-O|}(A-O) = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}, \quad \mathbf{j}_1 = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}_1 = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}.$$

Si è scelto S_0 in modo che il moto della sbarretta avvenga sul piano coordinato di S_0 individuato dai versori \mathbf{i}_1 e \mathbf{k} . Il sistema S_0 non è tuttavia solidale con la sbarretta. La velocità angolare ω_Σ del sistema rigido S_0 rispetto a Σ è individuata dalla Proprietà 3.2:

$$(7.52) \quad \omega_\Sigma = \dot{\varphi} \mathbf{k}.$$

Ricordando (7.12), si ha

$$(7.53) \quad \dot{\mathbf{i}}_1 = \omega_\Sigma \wedge \mathbf{i}_1 = \dot{\varphi} \mathbf{j}_1, \quad \dot{\mathbf{j}}_1 = \omega_\Sigma \wedge \mathbf{j}_1 = -\dot{\varphi} \mathbf{i}_1.$$

Pertanto, tenendo conto che $M-O = \frac{\ell}{2}(\cos \vartheta \mathbf{i}_1 + \sin \vartheta \mathbf{k})$, la (7.6) si scrive nel sistema S_0

$$(7.54) \quad \mathbf{K} = m_A \frac{\ell}{2} \left[\dot{\vartheta}(-\sin \vartheta \mathbf{i}_1 + \cos \vartheta \mathbf{k}) + \dot{\varphi} \cos \vartheta \mathbf{j}_1 \right]$$

(iii) Le **forze direttamente applicate** sono la forza peso $-m_A g \mathbf{k}$ in M e la forza elastica $-k(A-O)$ in A . Le **forze vincolari**, per l'ipotesi di vincoli lisci, sono

$$\Phi_A = \Phi_A \mathbf{k} \quad \text{applicata in } A$$

$$\Phi_B \quad \text{applicata in } B, \quad \Phi_B \cdot \mathbf{k} = 0.$$

La struttura di queste ultime deriva dall'ipotesi di vincoli lisci: la forza vincolare in A deve essere ortogonale al piano Π_0 sul quale avviene il moto di A , mentre la quella in B deve essere ortogonale all'asse s , lungo il quale si muove B .

La **prima equazione cardinale** per il moto della sbarretta scritta nel sistema fisso Σ è

$$(7.55) \quad \begin{cases} -\cos \vartheta (\ddot{\varphi} \sin \varphi + (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2) \cos \varphi) + \sin \vartheta (2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin \varphi - \ddot{\vartheta} \cos \varphi) = -\frac{2k}{m_A} \cos \vartheta \cos \varphi + \frac{2\Phi_B^x}{m_A \ell}, \\ \cos \vartheta (\ddot{\varphi} \cos \varphi - (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2) \sin \varphi) - \sin \vartheta (2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos \varphi + \ddot{\vartheta} \sin \varphi) = -\frac{2k}{m_A} \cos \vartheta \sin \varphi + \frac{2\Phi_B^y}{m_A \ell}, \\ -\dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta + \ddot{\vartheta} \cos \vartheta = \frac{2\Phi_A}{m_A \ell} - \frac{2g}{\ell} \end{cases}$$

nelle incognite $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$, Φ_A , Φ_B^x , Φ_B^y , dove si è posto $\Phi = \Phi_B^x \mathbf{i} + \Phi_B^y \mathbf{j}$.

E' sicuramente conveniente operare la scrittura della prima equazione cardinale nel sistema S_0 : basta derivare (7.54) rispetto a t e tenere conto di (7.53):

$$(7.56) \quad \begin{cases} -\ddot{\vartheta} \sin \varphi - (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2) \cos \vartheta = -\frac{2k}{m_A} \cos \vartheta + \frac{2\Phi_B^{x_1}}{m_A \ell} \\ \ddot{\varphi} \cos \vartheta - 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta = \frac{2\Phi_B^{y_1}}{m_A \ell}, \\ -\dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta + \ddot{\vartheta} \cos \vartheta = \frac{2\Phi_A}{m_A \ell} - \frac{2g}{\ell} \end{cases}$$

dove si è posto $\Phi_B = \Phi_B^{x_1} \mathbf{i}_1 + \Phi_B^{y_1} \mathbf{j}_1$. La struttura più semplice rispetto a (7.55) deriva dal fatto che le direzioni coordinate del sistema S_0 si adattano in modo più naturale al problema.

(iv) E' importante comprendere come si calcola in questo caso la velocità angolare: il moto non avviene su un piano, dunque non possiamo applicare la Proprietà 3.2.

Il modo migliore per orientarsi è quello di leggere il moto come **composizione di più moti rigidi** e applicare la seguente regola:

Proprietà 7.7 *Se un sistema rigido \mathcal{R} compie un moto di velocità angolare ω_S rispetto ad un riferimento S_0 e quest'ultimo compie un moto rigido di velocità angolare ω_Σ rispetto ad un riferimento Σ , allora la velocità angolare assoluta di \mathcal{R} rispetto a Σ è*

$$\omega = \omega_S + \omega_\Sigma$$

Nel caso dell'Esercizio 2, dobbiamo pensare al riferimento Σ come quello fissato al punto (i) e al riferimento S_0 come quello fissato in (7.51).

La velocità angolare della sbarretta relativamente al sistema S_0 viene determinata mediante le Proprietà 3.2:

$$\omega_S = \dot{\vartheta} \mathbf{j}_1$$

Dunque, ricordando la (7.52) si ha che la velocità angolare complessiva della sbarretta è

$$\omega_\Sigma = \dot{\varphi} \mathbf{k}.$$

La velocità angolare della sbarretta è pertanto

$$(7.57) \quad \omega = \dot{\vartheta} \mathbf{j}_1 + \dot{\varphi} \mathbf{k} = \dot{\vartheta}(-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}) + \dot{\varphi} \mathbf{k}.$$

(v) Per il calcolo dell'**energia cinetica** l'utilizzo della (7.26) è reso difficile dalla non conoscenza del versore di ω , come per i sistemi piani: conviene dunque riferirsi alla (7.31), con Q centro di massa M :

$$(7.58) \quad T = \frac{1}{2} m_A \dot{M}^2 + \frac{1}{2} \omega \cdot \sigma(M) \omega$$

dove $\sigma(M)$ è l'endomorfismo (7.29). Per scrivere la matrice di quest'ultimo è opportuno fissare un **sistema di riferimento solidale** $S = \{M, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle\}$, con origine degli assi in M , per esempio nel modo seguente:

il primo asse, di versore \mathbf{e}_1 , come la direzione orientata $A - B$,

il terzo asse, di versore \mathbf{e}_3 , come la retta per M appartenente al piano che contiene O, A, B e ortogonale a \mathbf{e}_1 ,

il secondo asse di versore $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$.

Per le proprietà esaminate nella Proposizione 3.1 è chiaro che le tre direzioni sono principali di inerzia e che la matrice dell'endomorfismo $\sigma(M)$ nel sistema di riferimento S si scrive

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_A \frac{\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m_A \frac{\ell^2}{12} \end{pmatrix}.$$

Bisogna fare attenzione al fatto che ω va scritto rispetto al medesimo riferimento scelto per scrivere la matrice. Il sistema solidale alla sbarretta scelto è orientato rispetto a quello fisso secondo le relazioni

$$(7.59) \quad \begin{cases} \mathbf{e}_1 = \frac{1}{|A-B|} (A-B) = \cos \vartheta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) - \sin \vartheta \mathbf{k}, \\ \mathbf{e}_2 = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_3 = \sin \vartheta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) + \cos \vartheta \mathbf{k}. \end{cases}$$

Essendo $\mathbf{j}_1 = \mathbf{e}_2$, è sufficiente esprimere \mathbf{k} nel sistema solidale per scrivere ω :

$$(7.60) \quad \mathbf{k} = -\sin \vartheta \mathbf{e}_1 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3,$$

dunque la (7.57) nel sistema solidale è

$$(7.61) \quad \omega = \dot{\vartheta} \mathbf{e}_2 + \dot{\varphi} (-\sin \vartheta \mathbf{e}_1 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3)$$

e nel medesimo sistema l'omografia di inerzia su ω si scrive

$$(7.62) \quad \sigma(M)\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_A \frac{\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m_A \frac{\ell^2}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \sin \vartheta \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{pmatrix} = m_A \frac{\ell^2}{12} (\dot{\vartheta} \mathbf{e}_2 + \dot{\varphi} \cos \vartheta \mathbf{e}_3)$$

dunque $\omega \cdot \sigma(M)\omega = m_A \frac{\ell^2}{12} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta)$ (tenere presente che il sistema solidale scelto è ortonormale).

Possiamo ora calcolare l'energia cinetica del sistema mediante la formula (7.58) e utilizzando (7.50) per \dot{M} :

$$T = \frac{1}{2} m_A \frac{\ell^2}{4} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta) + \frac{1}{2} m_A \frac{\ell^2}{12} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta) = \frac{1}{6} m_A \ell^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta).$$

(vi) Il **momento della quantità di moto** del sistema viene scritto ricordando la (7.33) che, rispetto al punto M , assume la forma $\mathbf{L}(M) = \sigma(M)\omega$ e il calcolo è già in (7.62).

La scrittura del momento nel sistema fisso è ottenuta ricordando le (7.59):

$$(7.63) \quad \mathbf{L}(M) = m_A \frac{\ell^2}{12} \left[\dot{\vartheta} (-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}) + \dot{\varphi} \cos \vartheta (\sin \vartheta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) + \cos \vartheta \mathbf{k}) \right].$$

(vii) La **seconda equazione cardinale** riferita a M si scrive $\dot{\mathbf{L}}(M) = \mathbf{M}^{(e)}(M)$, dove

$$\mathbf{M}^{(e)} = (A - M) \wedge (-k(A - O)) + (B - M) \wedge \Phi_B + (A - M) \wedge \Phi_A.$$

Per derivare $\mathbf{L}(M)$ non conviene la (7.63), che pure ha il vantaggio di avere i versori costanti: torna utile riferirsi alla (7.62), facendo attenzione al fatto che i versori sono dipendenti dal tempo e utilizzando (7.12) per la derivazione. Si trova da (7.61):

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \omega \wedge \mathbf{e}_2 = -\dot{\varphi} (\cos \vartheta \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta \mathbf{e}_3), \quad \dot{\mathbf{e}}_3 = \omega \wedge \mathbf{e}_3 = \dot{\vartheta} \mathbf{e}_1 + \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{e}_2,$$

pertanto

$$(7.64) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}(M) &= m_A \frac{\ell^2}{12} \left[\ddot{\vartheta} \mathbf{e}_2 - \dot{\vartheta} \dot{\varphi} (\cos \vartheta \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta \mathbf{e}_3) + (\ddot{\varphi} \cos \vartheta - \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \mathbf{e}_3 + \dot{\varphi} \cos \vartheta (\dot{\vartheta} \mathbf{e}_1 + \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{e}_2) \right] = \\ &= m_A \frac{\ell^2}{12} \left[(\ddot{\vartheta} + \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) \mathbf{e}_2 + (\ddot{\varphi} \cos \vartheta - 2\dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \mathbf{e}_3 \right] \end{aligned}$$

A questo punto anche i momenti delle forze vanno calcolati nel sistema solidale.

Dato che $A - O = \ell \cos \vartheta \mathbf{i}_1 = \ell (\cos^2 \vartheta \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta \cos \vartheta \mathbf{e}_3)$ e $\mathbf{j}_1 = \mathbf{e}_2$, si ha, ricordando anche (7.60):

$$(A - M) \wedge (-k(A - O)) = \frac{\ell}{2} \mathbf{e}_1 \wedge (-k\ell \sin \vartheta \cos \vartheta \mathbf{e}_3) = k \frac{\ell^2}{2} \sin \vartheta \cos \vartheta \mathbf{e}_2,$$

$$(B - M) \wedge \Phi_B = -\frac{\ell}{2} \mathbf{e}_1 \wedge (\Phi_B^{x_1} \mathbf{i}_1 + \Phi_B^{y_1} \mathbf{j}_1) = \frac{\ell}{2} (\Phi_B^{x_1} \sin \vartheta \mathbf{e}_2 - \Phi_B^{y_1} \mathbf{e}_3),$$

$$(A - M) \wedge \Phi_A = \frac{\ell}{2} \mathbf{e}_1 \wedge \Phi_A (-\sin \vartheta \mathbf{e}_1 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3) = -\frac{\ell}{2} \Phi_A \cos \vartheta \mathbf{e}_2$$

e la seconda equazione cardinale riferita a M è

$$(7.65) \quad \begin{cases} \frac{1}{6} (\ddot{\vartheta} + \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) = \frac{k}{m_A} \sin \vartheta \cos \vartheta - \frac{\Phi_A}{m_A \ell} \cos \vartheta + \frac{1}{m_A \ell} \Phi_B^{x_1} \sin \vartheta \\ \frac{1}{6} (\ddot{\varphi} \cos \vartheta - 2\dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta) = -\frac{1}{m_A \ell} \Phi_B^{y_1}. \end{cases}$$

Le (7.65), unitamente alle (7.56), costituiscono un sistema di cinque equazioni nelle cinque incognite $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$, Φ_A , $\Phi_B^{x_1}$, $\Phi_B^{y_1}$.

E' importante osservare che la seconda equazione in (7.56) e la seconda equazione in (7.65) implicano

$$(7.66) \quad \ddot{\varphi} \cos \vartheta - 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta = 0$$

e $\Phi_B^{y_1} = 0$. Quest'ultima condizione fisicamente significa che la forza vincolare in B è contenuta nel piano dei punti O , A , B coincidente con il piano coordinato solidale ortogonale al versore \mathbf{e}_2 . Dunque $\Phi_B = \Phi_B^{x_1} \mathbf{i}_1$ e $\Phi_B^x = \Phi_B^{x_1} \cos \varphi$, $\Phi_B^y = \Phi_B^{x_1} \sin \varphi$.

La (7.66) consiste in una delle due **equazioni pure del moto**, ovvero due equazioni nelle sole variabili lagrangiane φ e ϑ , prive delle tre incognite vincolari Φ_A , $\Phi_B^{x_1}$, $\Phi_B^{y_1}$. La seconda equazione pura viene determinata combinando la prima delle (7.65) con la prima e la terza delle (7.56) in modo da eliminare le tre incognite vincolari Φ_A , Φ_B^x , Φ_B^y : i calcoli portano

$$(7.67) \quad \frac{1}{3} \left(\ddot{\vartheta} + \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \right) + \frac{g}{2\ell} \cos \vartheta - \frac{k}{m_A} \cos \vartheta \sin \vartheta = 0.$$

La (7.66), d'altra parte, può essere scritta come

$$\frac{1}{\cos \vartheta} \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} \cos^2 \vartheta) = 0,$$

dunque la quantità $\dot{\varphi} \cos^2 \vartheta$ rimane costante durante il moto e coincide ad ogni istante con la quantità $\dot{\varphi}(0) \cos^2 \vartheta(0)$, nota dalle condizioni iniziali assegnate. Si è dunque determinato un **integrale primo del moto**.

(vii) Le condizioni di **equilibrio** che si ricavano dalle equazioni cardinali (7.56), (7.65) sono

$$(7.68) \quad \begin{cases} \Phi_B^{x_1} = k\ell \cos \vartheta, \\ \Phi_A = m_A g \\ k\ell \sin \vartheta \cos \vartheta - \Phi_A \cos \vartheta + \Phi_B^{x_1} \sin \vartheta = 0. \end{cases}$$

Sostituendo le prime due nella terza, si ottiene l'equazione

$$(7.69) \quad \cos \vartheta (2k\ell \sin \vartheta - m_A g) = 0$$

identica a (7.45), come ci si aspetta: in effetti, il problema dell'equilibrio ha un'evidente simmetria rispetto all'asse z e le condizioni di equilibrio devono essere le medesime qualunque sia il piano del fascio di asse z contenente A , O , B . Al tempo stesso, tali condizioni devono essere le medesime che abbiamo individuato nell'Esercizio 1, ristretto ad un solo piano: le soluzioni rispetto a ϑ sono dunque le medesime dell'Esercizio precedente:

$$\vartheta = \pi/2, \quad \vartheta = 3\pi/2, \quad \vartheta = \vartheta^* \quad \text{se } \alpha < 2, \quad \vartheta = \pi - \vartheta^* \quad \text{se } \alpha < 2.$$

D'altra parte, essendo la variabile φ assente dal sistema (7.68), qualunque valore di quest'ultima in $[0, 2\pi)$ rende possibile l'equilibrio, in modo coerente con la simmetria assiale del problema.

Mentre per $\vartheta = \vartheta^*$, $\vartheta = \pi - \vartheta^*$ non ci sono difficoltà, per $\vartheta = \pi/2$, $\vartheta = 3\pi/2$ la coordinata φ è indefinita: pur essendo chiaro geometricamente di quale configurazione si tratta, in modo rigoroso sarebbe necessario definire attorno a tali configurazioni, singolari per le coordinate scelte, un secondo set di variabili: non approfondiremo tuttavia questa circostanza.

(viii) La **Lagrangiana** del sistema $\mathcal{L} = T + U$ richiede solo il calcolo di U : ragionando come nell'Esercizio precedente, basta calcolare il potenziale cartesiano della forza peso e della forza elastica nelle coordinate lagrangiane dei rispettivi punti di applicazione. Si ha pertanto $U = U(\vartheta) = -m_A g \frac{\ell}{2} \sin \vartheta - \frac{k}{2} \ell^2 \cos^2 \vartheta$ e

$$(7.70) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{6} m_A \ell^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta \right) - m_A g \frac{\ell}{2} \sin \vartheta - \frac{k}{2} \ell^2 \cos^2 \vartheta.$$

(ix) La ricerca delle **posizioni di equilibrio** del sistema mediante la stazionarietà del potenziale si limita all'equazione $\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -m_A g \frac{\ell}{2} \cos \vartheta + k \ell^2 \cos \vartheta \sin \vartheta = 0$, equivalente a (7.68). Si osservi che $\frac{\partial U}{\partial \varphi} \equiv 0$, essendo φ assente da U : questo fatto rappresenta nel formalismo della Lagrangiana l'indifferenza dell'equilibrio rispetto a φ , come si è visto nel punto (vii).

(x) Alla scrittura delle due equazioni di moto associate a (7.70) va premessa l'osservazione importante che la coordinata φ è **ciclica**, ovvero assente da \mathcal{L} . Pertanto l'equazione relativa a tale coordinata viene scritta in modo, per così dire, integrato come

$$(7.71) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3} m_A \ell^2 \dot{\varphi} \cos^2 \vartheta = \text{costante}$$

e dà luogo all'individuazione di un **integrale primo del moto**. Si noti che è il medesimo integrale primo determinato mediante (7.66).

L'equazione relativa a ϑ è

$$(7.72) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = \frac{1}{3} m_A \ell^2 (\ddot{\vartheta} + \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) + m_A g \frac{\ell}{2} \cos \vartheta - k \ell^2 \cos \vartheta \sin \vartheta = 0$$

che, divisa per $m_A \ell^2$, coincide con (7.67).

(xi) Oltre a (7.71), la quantità che si conserva è l'**energia totale**

$$(7.73) \quad T - U = \frac{1}{6} m_A \ell^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta) + m_A g \frac{\ell}{2} \sin \vartheta + \frac{k}{2} \ell^2 \cos^2 \vartheta \equiv E$$

che rappresenta il secondo integrale primo. La costante E è stabilita dalle condizioni iniziali.

Eliminando $\dot{\varphi}$ da (7.73) utilizzando di (7.71), ci riconduciamo ad un'equazione differenziale del primo ordine nella sola ϑ che può essere analizzata dal punto di vista qualitativo.

7.3 Esercizio 3

Si consideri il sistema formato da un disco omogeneo \mathcal{D} di raggio R e massa $m_{\mathcal{D}}$ e da un'asta omogenea \mathcal{A} di estremi AB , di lunghezza $L = \overline{AB}$ e massa $m_{\mathcal{A}}$. L'estremo A dell'asta è incernierato in modo liscio in un punto $A_{\mathcal{D}}$ sul bordo del disco. Il disco rotola senza strisciare su una guida rettilinea orizzontale r e sia l'asta che il disco restano sul piano verticale Π passante per r . Oltre alla forza peso, il sistema è soggetto ad una forza elastica di costante k che richiama il punto B verso B' , proiezione di B sulla retta r .

- (i) Stabilire il numero dei gradi di libertà del sistema e introdurre opportune coordinate lagrangiane.
- (ii) Determinare la posizione del centro di massa P_0 del sistema e scrivere la quantità di moto del sistema.
- (iii) Elencare tutte le forze che agiscono sul sistema, interne ed esterne, direttamente applicate e vincolari, e scrivere la prima equazione cardinale del sistema.
- (iv) Scrivere l'energia cinetica del sistema.
- (v) Calcolare il momento della quantità di moto del sistema rispetto al centro del disco e scrivere la seconda equazione cardinale del sistema utilizzando il medesimo punto per il calcolo dei momenti.
- (vi) Scrivere la Lagrangiana del sistema e calcolare le corrispondenti equazioni di moto.
- (vii) Scrivere le equazioni cardinali separatamente per i due rigidi del sistema e confrontare con le equazioni lagrangiane.

Svolgimento.

- (i) Il sistema è composto da due parti rigide piane. Come sappiamo, un sistema rigido piano ha tre gradi di libertà, riconducibili alle coordinate di un punto P_1 del sistema e all'angolo α che l'intero sistema forma con una direzione fissa prefissata.

Il disco che rotola sulla guida ha un solo grado di libertà: scegliendo il centro del disco come punto P_1 , si ha che la quota di P_1 è costante, mentre l'ascissa è proporzionale a α . Dunque la posizione del disco è fissata univocamente dalla rotazione di un angolo formato da un raggio solidale rispetto ad un raggio fisso.

L'asta ha anch'essa un solo grado di libertà: se si sceglie A come punto P_1 , la posizione di A è determinata dall'angolo di rotazione del disco, dunque la configurazione dell'asta è individuata completamente da un angolo che essa forma con una direzione fissa prestabilita.

Si hanno così **due gradi di libertà** e i parametri lagrangiani che utilizzeremo sono:

- (1) l'angolo φ che la direzione orientata $A - C$, essendo C il centro del disco, forma con la direzione orientata $D - C$, con D punto del disco sulla retta verticale per C , D diametralmente opposto al punto di contatto K del disco con la guida,
- (2) l'angolo ϑ che la direzione orientata $B - A$ forma con la direzione verticale discendente passante per il punto A .

Si introduce un sistema di riferimento fisso $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, versori ortonormali, in cui

- ▷ il piano del moto Π è quello ortogonale a \mathbf{j} ,
- ▷ la guida rettilinea passa per O e ha la direzione \mathbf{i} ,
- ▷ la direzione \mathbf{k} è verticale ascendente,
- ▷ l'angolo φ è scelto in modo che cresca se il rotolamento avviene nel verso \mathbf{i} e in modo che $\varphi = 0$ (ovvero A coincide con D) se il punto di contatto K è sovrapposto all'origine O ,
- ▷ l'angolo ϑ è scelto crescente in senso antiorario, ovvero dalla direzione verticale discendente per A verso la direzione $B - A$.

Dopo aver osservato che l'ipotesi di **rotolamento puro** implica l'uguaglianza dell'ascissa di C e di K con la lunghezza dell'arco \widehat{AD} , possiamo scrivere le coordinate dei punti significativi rispetto al sistema cartesiano $\{O, \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle\}$:

$$K - O = R\varphi\mathbf{i} \quad C - O = R\varphi\mathbf{i} + R\mathbf{k}$$

$$A - O = (A - C) + (C - O) = (R \sin \varphi + R\varphi)\mathbf{i} + (R \cos \varphi + R)\mathbf{k}$$

$$B - O = (B - A) + (A - O) = (L \sin \vartheta + R \sin \varphi + R\varphi)\mathbf{i} + (R \cos \varphi + R - L \cos \vartheta)\mathbf{k}.$$

(ii) E' utile per gli esercizi sottolineare il carattere **additivo** della (7.2) o della (7.3):

Proprietà 7.8 Se $P_0^{(1)}$ e $P_0^{(2)}$ sono rispettivamente il centro di massa dei due sistemi (discreti o continui) \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , allora il centro di massa P_0 del sistema $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ è nella posizione

$$(7.74) \quad P_0 - O = \frac{1}{m} \left(m_1(P_0^{(1)} - O) + m_2(P_0^{(2)} - O) \right)$$

dove $m = m_1 + m_2$ è la massa complessiva del sistema $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$.

La Proprietà è naturalmente estendibile a più di due sistemi.

Essendo il disco e la sbarretta omogenei, per le Proprietà 3.1 e 3.8 si ha che il centro di massa P_0 del sistema è localizzato come

$$P_0 - O = \frac{1}{m_{\mathcal{D}} + m_{\mathcal{A}}} [m_{\mathcal{D}}(C - O) + m_{\mathcal{A}}(M - O)]$$

essendo M il punto medio del segmento AB , di posizione

$$M - O = (M - A) + (A - O) = \left(\frac{L}{2} \sin \vartheta + R \sin \varphi + R\varphi \right) \mathbf{i} + \left[-\frac{L}{2} \cos \vartheta + (R \cos \varphi + R) \right] \mathbf{k}.$$

Dunque

$$P_0 - O = \frac{1}{m} \left\{ \left[m_{\mathcal{D}} R \dot{\varphi} + m_{\mathcal{A}} \left(\frac{L}{2} \sin \vartheta + R \sin \varphi + R \dot{\varphi} \right) \right] \mathbf{i} + \left[m_{\mathcal{D}} R + m_{\mathcal{A}} \left(-\frac{L}{2} \cos \vartheta + R \cos \varphi + R \right) \right] \mathbf{k} \right\}$$

con $m = m_{\mathcal{D}} + m_{\mathcal{A}}$.

Riguardo al calcolo della quantità di moto, si osserva che per un sistema composto può risultare comodo utilizzare la formula

$$(7.75) \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} = m_1 \dot{P}_0^{(1)} + m_2 \dot{P}_0^{(2)},$$

che si ricava derivando (7.74) rispetto a t . Applicando la (7.75) ai dati del problema, si ha

$$(7.76) \quad \begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_{\mathcal{D}} + \mathbf{K}_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{D}} \dot{C} + m_{\mathcal{A}} \dot{M} = \\ &= \left[m_{\mathcal{D}} R \dot{\varphi} + m_{\mathcal{A}} \left(\frac{L}{2} \cos \vartheta \dot{\vartheta} + R \cos \varphi \dot{\varphi} + R \dot{\varphi} \right) \right] \mathbf{i} + m_{\mathcal{A}} \left(\frac{L}{2} \sin \vartheta \dot{\vartheta} - R \sin \varphi \dot{\varphi} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

(iii) Nel caso dell'Esercizio, si hanno le

- **forze direttamente applicate:** il campo della forza peso \mathbf{F}^{peso} dei punti del sistema, la forza elastica \mathbf{F}^{el} applicata in B ,
- **forze vincolari:** la forza Φ_A applicata in A che vincola l'estremo dell'asta ad un punto del disco $A_{\mathcal{D}}$, la corrispondente reazione $\Phi_{A_{\mathcal{D}}} = -\Phi_A$ che l'asta esercita sul disco in $A_{\mathcal{D}}$, la forza Φ_K applicata in K che permette il rotolamento puro del disco sulla guida.

Allo stesso tempo, la suddivisione è in

- **forze interne:** le forze vincolari Φ_A e $\Phi_{A_{\mathcal{D}}}$,
- **forze esterne:** la forza peso \mathbf{F}^{peso} , la forza elastica \mathbf{F}^{el} , la forza vincolare Φ_K .

Deve essere chiaro il carattere relativo della distinzione forze interne o esterne: lo studio del moto della sola asta, ad esempio, sposta la reazione vincolare Φ_A nella categoria delle forze esterne. La scrittura delle forze nel sistema di riferimento scelto consiste in

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathcal{D}}^{peso} &= -m_{\mathcal{D}} g \mathbf{k} \quad \text{applicata in } C, \\ \mathbf{F}_{\mathcal{A}}^{peso} &= -m_{\mathcal{A}} g \mathbf{k} \quad \text{applicata in } M \\ \mathbf{F}^{el} &= -k(B - B') = -k(-L \cos \vartheta + R \cos \varphi + R) \mathbf{k} \quad \text{applicata in } B \end{aligned}$$

dove B' è la proiezione ortogonale di B sulla guida rettilinea.

Le forze vincolari applicate in A e in C , incognite, hanno direzioni non note e scriveremo

$$\Phi_K = \Phi_{K,i} \mathbf{i} + \Phi_{K,k} \mathbf{k},$$

analogamente per Φ_A .

Derivando rispetto al tempo (7.76) si arriva alla scrittura della **prima equazione cardinale:**

$$(7.77) \quad \begin{cases} m_{\mathcal{D}} R \ddot{\varphi} + m_{\mathcal{A}} \left[\frac{L}{2} \left(\ddot{\vartheta} \cos \vartheta - \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta \right) + R \left(\ddot{\varphi} \cos \vartheta - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) \right] = \Phi_{K,i}, \\ m_{\mathcal{A}} \left[\frac{L}{2} \left(\ddot{\vartheta} \sin \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta \right) - R \left(\ddot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) \right] = \\ = -mg - k(R - L \cos \vartheta + R \cos \varphi) + \Phi_{K,k}. \end{cases}$$

Le incognite nelle due equazioni (7.77) sono $\varphi(t)$, $\vartheta(t)$ e le componenti $\Phi_{K,i}$, $\Phi_{K,k}$.

(iv) L'**energia cinetica** è $T = T_{\mathcal{D}} + T_{\mathcal{A}}$, ovvero la somma dell'energia cinetica dei due elementi rigidi che compongono il sistema. Utilizzando la (7.26), si ha

$$(7.78) \quad T_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}m_{\mathcal{D}}\dot{C}^2 + \frac{1}{2}I_{\omega_{\mathcal{D}}}\omega_{\mathcal{D}}^2, \quad T_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}}\dot{M}^2 + \frac{1}{2}I_{\omega_{\mathcal{A}}}\omega_{\mathcal{A}}^2$$

dove $\omega_{\mathcal{D}} = \dot{\varphi}\mathbf{j}$, $\omega_{\mathcal{A}} = -\dot{\vartheta}\mathbf{j}$ sono le **velocità angolari** delle due parti rigide e $I_{\omega_{\mathcal{D}}}$ è il momento di inerzia del disco rispetto alla retta di direzione \mathbf{j} passante per C , $I_{\omega_{\mathcal{A}}} = m_{\mathcal{A}}\frac{L^2}{12}$ (vedi (7.24)) è il momento di inerzia dell'asta rispetto alla retta di direzione \mathbf{j} passante per M .

Per il calcolo di $I_{\omega_{\mathcal{D}}}$ si scelga un sistema di riferimento ortogonale (ξ, η) di versori \mathbf{e}_{ξ} , \mathbf{e}_{η} e si posizioni il centro del disco nell'origine degli assi. Si ha, scrivendo l'integrale in coordinate polari:

$$I_{\omega_{\mathcal{D}}} = \frac{m_{\mathcal{D}}}{\pi R^2} \int_{\mathcal{D}} [(P - O) \wedge (\mathbf{e}_{\xi} \wedge \mathbf{e}_{\eta})]^2 dP = \frac{m_{\mathcal{D}}}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \varrho^3 d\varrho d\varphi = m_{\mathcal{D}} \frac{R^2}{2}.$$

Complessivamente la (7.78) si scrive

$$(7.79) \quad \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_{\mathcal{D}}R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}m_{\mathcal{D}}R^2\dot{\varphi}^2 + \\ &+ \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}} \left[\frac{L^2}{4}\dot{\vartheta}^2 + 2R^2\dot{\varphi}^2 + LR\dot{\varphi}\dot{\vartheta}[\cos(\vartheta + \varphi) + \cos \vartheta] + 2R^2\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right] + \frac{1}{24}m_{\mathcal{A}}L^2\dot{\vartheta}^2 = \\ &= R^2 \left(\frac{3}{4}m_{\mathcal{D}} + m_{\mathcal{A}}(1 + \cos \varphi) \right) \dot{\varphi}^2 + m_{\mathcal{A}}\frac{L^2}{6}\dot{\vartheta}^2 + m_{\mathcal{A}}\frac{LR}{2}[\cos(\vartheta + \varphi) + \cos \vartheta]\dot{\varphi}\dot{\vartheta}. \end{aligned}$$

(v) Il **momento della quantità di moto del sistema** rispetto a C viene calcolato utilizzando (7.33), separatamente per le due parti rigide. Per il calcolo di $\mathbf{L}_{\mathcal{A}}(M)$ conviene riferirsi al centro di massa M e scrivere

$$(7.80) \quad \mathbf{L}(C) = \mathbf{L}_{\mathcal{D}}(C) + \mathbf{L}_{\mathcal{A}}(C) = \mathbf{L}_{\mathcal{D}}(C) + \mathbf{L}_{\mathcal{A}}(M) + (M - C) \wedge \mathbf{K}_{\mathcal{A}}.$$

Per la sbarretta si calcola l'omografia di inerzia $\sigma_{\mathcal{A}}(M)$ procedendo come in (7.34) per trovare

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathcal{A}}(C) &= -m_{\mathcal{A}}\frac{L^2}{12}\dot{\vartheta}\mathbf{j} + m_{\mathcal{A}} \left[\left(\frac{L}{2} \sin \vartheta + R \sin \varphi \right) \mathbf{i} + \left(-\frac{L}{2} \cos \vartheta + R \cos \varphi \right) \mathbf{k} \right] \wedge \\ &\wedge \left[\left(\frac{L}{2}\dot{\vartheta} \cos \vartheta + R\dot{\varphi} \cos \varphi + R\dot{\varphi} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{L}{2}\dot{\vartheta} \sin \vartheta - R\dot{\varphi} \sin \varphi \right) \mathbf{k} \right] = \\ &= m_{\mathcal{A}} \left[-\frac{L^2}{3}\dot{\vartheta} + \frac{LR}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}) \cos(\vartheta + \varphi) + \left(R^2(1 + \cos \varphi) - \frac{LR}{2} \cos \vartheta \right) \dot{\varphi} \right] \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Per il calcolo dell'omografia di inerzia $\sigma_{\mathcal{D}}$ del disco si considera il sistema di riferimento solidale $\{C, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle\}$ in cui

- ▷ il versore \mathbf{e}_1 è quello della direzione orientata $A - C$,
- ▷ il versore \mathbf{e}_2 coincide con \mathbf{j} ,
- ▷ $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$.

La direzione \mathbf{e}_2 è principale in base al punto 1 del Corollario 3.1, la direzione \mathbf{e}_3 è principale per la Proposizione 3.1, essendo il piano ortogonale a \mathbf{e}_1 e passante per C di simmetria materiale. La direzione \mathbf{e}_3 è principale per il punto 2 del Corollario 3.1, ma anche perchè è ortogonale ad un piano di simmetria materiale.

Abbiamo dunque tracciato un **sistema di riferimento solidale principale e centrale**. Rispetto a tale sistema la scrittura della matrice dell'omografia di inerzia (7.32) è

$$\begin{pmatrix} m_{\mathcal{D}} \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m_{\mathcal{D}} \frac{R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & m_{\mathcal{D}} \frac{R^2}{4} \end{pmatrix}.$$

Infatti, i momenti deviatori sono tutti nulli. Inoltre, i due momenti di inerzia I_1 , I_3 rispetto a \mathbf{e}_1 e rispetto a \mathbf{e}_3 sono evidentemente uguali per la simmetria del sistema; d'altra parte, la loro somma deve coincidere con il momento di inerzia I_2 rispetto alla direzione \mathbf{e}_2 ortogonale al piano del moto, in virtù della (7.20), dunque $I_1 = I_3 = \frac{1}{2}I_2 = \frac{1}{4}m_{\mathcal{D}}R^2$.

La scrittura di $\omega_{\mathcal{D}}$ nel sistema solidale è semplicemente $\omega_{\mathcal{D}} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_2$, dunque l'applicazione della (7.33) dà luogo a

$$\mathbf{L}_{\mathcal{D}}(C) = \begin{pmatrix} m_{\mathcal{D}}R^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & m_{\mathcal{D}}R^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & m_{\mathcal{D}}R^2/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = m_{\mathcal{D}} \frac{R^2}{2} \dot{\varphi} \mathbf{j}.$$

Il **momento delle forze esterne** rispetto al punto C è

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(e)}(C) &= (M - C) \wedge \mathbf{F}_{\mathcal{A}}^{peso} + (B - C) \wedge \mathbf{F}^{el} + (K - C) \wedge \Phi_K = \\ &= \left(\frac{L}{2} \sin \vartheta + R \cos \varphi \right) \mathbf{i} \wedge (-m_{\mathcal{A}}g)\mathbf{k} - k(L \sin \vartheta + R \sin \varphi) \mathbf{i} \wedge (R \cos \varphi - L \cos \vartheta + R)\mathbf{k} - R\mathbf{k} \wedge \Phi_{K,i} \mathbf{i} = \\ &= \left[m_{\mathcal{A}}g \left(\frac{L}{2} \sin \vartheta + R \sin \varphi \right) + k(L \sin \vartheta + R \sin \varphi)(-L \cos \vartheta + R \cos \varphi + R) - R\Phi_{K,i} \right] \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Per scrivere la **seconda equazione cardinale** (7.37) si esegue il calcolo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}(C) &= \left[m_{\mathcal{D}} \frac{R^2}{2} + m_{\mathcal{A}} \left(\frac{LR}{2} \cos(\vartheta + \varphi) + R^2(1 + \cos \varphi) - \frac{LR}{2} \cos \vartheta \right) \right] \dot{\varphi} \mathbf{j} + \\ &+ m_{\mathcal{A}} \left(\frac{LR}{2} \cos(\vartheta + \varphi) - m_{\mathcal{A}} \frac{L^2}{3} \right) \ddot{\vartheta} \mathbf{j} - \\ &- m_{\mathcal{A}} \left[\left(\frac{LR}{2} \sin(\vartheta + \varphi) + R^2 \sin \varphi \right) \dot{\varphi}^2 - \frac{LR}{2} \sin(\vartheta + \varphi) \dot{\vartheta}^2 + LR \left(\sin(\vartheta + \varphi) - \frac{1}{2} \sin \vartheta \right) \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \right] \mathbf{j}, \\ \dot{C} \wedge \mathbf{K} &= m_{\mathcal{A}} \left(R^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \frac{LR}{2} \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \right) \mathbf{j} \end{aligned}$$

per ottenere infine

$$\begin{aligned} (7.81) \quad & \left[m_{\mathcal{D}} \frac{R^2}{2} + m_{\mathcal{A}} \left(\frac{LR}{2} \cos(\vartheta + \varphi) + R^2(1 + \cos \varphi) - \frac{LR}{2} \cos \vartheta \right) \right] \dot{\varphi} + \\ & + m_{\mathcal{A}} \left(\frac{LR}{2} \cos(\vartheta + \varphi) - m_{\mathcal{A}} \frac{L^2}{3} \right) \ddot{\vartheta} - \\ & - m_{\mathcal{A}} \left[\frac{LR}{2} \sin(\vartheta + \varphi) \dot{\varphi}^2 - \frac{LR}{2} \sin(\vartheta + \varphi) \dot{\vartheta}^2 + LR \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin(\vartheta + \varphi) \right] = \\ & = m_{\mathcal{A}}g \left(\frac{L}{2} \sin \vartheta + R \sin \varphi \right) + k(L \sin \vartheta + R \sin \varphi)(-L \cos \vartheta + R \cos \varphi + R) - R\Phi_{K,i} \end{aligned}$$

Le **equazioni cardinali** per il sistema in esame consiste nell'insieme delle tre equazioni (7.77), (7.81) nelle quattro incognite $\varphi(t)$, $\vartheta(t)$, $\Phi_{K,i}$, $\Phi_{K,k}$: il fatto non deve sorprendere, in quanto solo per i sistemi rigidi le equazioni cardinali sono sufficienti alla risoluzione del moto. In effetti, le (7.77), (7.81) riguardano la scrittura delle cardinali di un sistema complessivamente non rigido, ma composto da parti rigide. La prosecuzione dello studio del moto del sistema attraverso le cardinali necessita di equazioni aggiuntive, determinabili applicando le cardinali separatamente al disco e alla sbarretta. Allo stesso modo, la determinazione della forza vincolare interna applicata in A avviene secondo la medesima procedura, dato che essa, come del resto ogni forza di tipo interno, non può comparire nelle equazioni cardinali scritte per l'intero sistema.

(vi) Alla scrittura della Lagrangiana dobbiamo premettere un'osservazione essenziale. Il vincolo di rotolamento puro nel punto di contatto K è non liscio: è proprio l'attrito a permettere tale comportamento. La condizione da imporre per ottenere il rotolamento puro è quella di velocità nulla del punto di contatto. Se immaginiamo di sostituire al disco il sistema dei tre punti C , K e A , la scrittura delle equazioni di moto di tipo lagrangiano (ovvero nello spazio dei movimenti possibili) per tale sistema discreto non comporta la presenza della forza vincolare in K , dato che questo punto è fermo.

Si può dunque procedere, negli Esercizi di questo tipo, alla scrittura della Lagrangiana se le forze direttamente applicate sono riconducibili ad un potenziale. Nel nostro caso abbiamo $\mathcal{L}(\vartheta, \varphi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}) = T(\vartheta, \varphi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}) + U(\vartheta, \varphi)$, dove T è la funzione (7.79) e U è il potenziale nelle variabili lagrangiane:

$$U(\vartheta, \varphi) = -m_A g \left(-\frac{L}{2} \cos \vartheta + R \cos \varphi \right) - \frac{k}{2} [R(1 + \cos \varphi) - L \cos \vartheta]^2.$$

Il potenziale della forza peso agente sul disco, costante, è stato omissso, così come la costante R nella quota di M .

Le **equazioni di moto lagrangiane** sono pertanto

$$(7.82) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_A \frac{L^2}{3} \ddot{\vartheta} + m_A \frac{LR}{2} [\cos(\vartheta + \varphi) + \cos \vartheta] \ddot{\varphi} + m_A \frac{LR}{2} \dot{\varphi}^2 \sin(\vartheta + \varphi) + \\ \quad + m_A g \frac{L}{2} \sin \vartheta + kL [R(1 + \cos \varphi) - L \cos \vartheta] \sin \vartheta = 0, \\ 2R^2 \left(\frac{3}{4} m_D + (1 + \cos \varphi) m_A \right) \ddot{\varphi} + m_A \frac{LR}{2} [\cos(\vartheta + \varphi) + \cos \vartheta] \ddot{\vartheta} - m_A \frac{R^2}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \\ \quad - m_A \frac{LR}{2} \dot{\vartheta}^2 [\sin(\vartheta + \varphi) + \sin \vartheta] - m_A g R \sin \varphi + kR [R(1 + \cos \varphi) - L \sin \vartheta] \sin \varphi = 0 \end{array} \right.$$

(vii) Per operare il confronto fra le equazioni cardinali e le equazioni lagrangiane (7.82) scriviamo le cardinali separatamente per i due sistemi:

$$m_D \ddot{C} = \mathbf{F}_D^{peso} + \Phi_K - \Phi_A,$$

$$\frac{d}{dt} (\sigma_D(C) \omega_D) = (K - C) \wedge \Phi_k - (A - C) \wedge \Phi_A,$$

$$m_A \ddot{M} = \mathbf{F}_A^{peso} + \mathbf{F}^{el} + \Phi_A,$$

$$\frac{d}{dt} (\sigma_A(M) \omega_A) = (B - M) \wedge [-k(B - B')] + (A - M) \wedge \Phi_A$$

che portano al sistema delle sei equazioni

$$(7.83) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{\mathcal{D}} R \ddot{\varphi} = \Phi_{K,i} - \Phi_{A,i} \\ 0 = -m_{\mathcal{D}} g + \Phi_{K,k} - \Phi_{A,k} \\ m_{\mathcal{D}} \frac{R^2}{2} \ddot{\varphi} = -R \Phi_{K,i} + R (\Phi_{A,k} \sin \varphi - \Phi_{A,i} \cos \varphi) \\ m_{\mathcal{A}} \left[\frac{L}{2} (\dot{\vartheta} \cos \vartheta - \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta) + R ((\cos \varphi + 1) \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \right] = \Phi_{A,i} \\ m_{\mathcal{A}} \left[\frac{L}{2} (\dot{\vartheta} \sin \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta) - R (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \right] = \\ = -m_{\mathcal{A}} g - k(R \cos \varphi - L \cos \vartheta + R) + \Phi_{A,k} \\ -m_{\mathcal{A}} \frac{L^2}{12} \ddot{\vartheta} = \frac{kL}{2} \sin \vartheta [R(1 + \cos \varphi) - L \cos \vartheta] + \frac{L}{2} (\Phi_{A,k} \sin \vartheta - \Phi_{A,i} \cos \vartheta) \end{array} \right.$$

nelle sei incognite φ , ϑ , $\Phi_{K,i}$, $\Phi_{K,k}$, $\Phi_{A,i}$, $\Phi_{A,k}$.

Sostituendo la prima equazione nella terza, si ottiene

$$(7.84) \quad \frac{3}{2} m_{\mathcal{D}} \ddot{\varphi} = -\Phi_{A,i} (1 + \cos \varphi) + \Phi_{A,k} \sin \varphi.$$

La quarta e la quinta equazione scrivono direttamente le componenti di $\Phi_{\mathcal{A}}$ in termini delle variabili lagrangiane e delle loro derivate: eliminando dalla sesta equazione e dalla (7.84) $\Phi_{A,i}$ e $\Phi_{A,k}$ si trovano appunto le due equazioni (7.82).

Rispetto alle cardinali complessive (7.77), (7.81) le (7.83) sono sicuramente di più semplice scrittura e permettono una lettura più agevole della dinamica del sistema: è importante comunque comprendere e sviluppare anche i punti (iii) e (v), per acquisire pratica con l'applicazione delle cardinali.

7.4 Esercizio 4

Su un piano verticale π si consideri una semicirconfenza omogenea \mathcal{S} di massa M e diametro $\overline{OA} = 2R$. L'estremo O è fisso e la rotazione attorno ad esso avviene in modo liscio. Il punto A è attratto da una molla di costante k fissata nel punto Ω appartenente alla retta orizzontale r di π passante per O e a distanza $2R$ da O . Si considerino le configurazioni del sistema per cui, quando il punto A è sovrapposto a Ω , la semicirconfenza \mathcal{S} è al di sotto della retta r .

Un punto P di massa m è vincolato in modo liscio sulla semicirconfenza. Sul sistema materiale $(\mathcal{S} \cup P)$ agisce la forza peso.

- (i) Determinare il centro di massa del sistema.
- (ii) Scrivere il potenziale delle forze applicate e determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità.
- (iii) Supponendo fissati k , R e M e facendo variare la massa m del punto, qual è la maggiore apertura dell'angolo fra la direzione $A - O$ e la verticale discendente che consente di avere equilibrio stabile?
- (iv) Sempre fissando k , R e M , calcolare il valore da assegnare alla massa m per avere equilibrio stabile nella configurazione in cui il diametro OA della semicirconfenza sia inclinato di 45° rispetto alla direzione orizzontale.
- (v) Calcolare l'energia cinetica del sistema.

- (vi) Scrivere la Lagrangiana e le corrispondenti equazioni di moto.
- (vii) Scrivere la seconda equazione cardinale per la semicirconferenza, riferendosi al punto medio C del diametro OA per il calcolo dei momenti.
- (viii) Scrivere la seconda equazione cardinale per la semicirconferenza, riferendosi al punto O .
- (ix) Senza eseguire calcoli, descrivere un metodo per calcolare le forze vincolari in O e in P .

Svolgimento.

(i) Il sistema ha due gradi di libertà: le configurazioni del sistema sono individuate dagli angoli φ e ϑ che le direzioni orientate $A - O$ e $P - C$, essendo C il punto medio di OA , formano con la direzione verticale discendente. Si ha $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [\varphi - \pi, \varphi]$.

Fissando il sistema di riferimento $\{O, \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle\}$ con $\mathbf{i} = \frac{1}{2R}(\Omega - O)$, \mathbf{k} versore verticale ascendente e $\mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}$, si trova:

$$C - O = R(\sin \varphi \mathbf{i} - \cos \varphi \mathbf{k}), \quad A - O = 2(C - O), \quad \Omega - O = 2R\mathbf{i}$$

$$P - O = (P - C) + (C - O) = R[(\sin \varphi + \sin \vartheta)\mathbf{i} - (\cos \varphi + \cos \vartheta)\mathbf{k}].$$

Il **centro di massa** P_1 di \mathcal{S} è, per la Proprietà 3.1, sulla retta per C ortogonale alla direzione $A - O$. Per determinarne la posizione sulla retta si fissa un riferimento piano $\{C, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle\}$ dove $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{R}(O - C)$ e $\mathbf{e}_3 = \mathbf{j} \wedge \mathbf{e}_1$ (\mathbf{e}_3 è il versore della retta ortogonale ad $A - O$ passante per C). Se dunque, in tale riferimento, $P_1 - C = \xi_1 \mathbf{e}_1 + \eta_1 \mathbf{e}_3$, si ha $\xi_1 = 0$ e η_1 viene calcolato mediante (7.4), in cui \mathcal{C} è la curva $P(\psi) - C = R(\cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_3)$, $\psi \in [0, \pi)$:

$$\eta_1 = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi R \sin \psi R d\psi = \frac{2R}{\pi}.$$

Dunque $P_1 - C = -\frac{2R}{\pi}(\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{k})$ e, per la Proprietà 3.8 il centro di massa del sistema $\mathcal{S} \cup P$ è il punto P_0 tale che

$$\begin{aligned} P_0 - C &= \frac{1}{M + m} [M(P_1 - C) + m(P - C)] = \\ &= \frac{R}{M + m} \left[\left(-\frac{2M}{\pi} \cos \varphi + m \sin \vartheta \right) \mathbf{i} - \left(\frac{2M}{\pi} \sin \varphi + m \cos \vartheta \right) \mathbf{k} \right]. \end{aligned}$$

(ii) Per lo studio dell'equilibrio scriviamo il potenziale associato al sistema, dato dalla quota del centro di massa moltiplicata per $-(M + m)g$ e dalla distanza al quadrato $(A - \Omega)^2$ moltiplicata per $-k/2$:

$$\begin{aligned} U(\varphi, \vartheta) &= \\ &= -(M + m)g \left(-\frac{R}{M + m} \left(\frac{2M}{\pi} \sin \varphi + m \cos \vartheta \right) - R \cos \varphi \right) - \frac{k}{2} 4R^2 [(\sin \varphi - 1)\mathbf{i} - \cos \varphi \mathbf{k}]^2 = \\ (7.85) \quad &= \left(\frac{2M}{\pi} gR + 4kR^2 \right) \sin \varphi + (M + m)gR \cos \varphi + mgR \cos \vartheta + \text{costante}. \end{aligned}$$

La condizione di stazionarietà del potenziale porta alle equazioni

$$\cos \vartheta = 0, \quad \tan \varphi = \alpha,$$

dove α è il valore positivo adimensionale

$$(7.86) \quad \alpha = \frac{\frac{2M}{\pi} gR + 4kR^2}{(M + m)gR} = 2 \frac{1/\pi + 2kR/Mg}{1 + m/M} > 0.$$

Detto φ^* l'unico angolo in $(0, \pi/2)$ tale che $\tan \varphi^* = \alpha$, si ha che, compatibilmente con l'intervallo di esistenza per $\vartheta \in [\varphi - \pi, \varphi]$, le posizioni di equilibrio corrispondono alle due configurazioni

$$\mathcal{E}_1 : (\varphi = \varphi^*, \vartheta = 0), \quad \mathcal{E}_2 : (\varphi = \varphi^* + \pi, \vartheta = \pi).$$

Per la stabilità basta calcolare la matrice hessiana:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \vartheta} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial \varphi} & \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} \end{pmatrix} = mgR \begin{pmatrix} -(1 + M/m)(\alpha \sin \varphi + \cos \varphi) & 0 \\ 0 & -\cos \vartheta \end{pmatrix}$$

mediante la quale si comprende subito che \mathcal{E}_1 è di equilibrio stabile (essendo la matrice hessiana definita negativa), mentre \mathcal{E}_2 è instabile (hessiana definita positiva).

(iii) Dalla (7.86) si vede che, fissati i valori di k , R e M , l'angolo α decresce monotonicamente da $\alpha_0 = 2(1/\pi + 2kR/Mg)$ a 0, al crescere di m da 0 a $+\infty$. E' dunque α_0 l'estremo superiore (come angolo limite, al tendere a zero della massa m) della tangente dei possibili angoli di apertura.

(iv) Si deve avere $\varphi^* = \pi/4$, ovvero $\alpha = 1$. Risolvendo rispetto a m , si trova

$$m = \left[2 \left(\frac{1}{\pi} + \frac{2kR}{Mg} \right) - 1 \right] M$$

che presuppone, per l'assegnazione dei dati, la condizione

$$\frac{kR}{Mg} > \frac{\pi - 2}{4\pi}.$$

La prima frazione va letta, fisicamente, come il confronto della contrapposizione fra la gravità e la forza elastica: la condizione richiede dunque che la forza elastica non sia troppo debole (o la massa M troppo grande), altrimenti non è possibile mantenere l'equilibrio alla posizione richiesta. Nei termini di quanto visto al punto (iii), la condizione equivale a $\alpha_0 > 1$.

(v) L'**energia cinetica** T del sistema consiste nella somma dell'energia cinetica T_S della semicirconferenza e di quella T_P del punto P . Per quest'ultima si ha

$$\begin{aligned} T_P &= \frac{1}{2} m \dot{P}^2 = \frac{1}{2} m R^2 \left[(\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\vartheta} \cos \vartheta) \mathbf{i} + (\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \mathbf{k} \right]^2 = \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos(\varphi - \vartheta) \right). \end{aligned}$$

Quanto alla semicirconferenza, applichiamo la (7.26):

$$(7.87) \quad T_S = \frac{1}{2} M \dot{P}_1^2 + \frac{1}{2} I_{P_1} \omega_S^2$$

dove $\omega_S = -\dot{\varphi} \mathbf{j}$ è la velocità angolare di \mathcal{S} e I_{P_1} è il momento di inerzia (7.21) della semicirconferenza rispetto alla retta di direzione \mathbf{j} passante per P_1 .

Per il Teorema (7.18), si ha

$$(7.88) \quad I_{P_1} = I_C - M(2R/\pi)^2,$$

essendo I_C il momento di inerzia in C rispetto alla direzione \mathbf{j} .

Per il calcolo di I_C effettuiamo la seguente considerazione.

Il momento di inerzia rispetto alla direzione fissata della circonferenza intera omogenea \mathcal{C} di medesimo raggio R e massa $\mu = 2M$ è

$$(7.89) \quad I_C^{\mathcal{C}} = \frac{\mu}{2\pi R} \int_{\mathcal{C}} [(P - C) \wedge \mathbf{j}]^2 dP = \frac{\mu}{2\pi R} \int_0^\pi 2\pi R^3 d\varphi = \mu R^2.$$

Richiamando la Proprietà 3.4, applicata alle due semicirconferenze identiche \mathcal{S} , \mathcal{S}_1 che compongono \mathcal{C} si trova per I_C che compare in (7.88):

$$(7.90) \quad I_C = \frac{1}{2} I_C^{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} 2MR^2 = MR^2.$$

Pur essendo agevole, in questo caso, il calcolo di I_C mediante l'integrale come si è fatto per I_C^C , si è usata questa procedura perché possa essere utilizzata in altre circostanze analoghe (semidisco, contorno di un triangolo equilatero, ...).

Da (7.90) si trova $I_{P_1} = \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) MR^2$ e da (7.87)

$$T_S = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\varphi}^2 \left[\left(\frac{2}{\pi} \sin \varphi + \cos \varphi \right) \mathbf{i} + \left(-\frac{2}{\pi} \cos \varphi + \sin \varphi \right) \mathbf{k} \right]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right) MR^2 \dot{\varphi}^2 = MR^2 \dot{\varphi}^2.$$

Ben più semplice è il calcolo eseguito scegliendo $Q = A$ nella (7.26):

$$T_S = \frac{1}{2} I_A \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{P_1} + M(P_1 - A)^2) \dot{\varphi}^2 = \frac{M}{2} \left[\left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right) R^2 + R^2 + \left(\frac{2R}{\pi} \right)^2 \right] \dot{\varphi}^2 = MR^2 \dot{\varphi}^2.$$

Come al solito, si sottolinea il vantaggio di esercitarsi sul calcolo delle quantità meccaniche richieste applicando le formule da più punti di vista e valutando con l'esperienza la convenienza di un metodo rispetto ad un altro.

Si osservi che sarebbe errato applicare (7.18) per calcolare I_A mediante I_C (va scelto il centro di massa).

(vi) La **Lagrangiana** del sistema è

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T + U = & \left(M + \frac{1}{2} m \right) R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos(\varphi - \vartheta) \right) + \\ & + (M + m)gR(\alpha \sin \varphi + \cos \varphi) + mgR \cos \vartheta \end{aligned}$$

a cui corrispondono le due equazioni di moto

$$(7.91) \quad \begin{cases} \left(M + \frac{m}{2} \right) \ddot{\varphi} + m \ddot{\vartheta} \cos(\varphi - \vartheta) + m \dot{\vartheta}^2 \sin(\varphi - \vartheta) + (M + m) \frac{g}{R} (\sin \varphi - \alpha \cos \varphi) = 0, \\ m \ddot{\vartheta} + m \ddot{\varphi} \cos(\varphi - \vartheta) - m \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \vartheta) + m \frac{g}{r} \sin \vartheta = 0. \end{cases}$$

(vii) Calcoliamo l'omografia di inerzia per la semicirconferenza relativa al punto C . Si sceglie il sistema solidale $\{C, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle\}$ come in (i):

$$(7.92) \quad \mathbf{e}_1 = \frac{1}{R}(C - O), \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{j} \wedge \mathbf{e}_2.$$

Per la proprietà 1 della Proposizione 3.1, la terna è principale di inerzia. La matrice dell'endomorfismo si scrive

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} MR^2 \end{pmatrix}.$$

Infatti, I_2 è esattamente I_C , calcolato in (7.90).

Quanto al calcolo di I_1 , riferiamoci a I_1^C , momento di inerzia del cerchio \mathcal{C} che completa la semicirconferenza rispetto alla retta che passa dal centro ed è contenuta nel piano del cerchio. Per la (7.20) e per il calcolo eseguito in (7.89), si ha $I_1^C = \frac{1}{2} \mu R^2 = MR^2$. A sua volta, $I_1 = \frac{1}{2} I_1^C = \frac{1}{2} MR^2$.

Infine, per la proprietà (7.20) si ha $I_3 = I_2 - I_1 = \frac{1}{2} MR^2$.

Applichiamo ora la (7.33) alla semicirconferenza \mathcal{S} con $Q = C$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathcal{S}}(C) &= M(P_1 - C) \wedge \dot{C} + \sigma_{\mathcal{S}}(C)\omega_{\mathcal{S}} = \\ &= -\frac{2R^2}{\pi}M\dot{\varphi}(\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}) \wedge (\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= -MR^2\dot{\varphi}\mathbf{j}. \end{aligned}$$

La **seconda equazione cardinale** (7.37) per il sistema \mathcal{S} è dunque

$$(7.93) \quad -MR\ddot{\varphi}\mathbf{j} = -(P_1 - C) \wedge Mg\mathbf{k} + (O - C) \wedge \Phi_{\mathbf{O}} + (P - C) \wedge (-\Phi_P) + (A - C) \wedge [-k(A - \Omega)].$$

L'ipotesi di **vincolo liscio** riguardo alla forza vincolare su P permette di scrivere

$$(7.94) \quad \Phi_P = \Phi_P(-\sin\vartheta\mathbf{i} + \cos\vartheta\mathbf{k}),$$

con Φ_P scalare incognito. Ponendo $\Phi_{\mathbf{O}} = \Phi_{\mathbf{O},i}\mathbf{i} + \Phi_{\mathbf{O},k}\mathbf{k}$, la (7.93) porta a

$$-M\ddot{\varphi} + \frac{2}{\pi}Mg\cos\varphi - \Phi_{\mathbf{O},i}\cos\varphi - \Phi_{\mathbf{O},k}\sin\varphi + 2KR\cos\varphi = 0.$$

(viii) Riferendosi al punto O , la (7.37) assume la forma $\dot{\mathbf{L}}_{\mathcal{S}}(O) = \mathbf{M}_{\mathcal{S}}^{(e)}(O)$, dove il momento delle forze esterne che agiscono su \mathcal{S} O è

$$(7.95) \quad \mathbf{M}_{\mathcal{S}}^{(e)}(O) = -(P_1 - O) \wedge Mg\mathbf{k} + (P - O) \wedge (-\Phi_P) + (A - O) \wedge [-k(A - \Omega)].$$

Occupiamoci del calcolo del momento della quantità di moto, partendo dalla (7.33) $\mathbf{L}_{\mathcal{S}}(O) = \sigma_{\mathcal{S}}(O)\omega_{\mathcal{S}}$. Si sceglie il sistema di riferimento solidale $\{O, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle\}$, dove i versori sono i medesimi di (7.92). Si osservi che la Proposizione 3.1 non è applicabile, come in (vii), per concludere che la terna è principale: il piano coordinato ortogonale a \mathbf{e}_1 non è più di simmetria materiale, la terna scelta non proviene da una traslazione lungo gli assi della terna principale centrale.

Indichiamo la matrice dell'omografia di inerzia $\sigma_{\mathcal{S}}(O)$ con gli elementi

$$\begin{pmatrix} I_1^O & I_{12}^O & I_{13}^O \\ I_{12}^O & I_2^O & I_{23}^O \\ I_{13}^O & I_{23}^O & I_3^O \end{pmatrix}.$$

Si ha $I_1^O = I_1 = \frac{1}{2}MR^2$, dato che $C - O$ è parallelo a \mathbf{e}_1 . Inoltre, per (7.18), si ha

$$I_2^O = I_{P_1} + M\left(R^2 + \frac{4}{\pi^2}\right) = 2MR^2$$

dove I_{P_1} è come in (7.88). Pertanto, dalla (7.20) si determina il terzo elemento diagonale

$$I_3^O = I_2^O - I_1^O = \frac{3}{2}MR^2.$$

Per i momenti deviatori, si ha $I_{12}^O = I_{23}^O = 0$, essendo \mathbf{e}_2 direzione principale. Eseguiamo il calcolo del momento deviatore restante, utilizzando (7.22) e parametrizzando \mathcal{S} come $R[(\cos\psi + 1)\mathbf{e}_1 + \sin\psi\mathbf{e}_3]$:

$$I_{13}^O = -\frac{M}{\pi R} \int_{\mathcal{S}} [(P - O) \cdot \mathbf{e}_1][(P - O) \cdot \mathbf{e}_3] dP = -\frac{MR^2}{\pi R} \int_0^\pi (\cos\psi + 1)\sin\psi R d\psi = -\frac{MR^2}{\pi}(\pi - 2).$$

Dunque

$$\mathbf{L}_S(O) = \sigma_S(O)\omega_S = \begin{pmatrix} MR^2/2 & 0 & ((2/\pi) - 1)MR^2 \\ 0 & 2MR^2 & 0 \\ ((2/\pi) - 1)MR^2 & 0 & 3MR^2/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = -2MR^2\dot{\varphi}\mathbf{j}.$$

Un controllo può essere effettuato mediante la regola di trasposizione $\mathbf{L}_S(O) = \mathbf{L}_S(C) + (C - O) \wedge \mathbf{K}_S$, essendo $\mathbf{K}_S = M\dot{P}_1$ la quantità di moto della semicirconferenza. In effetti, si ha $(C - O) \wedge \mathbf{K}_S = -MR^2\dot{\varphi}\mathbf{j}$ che coincide con $\mathbf{L}_S(O) - \mathbf{L}_S(C) = -2MR^2\dot{\varphi}\mathbf{j} + MR^2\dot{\varphi}\mathbf{j}$.

Osserviamo anche che il prodotto di $\sigma_S(O)$ con ω_S rende inutile il calcolo del momento deviatore, dato che la velocità angolare è sempre diretta secondo una direzione principale: Abbiamo comunque eseguito il calcolo di I_{23}^O per illustrarne il metodo.

Calcolando i prodotti vettoriali in (7.95), scriviamo infine la seconda equazione cardinale riferita ad O come

$$(7.96) \quad -2MR\ddot{\varphi} = Mg \left(\sin \varphi - \frac{2}{\pi} \cos \varphi \right) + \Phi_P \sin \varphi + \Phi_P \cos \varphi - 4KR \cos \varphi.$$

Per esercizio si verifichi il passaggio diretto da (7.93) a (7.96) tramite la (7.43).

(ix) Assumendo di aver calcolato le funzioni $\varphi(t)$ e $\vartheta(t)$ utilizzando le (7.91), abbinate a opportune condizioni iniziali, per determinare la forza vincolare esterna Φ_O che tiene fermo l'estremo O e la forza vincolare interna Φ_P con cui la guida \mathcal{S} trattiene P è sufficiente scrivere la prima equazione cardinale, separatamente per i due elementi del sistema:

$$M\ddot{P}_1 = -Mg\mathbf{k} - k(A - \Omega) + \Phi_O - \Phi_P$$

$$m\ddot{P} = -mg\mathbf{k} + \Phi_P.$$

Dunque $\Phi_O = (M + m)\ddot{P}_0 + (M + m)g\mathbf{k} + k(A - \Omega)$ e, ricordando l'ipotesi (7.94) si ha

$$-\Phi_P \sin \vartheta = mR(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \ddot{\vartheta} \cos \vartheta - \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta),$$

$$\Phi_P \cos \vartheta = mR(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\vartheta} \sin \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta) + mg.$$

Infine si trova

$$\Phi_{O,i} = 2kR(\sin \varphi - 1) +$$

$$+ R \left[\left(\frac{2M}{\pi} \sin \varphi + (M + m) \cos \varphi \right) \ddot{\varphi} + \left(\frac{2M}{\pi} \cos \varphi - (M + m) \sin \varphi \right) \dot{\varphi}^2 + m \cos \vartheta \ddot{\vartheta} - m \sin \vartheta \dot{\vartheta}^2 \right],$$

$$\Phi_{O,k} = (M + m)g - 2kR \cos \varphi +$$

$$+ R \left[\left(\frac{2M}{\pi} \cos \varphi + (M + m) \sin \varphi \right) \ddot{\varphi} + \left(-\frac{2M}{\pi} \sin \varphi + (M + m) \cos \varphi \right) \dot{\varphi}^2 + m \sin \vartheta \ddot{\vartheta} - m \cos \vartheta \dot{\vartheta}^2 \right],$$

$$\Phi_P = m \left(g + R(\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2) \right).$$

7.5 Esercizio 5

Un disco omogeneo di raggio R , centro P_0 e massa m è vincolato su un piano verticale Π e rotola senza strisciare sulla guida $\Gamma(\lambda) \subseteq \Pi$, $\lambda \in I \subseteq \mathbb{R}$. La curva Γ è regolare per ogni $\lambda \in I$.

Sul sistema agisce direttamente solo la forza peso.

- (i) Introdurre un sistema cartesiano ortogonale $\{O(\mathbf{i}, \mathbf{j})\}$ su Π e determinare le coordinate del centro di massa P_0 in funzione di λ .

- (ii) Scrivere l'energia potenziale del sistema e determinare le posizioni di equilibrio del disco.
- (iii) Determinare il vettore ω velocità angolare del disco in funzione del parametro λ e della derivata $\dot{\lambda}$.
- (iv) Scrivere l'energia cinetica e scrivere la Lagrangiana utilizzando λ come coordinata lagrangiana.
- (v) Scrivere la prima equazione cardinale nel sistema di riferimento intrinseco alla curva.
- (vi) Scrivere la seconda equazione cardinale riferita al punto P_0 .

Svolgimento

(i) Sia $\Gamma(\lambda) - O = x(\lambda)\mathbf{i} + y(\lambda)\mathbf{j}$ l'equazione cartesiana della curva nel sistema di riferimento fissato. Il vettore tangente alla curva è $\Gamma'(\lambda) = x'(\lambda)\mathbf{i} + y'(\lambda)\mathbf{j}$, mentre la direzione normale è individuata da

$$k\mathbf{n} = \frac{1}{|\Gamma'|^2} \left(\Gamma'' - \frac{\Gamma' \cdot \Gamma''}{|\Gamma'|^2} \Gamma' \right) = \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^2} (-y'\mathbf{i} + x'\mathbf{j}).$$

dove k è la **curvatura**:

$$(7.97) \quad k(\lambda) = \frac{|y''x' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Se C è il punto su $\Gamma(\lambda)$ di contatto fra il disco e la curva, il vettore $P_0 - C$ è diretto lungo la normale, pertanto

$$(7.98) \quad P_0(\lambda) - O = (P_0 - C) + (C - O) = \pm R\mathbf{n}(\lambda) + (\Gamma(\lambda) - O),$$

dove la scelta \pm va eseguita in modo che $P_0 - C$ e \mathbf{n} siano orientate nello stesso verso.

(ii) L'**energia potenziale** consiste in

$$V(\lambda) = mg(P_0 - O) \cdot \mathbf{j} = mg[y(\lambda) \pm R\mathbf{n}(\lambda) \cdot \mathbf{j}].$$

Ricordando che, rispetto all'ascissa curvilinea s , vale

$$\frac{d\mathbf{n}}{d\lambda} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} s'(\lambda) = -k\Gamma'(\lambda),$$

si trova per la stazionarietà $V'(\lambda) = 0$ la condizione

$$(7.99) \quad y'(\lambda) \pm R(-k\Gamma'(\lambda)) \cdot \mathbf{j} = [1 \pm (-kR)]y'(\lambda) = 0.$$

Il significato di $y'(\lambda) = 0$ è chiaro: si ha equilibrio nelle posizioni $\lambda = \lambda^*$ in cui il vettore tangente alla curva è **orizzontale**: $\Gamma'(\lambda^*) = x'(\lambda^*)\mathbf{i}$, quest'ultimo non nullo, essendo la curva regolare per ipotesi.

Per quanto riguarda invece l'annullarsi della quantità nella parentesi quadra in (7.99), si ha che

1. nei tratti di Γ in cui in (7.98) va scelto il $-$ non ci sono altre configurazioni di equilibrio,
2. nei tratti di Γ in cui in (7.98) va scelto il $+$ si ha equilibrio in $\lambda = \hat{\lambda}$ se il raggio di curvatura è R : $k(\hat{\lambda}) = 1/R$.

Per esercizio, si traccino graficamente delle situazioni per evidenziare le posizioni λ^* e per mostrare concretamente i casi 1 e 2.

(iii) Essendo il sistema in esame piano, per determinare ω basta stabilire un angolo che una direzione solidale forma con una direzione fissa: si consideri ad esempio la retta verticale r di Π passante per P_0 di direzione orientata \mathbf{j} e la retta solidale s passante per P_0 e per P , punto fissato sul bordo del disco.

Chiamando φ l'angolo $P\hat{P}_0A$, dove $A \in r$ è tale che $A - P_0 = R\mathbf{j}$, e stabilendo φ crescente in senso orario, ovvero da r verso s , si ha

$$(7.100) \quad \omega = -\dot{\varphi}\mathbf{k}$$

con $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$.

Più complesso è stabilire la relazione tra l'angolo φ e il parametro λ . A tale proposito, si consideri il punto B diametralmente opposto a C sul bordo del disco e si chiami ψ l'angolo $B\hat{P}_0P$, scelto crescente da r_B verso s , essendo r_B la retta orientata $B - P_0$.

Va ora osservato che l'angolo $B\hat{P}_0A$, che $B - C$, normale a Γ' , forma con la verticale, è uguale all'angolo ϑ che la direzione Γ' tangente alla curva forma con la direzione orizzontale. Se E è il punto tale che $E - C = \mathbf{i}$ (ovvero E è sulla retta orizzontale per C e segue C), ϑ è l'angolo che Γ' forma con la direzione orientata $E - C$, dunque

$$\cos \vartheta = \frac{1}{|\Gamma'|} \Gamma' \cdot \mathbf{i}, \quad \sin \vartheta = \frac{1}{|\Gamma'|} \Gamma' \cdot \mathbf{j}$$

ovvero

$$(7.101) \quad \vartheta(\lambda) = \arctan \frac{\Gamma' \cdot \mathbf{j}}{\Gamma' \cdot \mathbf{i}} = \arctan \frac{y'(\lambda)}{x'(\lambda)}.$$

Scegliendo crescente ϑ da r_B , la relazione fra gli angoli è

$$(7.102) \quad \psi + \vartheta = \varphi.$$

D'altra parte, l'ipotesi di rotolamento puro equivale a

$$(7.103) \quad R\psi(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} |\Gamma'(\mu)| d\mu,$$

dove λ_0 deve corrispondere a $\psi = 0$, ovvero alla posizione del disco in cui P è sovrapposto a B . Nella (7.103) l'ascissa curvilinea è scelta crescente in modo coerente con λ e con ψ .

Sostituendo (7.101) e (7.103) in (7.102), si trova

$$\varphi(\lambda) = \arctan \frac{y'(\lambda)}{x'(\lambda)} + \frac{1}{R} \int_{\lambda_0}^{\lambda} |\Gamma'(\mu)| d\mu.$$

La **velocità angolare** (7.100) espressa mediante il parametro λ e la derivata $\dot{\lambda}$ è dunque

$$\begin{aligned} \omega &= - \left(\frac{1}{R} |\Gamma'(\lambda)| + \frac{1}{|\Gamma'(\lambda)|^2} [y''(\lambda)x'(\lambda) - x''(\lambda)y'(\lambda)] \right) \dot{\lambda} \mathbf{k} = \\ &= - \frac{1}{R} |\Gamma'(\lambda)| \left(1 + \frac{R}{|\Gamma'(\lambda)|^3} [y''(\lambda)x'(\lambda) - x''(\lambda)y'(\lambda)] \right) \dot{\lambda} \mathbf{k} \end{aligned}$$

dove $|\Gamma'| = (x'^2(\lambda) + y'^2(\lambda))^{1/2}$.

E' interessante il confronto con la curvatura (7.97):

$$(7.104) \quad \omega = - \frac{|\Gamma'(\lambda)|}{R} (1 + kR \operatorname{sign}(y''x' - x''y')) \dot{\lambda} \mathbf{k} = - \frac{|\Gamma'(\lambda)|}{R} \left(1 + \frac{R}{R_\Gamma} \operatorname{sign}(y''x' - x''y') \right) \dot{\lambda} \mathbf{k}$$

essendo $R_\Gamma = 1/k$ il **raggio di curvatura** della curva di appoggio Γ . Nel caso di Γ circonferenza di raggio R_Γ , la (7.104) dà

$$\omega = - \frac{R_\Gamma}{R} \left(1 + \frac{R}{R_\Gamma} \right) \dot{\lambda} \mathbf{k} = -(1 + R_\Gamma/R) \dot{\lambda} \mathbf{k}.$$

Nel caso limite, invece, di supporto rettilineo $\Gamma(\lambda) - O = \lambda \mathbf{e}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e \mathbf{e} versore costante, si ritrova la formula nota $\omega = -(\dot{\lambda}/R) \mathbf{k}$.

(iv) Nel sistema intrinseco alla curva si ha

$$(7.105) \quad \dot{P}_0 = (1 \mp kR) \dot{\lambda} \Gamma',$$

(si osservi che nel sistema di riferimento intrinseco alla curva Γ la velocità ha componente solo tangenziale), dunque l'energia cinetica del disco è

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\beta^2|\Gamma'|^2\dot{\lambda}^2 + \frac{1}{4}mR^2\omega^2 = \\ &= \frac{1}{2}m\left[\beta^2 + \frac{1}{2}(1 + kR \operatorname{sign} D(\lambda))^2\right]|\Gamma'|^2\dot{\lambda}^2 \end{aligned}$$

dove $D(\lambda) = \det \begin{pmatrix} x'(\lambda) & y'(\lambda) \\ x''(\lambda) & y''(\lambda) \end{pmatrix}$ e $\beta = (1 \mp kR)$.

La **Lagrangiana** del sistema è

$$(7.106) \quad \mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\left[\beta^2 + \frac{1}{2}(1 + kR \operatorname{sign} D(\lambda))^2\right]|\Gamma'|^2\dot{\lambda}^2 + mgy(\lambda) \pm \frac{R}{|\Gamma'|}x'(\lambda) \operatorname{sign} D(\lambda).$$

(v) La **prima equazione cardinale** consiste in

$$m\ddot{P}_0 = -mg\mathbf{j} + \Phi$$

essendo $\Phi = \Phi_t\mathbf{t} + \Phi_n\mathbf{n}$ (dove $\mathbf{t} = \Gamma'/|\Gamma'|$) la forza vincolare in C nelle componenti tangente alla curva Γ e normale ad essa. Da (7.105) si trova

$$\begin{aligned} \ddot{P}_0 &= \beta\left(\ddot{\lambda}\Gamma' + \dot{\lambda}^2\Gamma''\right) \mp Rk'(\lambda)R\dot{\lambda}^2\Gamma' = \\ &= \left\{\beta\left(\ddot{\lambda} + \frac{\Gamma' \cdot \Gamma''}{|\Gamma'|^2}\dot{\lambda}^2\right) \mp k'(\lambda)\dot{\lambda}^2\right\}\Gamma' + \beta|\Gamma'|^2k\dot{\lambda}^2\mathbf{n}. \end{aligned}$$

La prima equazione cardinale scritta nel riferimento intrinseco consiste dunque nelle due equazioni

$$(7.107) \quad \begin{cases} \beta|\Gamma'|^2\ddot{\lambda} + (\beta\Gamma' \cdot \Gamma'' \mp k'R|\Gamma'|^2)\dot{\lambda}^2 = -gy'(\lambda) + \frac{1}{m}\Phi_t \\ \beta|\Gamma'|^2k\dot{\lambda}^2 = -g\frac{x'}{|\Gamma'|}\operatorname{sign} D(\lambda) + \frac{1}{m}\Phi_n. \end{cases}$$

(vi) Il momento delle forze esterne calcolato rispetto a P_0 è $(C - P_0) \wedge \Phi = \pm R\Phi_t\mathbf{k}$. D'altra parte, tenendo presente la (7.104), si trova

$$\mathbf{L}(P_0) = \sigma(P_0)\omega = -\frac{1}{2}mR^2\frac{|\Gamma'(\lambda)|}{R}(1 + kR \operatorname{sign} D(\lambda))\dot{\lambda}\mathbf{k}.$$

La **seconda equazione cardinale** porta dunque all'equazione scalare

$$(7.108) \quad \frac{d}{dt}\left\{|\Gamma'|(1 + kR \operatorname{sign} D(\lambda))\dot{\lambda}\right\} \pm \frac{2}{\Phi_t} = 0$$

che, insieme alle due equazioni (7.107), costituisce un sistema nelle tre incognite del problema λ , Φ_t , Φ_n . Per la regolarità della funzione da derivare rispetto a t , si tenga presente che, quando D cambia segno, la curvatura k è nulla.

Si lascia per esercizio il confronto fra il sistema delle equazioni cardinali e l'equazione di moto lagrangiana corrispondente a (7.106).

Un'eccellente generalizzazione consigliata, certo non semplice, consiste nel ripercorrere l'Esercizio 5 sostituendo al cerchio una generica curva mobile Γ_1 : lo studio del moto di rotolamento puro di Γ_1 su Γ equivale sostanzialmente a quello del moto della rigata mobile sulla rigata fissa di un sistema rigido piano.