UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Anno accademico 2007/2008

Modelli di Guerra e Pace

Relazione finale

di Emanuele Bucarelli

relatore: Gabriele Villari

1 SISTEMI LINEARI

Le equazioni lineari costituiscono praticamente l'unica grande classe di equazioni differenziali per le quali esiste una teoria compiuta. La teoria delle equazioni lineari permette di risolvere completamente tutte le equazioni lineari autonome ed è utile per dare un'approssimazione di problemi non lineari.

Consideriamo un'equazione differenziale definita da un campo vettoriale $\boldsymbol{v}$ nello spazio delle fasi e consideriamo la struttura del campo in un intorno di un punto singolare, cioè un punto in cui si annulla il vettore del campo. Tale punto $\mathbf{x}_0$ è una soluzione stazionaria dell'equazione.

Per studiare un campo vettoriale in un intorno del punto $\mathbf{x}_0$ e ricondursi al caso di un'equazione lineare, si può sviluppare il campo in serie di Taylor in tale intorno. Dato che il primo termine della serie è lineare, in questo caso, linearizzare vuol dire trascurare i rimanenti termini. Più precisamente, sia $\boldsymbol{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), ..., v_n(\mathbf{x}))$ un campo vettoriale definito in $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che il punto singolare sia $\mathbf{x}_0 = 0$. Allora l'equazione differenziale si scrive:

$$\dot{x}_i = v_i(\mathbf{x}), \qquad i = 1, ..., n$$

Si dice linearizzata un'equazione della forma:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad a_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}_{\mathbf{x}=0} \qquad i = 1...n \tag{1}$$

dove $A = a_{ij} \quad i,j = 1...n$ è la matrice a coefficienti costanti associata al sistema. Introduciamo l'operatore lineare e^{At}: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito:

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

In accordo con la formula di derivazione $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$, la soluzione dell'equazione (1) con condizioni iniziali $\boldsymbol{x}(\mathbf{0}) = x_0$ si può scrivere come:

$$\boldsymbol{x}(\mathbf{t}) = x_0 e^{At} \quad t \in \mathbb{R}$$

2 Classificazione dei punti singolari nel piano

Sia ora

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

un'equazione lineare qualsiasi nel piano con λ_1,λ_2 autovalori di A. Distinguiamo due casi:

Caso I: gli autovalori di A sono reali

(I.1) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ (nodo attrattivo). Siano $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ gli autovettori corrispondenti a λ_1,λ_2. Dunque la soluzione di (2) è $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$ con le costanti c_1,c_2 determinate dalla condizione iniziale scomposta nella base di $\mathbb{R}^2$ data da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Quando $t \to \infty$ si ha $\mathbf{x}(t) \to 0$ e la traiettoria nel piano delle fasi è tangente in $\mathbf{x} = 0$.

(I.2) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ (nodo repulsivo). La discussione svolta nel caso (I.1) si ripete invariata considerando il limite per $t \to -\infty$.

(I.3) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (sella). Le soluzioni $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$ sono asintotiche alla direzione $\mathbf{v}_1$ per $t \to +\infty$ e $\mathbf{v}_2$ per $t \to -\infty$.

(I.4) $\lambda_1 = \lambda_2$ e A diagonalizzabile (nodo a stella). In questo caso $A = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ogni vettore del piano è autovettore e le soluzioni percorrono raggi $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)e^{\lambda_1 t}$.

(I.5) $\lambda_1 = \lambda_2$ e A non diagonalizzabile (nodo di Jordan). Mediante una trasformazione lineare invertibile si può ricondurre A a un blocco di Jordan $\begin{pmatrix} \lambda_1 & k \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, $k \neq 0$. Se $\lambda_1 \neq 0$ le traietorie del sistema sono della forma $x_1 = x_2 \frac{k}{\lambda_1} \lg |\frac{x_2}{c}|$.

Caso II: gli autovalori di A sono complessi coniugati. L'equazione agli autovalori che si ottiene è $\lambda^2 - Tr(A)\lambda + det(A) = 0$. Ponendo $\theta = \frac{1}{2}Tr(A)$ e $\omega = \sqrt{detA - \theta^2}$, abbiamo $\lambda_1 = \theta + i\omega, \quad \lambda_2 = \theta - i\omega$.

La matrice A è diagonalizzabile nel campo complesso e si può vedere che

$$S^{-1} \begin{pmatrix} \theta + i\omega & 0 \\ 0 & \theta - i\omega \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} \theta & -\omega \\ \omega & \theta \end{pmatrix}$$

con $S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. Possiamo ricondurci al caso $A = \begin{pmatrix} \theta & -\omega \\ \omega & \theta \end{pmatrix}$, che ha il vantaggio di non far intervenire numeri complessi. Passando alle coordinate polari (r, ϕ), il sistema diventa $\dot{r} = r\theta, \quad \dot{\phi} = \omega$, che ha soluzione $r = r_0 e^{\frac{\theta}{\omega} r}$. A questo punto la classificazione è:

(II.1) $\theta = 0$ (centro) Le traiettorie sono circonferenze.

(II.2) $\theta \neq 0$ (fuoco) Le traiettorie sono spirali convergenti verso il centro se $\theta < 0$ (caso attrattivo), in allontanamento se $\theta > 0$ (caso repulsivo).

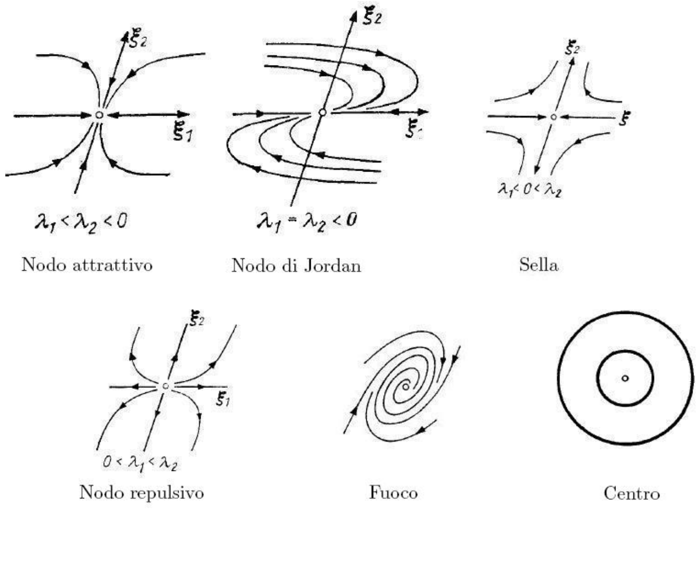


Figura 1: Principali punti singolari

3 Stabilità

Consideriamo l'equazione

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

dove $\mathbf{v}$ è un campo vettoriale $r > 2$ volte differenziabile nel dominio $\mathbf{U}$. Supponiamo che l'equazione (3) abbia una posizione d'equilibrio e scegliamo le coordinate in modo che la posizione di equilibrio coincida con l'origine delle coordinate: $\mathbf{v}(0) = 0$. La soluzione soddisfacente alla condizione iniziale $\varphi(t_0) = 0$ è $\varphi = 0$. Ciò che ci interessa è il comportamento delle soluzioni con condizioni iniziali prossime al punto critico $\mathbf{x} = 0$

Definizione 1. Una posizione di equilibrio $\mathbf{x} = 0$ dell'equazione è detta *stabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ (dipendente solo da ε e non da t) tale che per ogni x_0 che soddisfa $\|x_0\| < \delta$, la soluzione φ con condizione iniziale $\varphi(0)=x_0$ puo esser prolungata sull'intero semiasse $t > 0$ e soddisfa alla disuguaglianza $\|\varphi(t)\| < \varepsilon$ per ogni $t > 0$.

Definizione 2. Una posizione di equilibrio $\mathbf{x} = 0$ dell'equazione (3) è detta *asintoticamente stabile* se è stabile e

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$$

per ogni soluzione φ soddisfacente alla condizione iniziale $\varphi(0)$ giacente in un intorno sufficientemente piccolo dello zero.

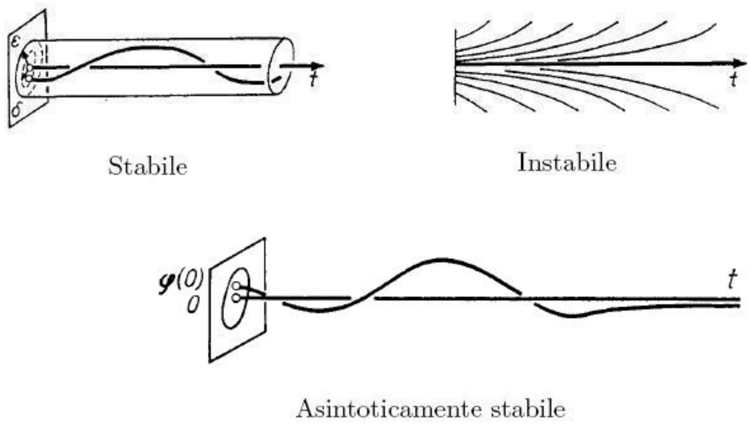


Figura 2: differenza dell'andamento delle curve integrali

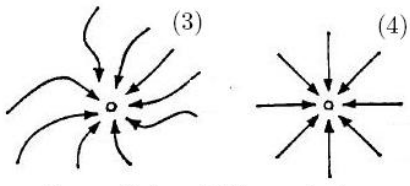
Consideriamo, unitamente alla (3), l'equazione linearizzata

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{4}$$

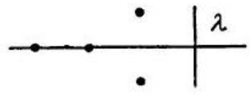
allora

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \qquad \mathbf{v}_1 = A\mathbf{x} \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{O}(\|\mathbf{x}\|^2) \tag{5}$$

Teorema 3. *Supponiamo che tutti gli autovalori λ dell'operatore A giacciano nel semipiano sinistro: $Re\lambda < 0$. Allora la posizione di equilibrio $\boldsymbol{x} = 0$ dell'equazione (3) è asintoticamente stabile.*



Curve di fase dell'equazioni (3) e (4)



Autovalori dell'operatore A

4 Modelli guerra e pace

L.F.Richardson si propone di costruire un modello che descriva l'evolversi delle relazioni tra un gruppo di nazioni, ciascuno dei quali vuole difendersi da un possibile attacco dell'altro. Analizzeremo il caso in cui si fronteggianpo due gruppi di nazioni (o semplicemente due nazioni): Egolandia, a cui è assegnata la variabile x ed Alterlandia, indicata con y. Tali variabili rappresentano rispettivamente l'ammontare della spesa militare di ciascun schieramento.

I fattori che determinano la variazione di tali quantità sono molteplici; in questo modello consideremo solo quelli principali. Per prima cosa, volgliamo quantificare quanto uno schieramento si senta minacciato dalla presenza dell'altro. In simboli:

$$\dot{x} = by \qquad \dot{y} = cx, \quad b, c \geq 0$$

dove b, c vengono detti coefficienti di difesa. Se la crescita fosse solo di questo tipo, partendo da x, y inizialmente positive, avremmo una crescita esponenziale all'infinito. In realtà, ciò non avviene ed esistono limitazioni alla crescita degli armamenti dovute ai costi militari. Correggeremo le equazioni precedenti con un termine proporzianale all'ammontare delle difese stesse. In simboli

$$\dot{x} = -ax + by \qquad \dot{y} = cx - dy, \quad a, d \geq 0$$

dove a, d rappresentano la spesa per sostenere la difesa. Introduciamo infine un ulteriore termine costante in entrambe le equazioni che tenga conto di eventuali rancori tra i due schieramenti. Il sistema finale che si ottiene è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + by + e \\ \dot{y} = cx - dy + f \end{cases} \tag{6}$$

Riassumendo: ad ogni istante la variazione degli armamenti di Egolandia è proporzionale all'ammontare degli armamenti di Alterlandia, è inversamente proporzionale all'ammontare degli armamenti della stessa Egolandia e dipende dallo stato d'animo di Egolandia nei confronti di Alterlandia. Poiché non è necessario che le soluzioni di (6) restino confinate nel primo quadrante, si dà un'interpretazione di x, y quando sono negative come misura della cooperazione tra le due nazioni. La forma più ampia di cooperazione internazionale è il commercio estero, quindi le variabili x, y rappresentano la differenza tra l'ammontare delle spese militari ed il volume del traffico commerciale.

Date le condizioni iniziali, nello studio delle soluzioni interessa comprendere se esiste una posizione d'equilibrio stabile. Tale stabilità implica non solo che le nazioni non accrescono più le loro difese, ma anche che piccoli spostamenti da questa posizione non portano alla divergenza della soluzione, cioè verso la guerra.

Analizzando il sistema esiste un unico punto di equilibrio dato da:

$$x = x_0 = \frac{bf + de}{ad - bc}, \quad y = y_0 = \frac{ce + af}{ad - bc}$$

Studiamo la stabilità del punto critico (x_0, y_0). A tale scopo riscriviamo il sistema (6) nella forma:

$$Z^{'} = AZ + V \tag{7}$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

e la soluzione d'equilibrio è data da:

$$Z = Z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -A^{-1}V$$

con $AZ_0 + V = 0$. Posto $T = Z - Z_0$ si ottiene:

$$\dot{T} = \dot{Z} = AZ + V = A(T + Z_0) + V = AT + AZ_0 + V = AT$$

Dunque il sistema (7) è equivalente al sistema:

$$\dot{T} = AT \tag{8}$$

e la soluzione di equilibrio $Z(t) = Z_0$ è stabile se e solo se è stabile la soluzione $T = 0$ del sistema (8).

Per determinare la stabilità di tale sistema calcoliamo gli autovalori di A, il cui polinomio caratteristico è dato:

$$p(\lambda) = det \begin{pmatrix} -a - \lambda & b \\ c & -d - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

e le radici di $p(\lambda)$ sono:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a + d) \pm [(a - d)^2 + 4bc]^{\frac{1}{2}}}{2}$$

Dunque gli autovalori di A sono reali e diversi da zero.Inoltre se $ad - bc > 0$, essi sono entrambi negativi e si può concludere che il punto Z_0 è di equilibrio stabile;

altrimenti se $ad - bc < 0$, un autovalore è positivo e l'altro negativo e si può concludere che il punto Z_0 è di equilibrio instabile.

Notiamo che nel modello di Richardson la stabilità tra i due schieramenti è garantita quando la spesa per sostenere la difesa supera l'attitudine alla difesa dei due schieramenti.

Si possono fare delle obbiezioni nei confronti del modello proposto da Richardson, soprattutto riguardo al problema della misura delle costanti in gioco. Un'altra critica mossa a tale modello è che ciascuna nazione, venuta a conoscenza del potenziale bellico della nazione nemica, non può reagire istantaneamente, ma è necessario un tempo $T > 0$ di reazione. Hill modificò il modello di Richardson tenendo conto di questa critica, proponendo il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax(t - T) + by(t - T) + e \\ \dot{y} = cx(t - T) - dy(t - T) + f \end{cases} \tag{9}$$

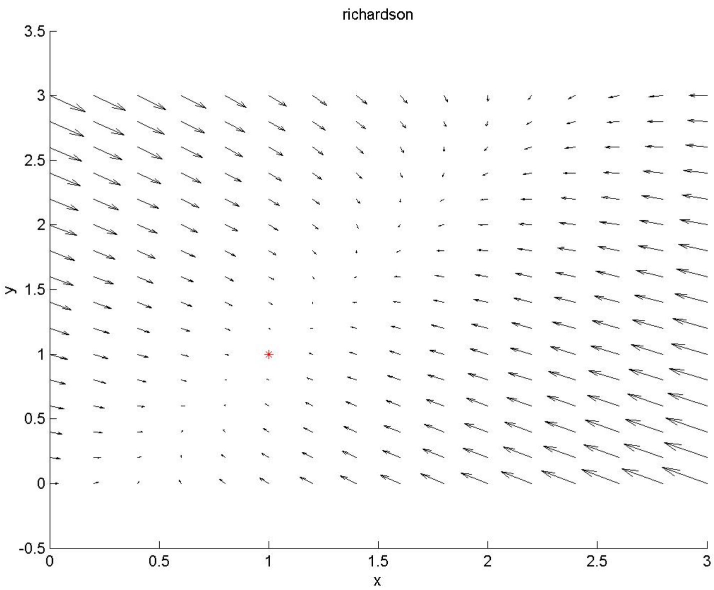


Figura 3: stabile

Il sistema (9) è costituito da equazioni differenziali, in cui è stato introdotto un ritardo temporale rispetto al tempo T.

Un modello che superò alcune delle critiche mosse sia a Richardson che a Hill è quello proposto da Gopalsamy. Egli suppose che la nazione x ricordasse il passato lontano in modo confuso, quello recente abbastanza bene e che non potesse reagire istantaneamente alle minacce ricevute. Sotto queste ipotesi il modello diventa:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax(t) + b\int_{-\infty}^{t} G(t-s)y(s)ds + e \\ \dot{y} = cx(t) - dy(t) + f \end{cases} \tag{10}$$

dove G è una funzione continua, detta nucleo ritardante, che soddisfa la condizione di normalizzazione $\int_0^\infty G(s)ds = 1$. Questa normalizzazione ci permette di concludere che i punti di equilibrio del sistema (6) sono punti di equilibrio anche per (10).

Il sistema (10) scritto in questa forma è molto generale e per renderlo trattabile occorre scegliere opportunamente il nucleo $G(t)$. Consideriamo la funzione $G(t) = \alpha e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0$. Con questa scelta del nucleo, il sistema (10) si riduce a un sistema di equazioni differenziali ordinarie, ma con più variabili dipendenti. Introduciamo la variabile ausiliaria $w(t) = \alpha\int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)}y(s)ds$, da cui:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax(t) + bw(t) + e \\ \dot{y} = cx(t) - dy(t) + f \\ \dot{w} = \alpha(y(t) - w(t)) \end{cases} \tag{11}$$

Il sistema (11) ha come punto stazionario (x_0, y_0, y_0) se e solo se (x_0, y_0) è una soluzione asintoticamente stabile per il sistema (10). Per analizzare la stabilità di (11), cerchiamo le

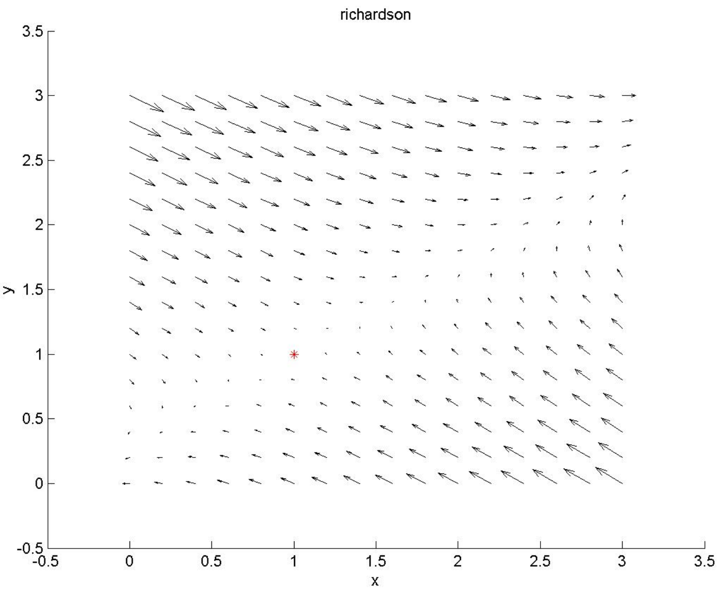


Figura 4: instabile

soluzioni nella forma:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + X(t) \\ y(t) = y_0 + Y(t) \\ w(t) = y_0 + W(t) \end{cases} \tag{12}$$

linearizzando il sistema si ottiene

$$\begin{cases} \dot{X} = -aX(t) + bW(t) \\ \dot{Y} = cX(t) - dY(t) \\ \dot{W} = \alpha(Y(t) - W(t)) \end{cases} \tag{13}$$

E' chiaro che $(x(t), y(t), w(t)) \to (x_0, y_0, y_0)$ se e solo se $(X(t), Y(t), W(t)) \to (0, 0, 0)$.

Lemma 4. *Se* $ad - bc > 0$*, allora il punto stazionario* $(0, 0, 0)$ *di (13) è asintoticamente stabile.*

Dimostrazione. Gli autovalori della matrice associata al sistema (13) sono le soluzioni del polinomio caratteristico:

$$\lambda^3 + \lambda^2 M_1 + \lambda M_2 + M_3 = 0$$

dove

$$M_1 = \alpha + (a + d) \quad M_2 = ad + \alpha(a + d) \quad M_3 = \alpha(ad - bc)$$

Per il criterio di Routh-Hurwitz, se $ad - bc > 0$, le radici del polinomio caratteristico hanno parte reale negativa e quindi la soluzione di (13) tende asintoticamente a $(0, 0, 0)$. □

Una variante del modello di Gopalsamy appena presentato tiene conto del ritardo di risposta da parte di una nazione dovuto al carico economico necessario per sostenere i propri armamenti. Quindi si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x} = -a\int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)}x(s)ds + by(t) + e \\ \dot{y} = cx(t) - dy(t) + f \end{cases} \tag{14}$$

Ripercorrendo gli stessi passi del modello precedente, si può dimostrare che la stabilità del punto critico (x_0, y_0) del sistema (14) è influenzata dal valore di α.

Lemma 5. *Se $ad - bc > 0$, il punto di equilibrio di (14) non è asintoticamente stabile se $0 < \alpha < \frac{-d^2+\sqrt{d^4+4(a+d)(bcd)}}{2(a+d)}$.*

Dimostrazione. Gli autovalori della matrice associata al sistema linearizzato sono le radici del polinomio caratteristico:

$$\lambda^3 + \lambda^2 N_1 + \lambda N_2 + N_3 = 0$$

dove

$$N_1 = \alpha + d \quad N_2 = \alpha(a+d) - bc \quad N_3 = \alpha(ad - bc)$$

Una condizione necessaria e sufficiente affinché le radici abbiano parte reale negativa è data dal criterio di Rhouth-Hurwitz

$$N_1 > 0, \quad N_3 > 0, \quad N_1 N_2 > N_3$$

Le prime due condizioni sono verificate per ogni $\alpha > 0$ mentre la terza porta a

$$\alpha^2(a+d) + \alpha d^2 - dbc > 0$$

che è verificata se e solo se

$$(\alpha - \alpha^*)(\alpha - \alpha_*) > 0$$

dove

$$\frac{-d^2 \pm \sqrt{d^4 + 4(d+a)dbc}}{2(a+d)} = \begin{cases} \alpha^* \\ \alpha_* \end{cases}$$

Notiamo che $\alpha_* < 0$, se $0 < \alpha < \alpha^*$ almeno uno degli autovalori ha parte reale positiva determinando la non stabilità asintotica per il sistema (14). $\square$

In conclusione, abbiamo visto che nel modello di Richardson la stabilità è determinata dalla differenza tra i termini che rappresentano le spese per sostenere gli armamenti e quelli relativi all'attitudine alla difesa della nazione stessa. Nei modelli di Gopalsamy, anche introducendo un ritardo temporale nelle espressioni relative a queste grandezze si ha un'influenza analoga alla precedente sulla stabilità.