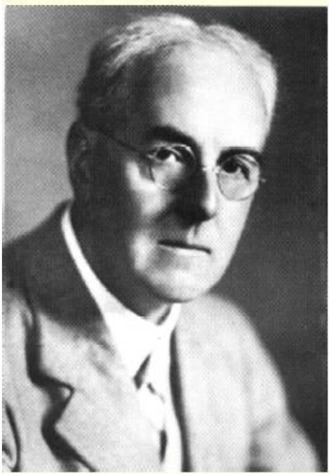
Modelli di guerra e pace

Emanuele Bucarelli

Firenze, 22 Aprile 2009

Lewis Fry Richardson (1881-1953)



Il Modello di Richardson

Il modello proposto da Richardson è:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax(t) + by(t) + e \\ \dot{y} = cx(t) - dy(t) + f \end{cases}$$

Il Modello di Richardson

Il modello proposto da Richardson è:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax(t) + by(t) + e \\ \dot{y} = cx(t) - dy(t) + f \end{cases}$$

- a e d : peso economico
- b e c : coefficienti di ”minaccia”
- e e f : rancori

$a, b, c, d, e, f > 0$

Stabilità

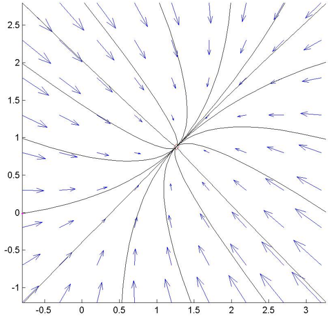
Punto di equilibrio :

$$x = x_0 = \frac{bf + de}{ad - bc}, \quad y = y_0 = \frac{ce + af}{ad - bc}$$

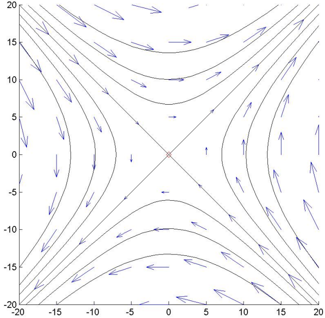
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Autovalori : $\lambda_{1,2} = \dfrac{-(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$

Stabilità



Stabile se $ad - bc > 0$



Instabile se $ad - bc < 0$

Critiche

- Eccessiva semplicità $\longrightarrow$ Modello lineare
- Coefficienti difficilmente determinabili
- Reazione istantanea

Il Modello di Hill

Il modello proposto da Hill è:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t-T) + by(t-T) + e \\ \dot{y}(t) = cx(t-T) - dy(t-T) + f \end{cases}$$

Trasformata di Laplace

Trasformata di Laplace:

$$L(z) = \int_0^{+\infty} z(t) e^{-st} dt$$

Antitrasformata di Laplace:

$$z(t) = \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} \frac{e^{st} L(z)}{2\pi j} ds$$

Trasformata di Laplace di $z(\phi)$ con $\phi = t - T$

$$L[z(\phi)] = \int_{-T}^{\infty} e^{(-s(\phi+T))} z(\phi) d\phi = Z^{\circ} + e^{(-sT)} L(z)$$

Linearizzazione del Modello

Applicando la trasformata di Laplace al modello otteniamo:

$$\begin{cases} L(x) = \frac{(s+de^{(-sT)})sN_1+sN_2be^{(-sT)}}{C(s)} \\ L(y) = \frac{(s+ae^{(-st)})sN_2+sN_1ce^{(-sT)}}{C(s)} \end{cases}$$

dove

$$\begin{cases} N_1 = x(0) + \frac{e}{s} - aX^{\circ} + bY^{\circ} \\ N_2 = y(0) + \frac{f}{s} + cX^{\circ} - dY^{\circ} \end{cases}$$

Linearizzazione del Modello

Applicando la trasformata di Laplace al modello otteniamo:

$$\begin{cases} L(x) = \frac{(s+de^{(-sT)})sN_1+sN_2be^{(-sT)}}{C(s)} \\ L(y) = \frac{(s+ae^{(-st)})sN_2+sN_1ce^{(-sT)}}{C(s)} \end{cases}$$

l'equazione caratteristica è:

$$C(s) = s(s^2 + se^{(-sT)}(a+d) + e^{(-2sT)}(ad-bc))$$

Radici di $C(s)$

Le radici di $C(s)$ risolvono:

$$s = \gamma e^{(-sT)}$$

dove:

$$\gamma = \frac{-(a+d) \pm [(a-d)^2 + 4bc]^{\frac{1}{2}}}{2} = \gamma_+, \gamma_-$$

Radici di $C(s)$

Le radici di $C(s)$ risolvono:

$$s = \gamma e^{(-sT)}$$

$$\gamma > 0$$

$$\Downarrow$$

Instabile

Radici di $C(s)$

Le radici di $C(s)$ risolvono:

$$s = \gamma e^{(-sT)}$$

$$\gamma > 0$$

$$\Downarrow$$

Instabile

$$\gamma = 0$$

$$\Downarrow$$

Caso degenere

Stabile

Radici di $C(s)$

Le radici di $C(s)$ risolvono:

$$s = \gamma e^{(-sT)}$$

$\gamma > 0$	$\gamma = 0$	$\gamma < 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
Instabile	*Caso degenere Stabile*	*Regione di Stabilità*

Condizioni di stabilità

Consideriamo $s = u + iv$, otteniamo due equazioni:

$$\begin{cases} u = \gamma e^{(-Tu)} cos(Tv) \\ v = \gamma e^{(-Tu)} sen(Tv) \end{cases}$$

Per avere $u \leq 0$

$$\gamma_+ \leq 0 \quad e \quad -\gamma_- \leq \frac{3\pi}{2T}$$

Condizioni di stabilità

Condizioni di stabilità:

$$\begin{cases} ad - bc > 0 \\ \frac{3\pi}{T} \geq a + d \\ b \leq \frac{ad}{c} - \frac{3\pi(a+d)}{2Tc} + \frac{9\pi^2}{4cT^2} \end{cases}$$

$T \to 0 \Rightarrow$ Modello di Richardson

Regione di stabilità nel piano a, b

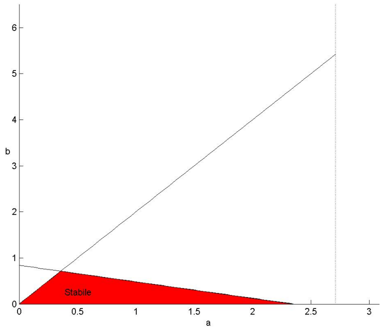


Figura: Regione stabile con T=10

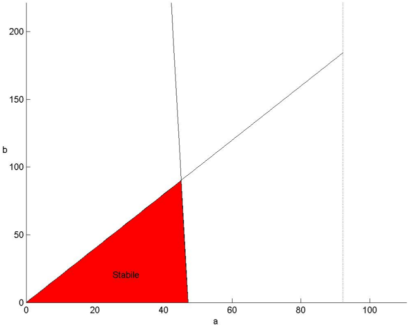


Figura: Regione stabile con T=1

I Modelli di Gopalsamy

Il modelli proposti da Gopalsamy sono:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax(t) + b\int_{-\infty}^{t} G(t-s)y(s)ds + e \\ \dot{y} = cx(t) - dy(t) + f \end{cases}$$

Il termine $\int_{-\infty}^{t} G(t-s)y(s) \rightarrow$ storia di y pesata con G

Dove: $\int_{0}^{\infty} G(s)ds = 1$

I Modelli di Gopalsamy

Il modelli proposti da Gopalsamy sono:

Il termine $\int_{-\infty}^{t} G(t-s)x(s) \rightarrow$ Carico economico pesato con G

$$\begin{cases} \dot{x} = -a\int_{-\infty}^{t} G(t-s)x(s)ds + by(t) + e \\ \dot{y} = cx(t) - dy(t) + f \end{cases}$$

Dove: $\int_{0}^{\infty} G(s)ds = 1$

I Modelli di Gopalsamy

Il modelli proposti da Gopalsamy sono:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax(t) + b\int_{-\infty}^{t} G(t-s)y(s)ds + e \\ \dot{y} = cx(t) - dy(t) + f \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -a\int_{-\infty}^{t} G(t-s)x(s)ds + by(t) + e \\ \dot{y} = cx(t) - dy(t) + f \end{cases}$$

Dove: $\int_{0}^{\infty} G(s)ds = 1$

Scelta del nucleo ritardante

Scegliamo come nucleo ritardante:

$$G(t) = \alpha e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0$$

Introduciamo la nuova variabile $w(t) = \alpha \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)} y(s) ds$

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax(t) + bw(t) + e \\ \dot{y} = cx(t) - dy(t) + f \\ \dot{w} = \alpha(y(t) - w(t)) \end{cases}$$

Linearizzazione del Modello

Per analizzare la stabilità cerchiamo le soluzioni della forma:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + X(t) \\ y(t) = y_0 + Y(t) \\ w(t) = y_0 + W(t) \end{cases}$$

Linearizzando si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{X} = -aX(t) + bW(t) \\ \dot{Y} = cX(t) - dY(t) \\ \dot{W} = \alpha(Y(t) - W(t)) \end{cases}$$

Linearizzazione del Modello

Per analizzare la stabilità cerchiamo le soluzioni della forma:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + X(t) \\ y(t) = y_0 + Y(t) \\ w(t) = y_0 + W(t) \end{cases}$$

E' chiaro che $(x(t), y(t), w(t)) \longrightarrow (x_0, y_0, y_0)$ se e solo se $(X(t), Y(t), W(t)) \rightarrow (0, 0, 0)$.

Stabilità del primo Modello

Le radici del polinomio caratteristico per il primo modello soddisfano:

$$\lambda^3 + \lambda^2 M_1 + \lambda M_2 + M_3 = 0$$

dove

$$M_1 = \alpha + (a + d) \quad M_2 = ad + \alpha(a + d) \quad M_3 = \alpha(ad - bc)$$

Per il criterio di Routh-Hurwitz le radici hanno tutte parte reale negativa se $ad - bc > 0$

Stabilità del secondo Modello

le radici del polinomio caratteristico del secondo modello soddisfano:

$$\lambda^3 + \lambda^2 N_1 + \lambda N_2 + N_3 = 0$$

dove

$$N_1 = \alpha + d \quad N_2 = \alpha(a + d) - bc \quad N_3 = \alpha(ad - bc)$$

se $0 < \alpha < \frac{-d^2+\sqrt{d^4+4(a+d)(bcd)}}{2(a+d)}$

$$\Rightarrow \quad \textit{Sistema} \quad \textit{instabile}$$

Richardson

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax(t) + by(t) + e \\ \dot{y} = cx(t) - dy(t) + f \end{cases}$$

Stabile se $ad > bc$

$$\Downarrow$$

Spese $>$ "Attitudine difesa"

Hill

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax(t-T) + by(t-T) + e \\ \dot{y} = cx(t-T) - dy(t-T) + f \end{cases}$$

Hill

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax(t-T) + by(t-T) + e \\ \dot{y} = cx(t-T) - dy(t-T) + f \end{cases}$$

Regione di stabilità:

$$\begin{cases} ad - bc > 0 \\ \frac{3\pi}{T} \geq a + d \\ b \leq \frac{ad}{c} - \frac{3\pi(a+d)}{2Tc} + \frac{9\pi^2}{4cT^2} \end{cases}$$

- Incremento $T \rightarrow$ Destabilizza
- Aumento di b o $c \rightarrow$ Riduce la regione di stabilità
- Se a o $d > \frac{3\pi}{T} \rightarrow$ Sistema instabile

Gopalsamy

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax(t) + b\int_{-\infty}^{t} G(t-s)y(s)ds + e \\ \dot{y} = cx(t) - dy(t) + f \end{cases}$$

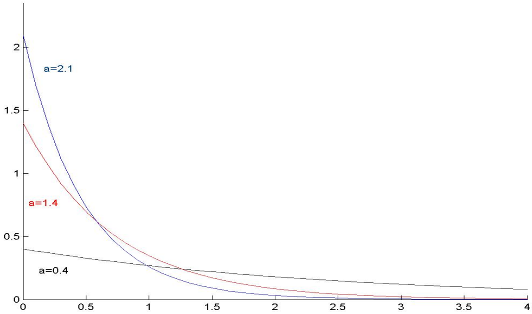
Stesse conlusioni del modello di Richardson

$$ad > bc \rightarrow \text{Stabile}$$

Gopalsamy

$$\begin{cases} \dot{x} = -a \int_{-\infty}^{t} G(t-s)x(s)ds + by(t) + e \\ \dot{y} = cx(t) - dy(t) + f \end{cases}$$

La stabilità dipende dal nucleo ritardante.



”*No, naturalmente no. Le equazioni sono soltanto una descrizione di che cosa la gente farebbe se non si fermasse a pensare. Perché ci sono tante nazioni che, a malincuore ma costantemente, incrementano i loro armamenti come se fossero meccanicamente costrette a farlo. Perché, io sostengo, esse seguono le loro tradizioni, che sono impianti fissi, e i loro istinti, che sono automatismi perché esse non hanno ancora fatto uno sforzo intellettuale e morale sufficientemente forte per controllare la situazione. Il processo descritto dalle equazioni che seguiranno non deve essere considerato come inevitabile. E' quello che accadrebbe se all'istinto e alla tradizione fosse permesso di agire senza controllo.”(Richardson, op.cit., p.12)*.