Universitá di Firenze

FACOLTÁ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

Che cosa é realmente successo ai colloqui di pace di Parigi fra Henry Kissinger e Le Duc Tho

What really happened at the Paris peace talks between Henry Kissinger e Le Duc Tho

Relatore:
Prof. Gabriele Villari

Candidato:
Stella Civelli

Sessione 17/10/2012

Anno Accademico 2011/2012

Indice

1 Introduzione

M. Braun in Differential Equatios and Their Application presenta una versione alternativa e divertente di come si siano svolti i colloqui di pace di Parigi, conclusisi il 27 Gennaio 1973, che segnarono la fine della guerra del Vietnam.

Braun immagina che Herny Kissinger, segretario di stato degli Stati Uniti dal 1969 al 1977, e Le Duc Tho, negoziatore nordvietnamita, si fossero accordati come segue: avrebbero lasciato che 1 milione di formiche nordvietnamite e 1 milione di formiche sudvietnamite si scontrassero nel cortile del palazzo Presidenziale di Parigi, sotto la supervisione di un rappresentante canadese e di un rappresentate polacco, con l'accordo che l'esito di questa battaglia avrebbe deciso le sorti della guerra. Se le formiche nordvietnamite avessero vinto allora il Vietnam del Sud sarebbe stato riunificato al Vietnam del Nord, se invece avessero vinto le formiche sudvietnamite allora il Vietnam del Sud avrebbe potuto mantenere la sua indipendenza, se ci fosse stato un equilibrio allora il Vietnam del Sud sarebbe stato in parte riunito al Vietnam del Nord in modo proporzionale al numero di formiche rimaste. Dopo qualche giorno di combattimento il rappresentante della Polonia, che era unita dal patto di Varsavia con l'Unione Sovietica e quindi vicina ai Viet Cong, fu scoperto dal supervisore canadese nel tentativo di aggiungere una valigia di formiche nordvietnamite nel cortile. Il canadese, ligio alle regole, denunció immediatamente l'accaduto e i sudvietnamiti decisero di far saltare gli accordi. Da qua iniziarono, secondo la fantomatica storia di M. Braun, le trattative che portarono alla firma degli accordi di pace di Parigi del 1973 che posero fine all'intervento militare statunitense nella Guerra del Vietnam, uno dei principali motivi che causarono la sconfitta dei sudvietnamiti che dovettero rinunciare alla propria indipendenza. Il supervisore polacco, racconta ancora M. Braun, fu sottoposto ad un processo alla fine del quale il giudice, dopo aver piú volte sottolineato la stupiditá dei sudvietnamiti per aver rinunciato agli accordi, gli dette una pena molto lieve.

Con questa tesi vogliamo spiegare matematicamente il comportamento apparentemente singolare del giudice.

In un secondo momento passeremo ad analizzare un sistema di equazioni differenziali che é un caso piú generale del sistema che descrive la competezione tra formiche.

2 Alcune conoscenze preliminari

2.1 Generalitá sulla modellizzazione di popolazioni

Modelizzare una popolazione, o piú popolazioni, significa assegnare delle equazioni differenziali, o dei sistemi di equazioni differenziali, che ne descrivono il comportamento.

Sono due i modelli piú semplici e classici che descrivono l'evoluzione nel tempo di una popolazione isolata x:

1. **Il modello di Malthus:** $\dfrac{dx}{dt} = \epsilon x$ dove ϵ é il *potenziale biologico* della popolazione. Da quest'equazione si ottiene $x(t) = e^{\epsilon t}$, da cui deduciamo che se $\epsilon > 0$ allora la popolazione x cresce illimitatamente mentre se $\epsilon < 0$ é destinata all'estinzione.

2. **Il modello di Verhulst:** $\dfrac{dx}{dt} = \epsilon x - \sigma x^2$ con $\sigma > 0$. Questo modello tiene conto, grazie al termine $-\sigma x^2$, della limitatezza delle risorse quando la popolazione diventa troppo numerosa e quindi in certi casi é piú realistico. La popolazione tende al valore costante, detto *valore logistico*, $\dfrac{\epsilon}{\sigma}$.

Per studiare l'evoluzione e il comportamento di due popolazioni x e y che condividono gli stessi spazi dobbiamo inserire dei termini che descrivono questa interazione che sono quindi della forma αxy per la popolazione x e βxy per la popolazione y. I coefficienti α e β possono essere positivi o negativi a seconda che la popolazione goda o soffra della presenza dell'altra.

2.2 Unicitá delle traiettorie nel piano delle fasi

Teorema di esistenza e unicitá locale per un problema di Cauchy: Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases} \tag{1}$$

con $\mathbf{X}$(t): $I \subseteq \mathcal{R} \to U \subseteq \mathcal{R}^n$ e $\mathbf{F}$($\mathbf{X}$,t): $U \times I \subseteq \mathcal{R}^{n+1} \to \mathcal{R}^n$ con U intorno di $\mathbf{X}_0$ e I intorno di t_0, se $\mathbf{F}$ é continua in $U \times I$ e se é lipschitziana rispetto alla $\mathbf{X}$, uniformemente per $t \in I$, allora esiste $\delta > 0$ ed esiste una ed una sola funzione $\mathbf{X}$(t): $[t_0 - \delta; t_0 + \delta] \to \mathcal{R}^n$ che risolve in tale intervallo il problema di Cauchy (1).

Il sistema (1) si dice *autonomo* se non dipende esplicitamente dal tempo cioé se $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$. In questo caso vale che se $\mathbf{X}(t)$ é una soluzione allora lo é anche $\mathbf{X}(t + T)\ \forall\ T$.

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) \\ \dot{y} = G(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

con $x = x(t)$ e $y = y(t)$ funzioni scalari del tempo e $F, G : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$, esso é autonomo. Allora per studiare le soluzioni del sistema $x(t),\ y(t)$ possiamo proiettarle sul piano $t = 0$, detto *piano delle fasi* (x, y). Si dice *orbita* l'insieme $\{(x, y) \in \mathcal{R}^2 \mid x = x(t)$ e $y = y(t)$ sono soluzioni del sistema $(2)\}$.

Se F e G soddisfano le ipotesi del teorema di Cauchy allora in ogni punto del piano delle fasi (x,y) passa una e una sola orbita. Infatti se esistessero due soluzioni corrispondenti alle stesse condizioni iniziali assunte in due istanti diversi t_1 e t_2 allora in virtú del teorema di Cauchy esse dovrebbero coincidere[1] quindi sarebbero una la traslata temporale dell'altra, cioé la loro traiettoria nel piano delle fasi coinciderebbe.

3 Modellizzazione della competizione tra formiche sudvietnamite e nordvietnamite

3.1 Presentazione del modello

Siano S le formiche sudvietnamite e N le formiche nordvietnamite. La competizione tra queste é descritta, secondo M. Braun, dal seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \frac{1}{10}S - \frac{1}{20}SN \\ \frac{dN}{dt} = \frac{1}{100}N - \frac{1}{100}N^2 - \frac{1}{100}SN \end{cases} \tag{3}$$

Queste equazioni descrivono rispettivamente l'andamento delle popolazioni S e N. Osserviamo che in assenza della popolazione N la specie S segue il modello di Malthus e cresce illimitatamente con tasso di crescita $\frac{1}{10}$. Viceversa, in assenza di S, la popolazione N segue il modello di Verhulst e tende al valore logistico 1. I coefficienti di interazione sono negativi infatti le formiche non traggono vantaggio dalla presenza dell'altra specie ma al contrario si scontrano. Osserviamo ancora che la popolazione N soffre molto meno dello scontro rispetto alla popolazione S infatti i coefficienti di interazione sono rispettivamente $-\frac{1}{100}$ e $-\frac{1}{20}$, ció indica che le formiche nordvietnamite sono combattenti migliori. Infine il potenziale biologico della popolazione S é molto maggiore di quello della popolazione N.

Il sistema é dotato di ogni regolaritá necessaria per applicare il Teorema di Cauchy ed é autonomo da cui deduciamo che le traiettorie nel piano (S, N) non si possono intersecare.

3.2 Analisi del modello

Consideriamo il sistema (3). La prima equazione é nulla sulle rette $S = 0$ e $N = 2$ mentre la seconda é nulla sulle rette $N = 0$ e $N = -S + 1$. I punti singolari del sistema, cioé le soluzioni costanti, sono (0,0) e (0,1).

Considerando naturalmente S e N entrambi maggiori o uguali a zero, si vede facilmente che S cresce quando $0 \leq N < 2$ e decresce per $N > 2$ mentre N cresce per $0 \leq N < -S - 1$ e decresce per $N > -S - 1$.

[1] almeno localmente

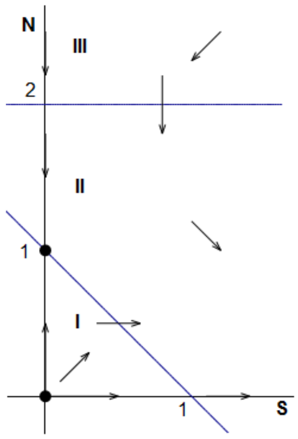

Figura 1: Direzioni di crescita di S e N

Se $S(t_0) = 0$ la popolazione N tende al valore logistico 1, viceversa se $N(t_0) = 0$ S cresce illimitatamente; questi sono i casi banali che peró non sono di nostro interesse. Supponiamo allora $S(t_0)$ e $N(t_0)$ strettamente maggiori di zero e andiamo a considerare tre regioni distinte del primo quadrante come segue:

Zona I= $\{(S,T) \mid 0 < N < -S-1 \text{ e } S > 0\}$ $\leftrightarrow$ $\dot{S} > 0$ $\dot{N} > 0$
Zona II=$\{(S,T) \mid -S-1 < N < 2 \text{ e } S > 0\}$ $\leftrightarrow$ $\dot{S} > 0$ $\dot{N} < 0$
Zona III=$\{(S,T) \mid N > 2 \text{ e } S > 0\}$ $\leftrightarrow$ $\dot{S} < 0$ $\dot{N} < 0$

Supponiamo di avere una soluzione $S(t), N(t)$ che si trova nella zona I al tempo $\bar{t}$. In questa regione S e N sono strettamente crescenti e non ci sono punti singolari, avendo supposto $S(t_0) \neq 0$, quindi esiste $t > \bar{t}$ tale che $S(t), N(t)$ sta nella zona II cioé la traiettoria intersecherá la retta $N = -S-1$ ed entrerá nella zona II.

Mostriamo ora che se una soluzione si trova nella zona III al tempo $\bar{t}$ entrerá nella zona II. S e N sono decrescenti quindi si puó avere due possibilitá:

1. Esiste t^* tale che $S(t^*) = 0$ e $N(t^*) \geq 2$ cioé la traiettoria interseca l'asse N in $N(t^*) \geq 2$;
2. La traiettoria interseca la retta $N = 2$ in $S > 0$ ed entra nella zona II.

Supponiamo per assurdo che si verifichi la (1) e che sia $N(t^*) = \bar{N}$. Consideriamo ora la soluzione corrispondente alla condizione iniziale $S(t_0) = 0$ e $N(t_0) > \bar{N}$: questa si muove sull'asse N fino ad arrivare al punto singolare $(1, 0)$ poiché si ha $\dot{S} = 0$. Allora si ha che le due soluzioni si intersecano in un punto dell'asse N, ma ció é assurdo per quanto detto nel paragrafo 2.2. Non ci sono punti singolari dove la traiettoria potrebbe finire quindi vale la

(2) cioé la soluzione $S(t), N(t)$ del sistema (3) é destinata ad entrare nella zona II.

Si vede facilmente che ogni traiettoria che si trova nella zona II al tempo $\bar{t}$ vi rimarrá per ogni $t > \bar{t}$ poiché $\frac{dS}{dt} > 0$ e non puó intersecare la retta $N = -S - 1$ in quanto le traiettorie escono da essa, inoltre se arrivano sull'asse S rimarrano su essa per ogni tempo successivo poiché su questa si ha $\dot{N} = 0$

Possiamo quindi concludere per ogni soluzione $S(t), N(t)$ di (3) con $S(t_0) > 0$ esiste un tempo $\bar{t}$ tale che per ogni $t > \bar{t}$ la traiettoria sta nella zona II. Allora, poiché in questa regione S é strettamente crescente e non ci puó essere un asintoto verticale, altrimenti uscirei dalla zona II, si ha che $\lim_{t\to+\infty} S(t) = +\infty$.
Supponiamo ora senza perdita di generalitá di essere nella zona II, allora esisterá $\bar{H} > 0$ tale che $\frac{dN}{dt} \leq -\bar{H} \quad \forall\, t$ da cui deduciamo che $\lim_{t\to+\infty} N(t) = 0$.

3.3 Conclusioni

Abbiamo mostrato che per ogni $S(t), N(t)$ soluzioni del sistema (3) con $S(t_0) > 0$ vale che:

$$\lim_{t\to+\infty} S(t) = +\infty$$

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = 0$$

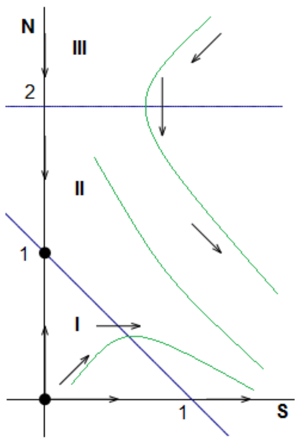

Figura 2: Le traiettorie del sistema (3)

Ció significa che per quanto possa essere grande N, cioé per quante formiche nordvietnamite vengano aggiunte al combattimento, in ogni caso queste sono destinate a scomparire a favore delle formiche sudvietnamite che sono invece destinate ad una crescita illimitata.

Questo é il motivo per cui il giudice, nella divertente storia inventata da Braun, insiste nel sottolineare la stupiditá dei sudvietnamiti: infatti se questi non avessero rinunciato all'accordo avrebbero vinto il combattimento e avrebbero quindi potuto mantenere la propria indipendenza. Allo stesso modo é giustificata la lieve pena imposta al supervisore polacco infatti il suo gesto non avrebbe influito sull'esito del combattimento.

É interessante osservare che, secondo il modello, la specie S dovrebbe crescere illimitatamente nel tempo, arriverebbe addirittura ad invadere il palazzo residenziale di Parigi dove si tenevano gli accordi di pace. Ció indica banalmente che il modello di M. Braun non é realistico a lungo termine anche se per tempi limitati funziona bene.

4 Un caso piú generale

4.1 Presentazione del problema

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = cy - dxy - ey^2 \end{cases} \tag{4}$$

con $a, b, c, d, e > 0$ e con condizioni iniziali $x(t_0) > 0$ e $y(t_0) \geq 0$
Questo sistema puó descrivere ad esempio un modello di competizione tra due specie x e y caratterizzate dai coefficienti a, b, c, d, e dove:
- a e c sono il potenziale biologico rispettivamente della popolazione x e y,
- b e d sono coefficienti che indicano quanto una popolazioni soffra per presenza dell'altra,
- e tiene conto della mancanza di risorse (cibo, spazio...) per la specie y.

Osserviamo che anche per questo sistema valgono le ipotesi del Teorema di Cauchy e che esso é autonomo per cui é lecito affermare che le traiettorie nel piano (x,y) non si possono intersecare.

Supporremo d'ora in avanti $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{e}$; il sistema (3) soddisfa quest'ipotesi infatti si ha $\frac{a}{b} = 2 > 1 = \frac{c}{e}$ per cui é un caso particolare di questo .

4.2 Analisi del sistema

Consideriamo il sistema (4), si verifica facilmente che:

$$\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 0 \text{ se e solo se } x = 0 \text{ o } y = \frac{a}{b} \\ \frac{dy}{dt} = 0 \text{ se e solo se } y = 0 \text{ o } y = -\frac{d}{e}x + \frac{c}{e} \end{array}$$

L'ipotesi $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{e}$ assicura che le due rette $y = \frac{a}{b}$ e $y = -\frac{d}{e}x + \frac{c}{e}$ non si intersecano nel primo quadrante e, quindi, che i punti singolari di nostro

interesse[2] sono esattamente due: $(0,0)$ e $(0, \frac{c}{e})$.
Di nuovo possiamo considerare le tre zone distinte:

$$\text{Zona I} = \left\{ (x,y) \mid 0 < y < -\frac{d}{e}x + \frac{c}{e} \text{ e } x > 0 \right\}$$

$$\text{Zona II} = \left\{ (x,y) \mid -\frac{d}{e}x + \frac{c}{e} < y < \frac{a}{b} \text{ e } y > 0 \text{ e } x > 0 \right\}$$

$$\text{Zona III} = \left\{ (x,y) \mid y > \frac{a}{b} \text{ e } x > 0 \right\}$$

per cui si ha che nella zona I sia x che y crescono, nella zona II x cresce e y decresce, mentre nella zona III decrescono entrambe (vedi figura 3).

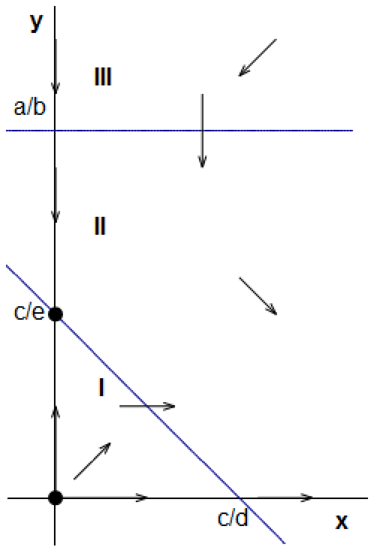

Figura 3: Direzioni di crescita di x e y

Supponiamo di avere una soluzione $x(t)$, $y(t)$ di (4) nella zona I. Allora esiste un tempo $\bar{t}$ tale che $x(\bar{t}), y(\bar{t})$ sta nella zona II, perché la traiettoria deve intersecare per forza la retta $y = -\frac{d}{e}x + \frac{c}{e}$ essendo x e y crescenti nella zona I e non essendoci punti singolari [3].

Analogamente se $x(t)$, $y(t)$ é una soluzione di (4) che al tempo t^* si trova nella zona III, esiste $\bar{t} > t^*$ tale che $x(\bar{t}), y(\bar{t})$ sta nella zona II perché la traiettoria deve intersecare la retta $y = \frac{a}{b}$ in $x > 0$. Infatti supponiamo per assurdo che esista $\hat{t}$ tale che $x(\hat{t}) = 0$ e $y(\hat{t}) = \hat{y} > \frac{a}{b}$ [4] e consideriamo la soluzione del sistema (4) corrispondente alla condizione iniziale $x(t_0) =$

[2] perché dimostreremo che le traiettorie rimangono nel primo quadrante
[3] perché $S(t_0) > 0$
[4] altrimenti dovrebbe intersecarla in $x > 0$

0 e $y(t_0) > \hat{y}$: quest'ultima si muove sull'asse y verso il punto singolare $(0, \frac{c}{e})$. Siamo giunti ad un assurdo in quanto le traiettorie non si possono intersecare, come giá mostrato. Allora la soluzione $x(t)$, $y(t)$ deve intersecare la retta $y = \frac{a}{b}$ in $x > 0$ ed entrare nella zona II.

Sia ora $x(t)$, $y(t)$ soluzione di (4) che al tempo t^* si trova nella zona II, allora per ogni $t > t^*$ la traiettoria rimarrá in questa regione infatti x é strettamente crescente mentre y decresce e non posso entrare nella zona I poiché dalla retta $y = -\frac{d}{e}x + \frac{c}{e}$ le traiettorie sono uscenti.

Abbiamo quindi dimostrato che per ogni soluzione $x(t)$, $y(t)$ di (4) esiste $\bar{t}$ tale che per ogni $t > \bar{t}$ la soluzione si trova nella zona II. In questa regione x é strettamente crescente mentre y é strettamente decrescente eccetto che sulla retta $y = 0$ su cui é costante. Allora esiste $M > 0$ tale che $\frac{dy}{dt} \leq -M$ per ogni $y > 0$ da cui si ha che $y(t)$ tende a 0 per t che tende a $+\infty$.

4.3 Conclusioni

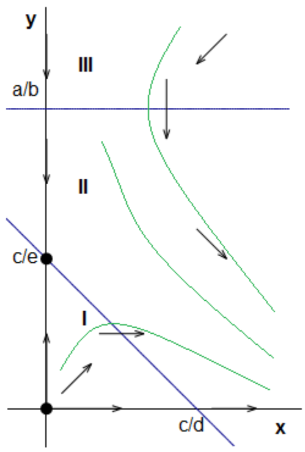

Figura 4: Le soluzioni del sistema (4)

In conclusione per ogni soluzione $x(t)$, $y(t)$ del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = cy - dxy - ey^2 \end{cases}$$

con a, b, c, $d > 0$ e $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{e}$ e con condizioni iniziali $x(t_0) > 0$ e $y(t_0) \geq 0$ vale che:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$$

5 Bibliografia

Riferimenti bibliografici

[1] Martin Braun *Differential Equations and Their Applications*. Applied Mathematical Sciences, Volume 15.
Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1975.

[2] N. Fusco, P. Marcellini, G. Sbordone *Analisi Matematica due*. Liguori Editore.

[3] A. Fasano, S. Marmi *Meccanica Analitica*. Bollati Boringhieri.