Sur un théorème de G. Sansone sur l'équation de Liénard.

par J. L. MASSERA (Montevideo, Uruguay)

Résumé. - *L'A. montre que dans un théorème demontré par* G. SANSONE *pour l'équation* $\frac{d^2i}{dt^2} + \omega f(i)\frac{di}{dt} + \omega^2 i = 0$ *peut être supprimée l'hypothése* $|f(i)| < 2$.

1. Dans un Mémoire publié aux Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e Politecnico di Torino, vol. 10 (1950-51), pag. 155-171, G. SANSONE a demontré le théorème suivant sur l'unicité des solutions périodiques de l'equation de LIÉNARD:

Si dans l'équation

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega f(i)\frac{di}{dt} + \omega^2 i = 0 \tag{1}$$

ω est une constante positive et $f(i)$ une fonction continue dans $(-\infty, \infty)$ qui satisfait aux hypothèses suivantes:

i) $f(i) < 0$ lorsque $\delta_{-1} < i < \delta_1$, $\delta_{-1} < 0$, $\delta_1 > 0$;

ii) $f(i) > 0$ lorsque $i < \delta_{-1}$ ou $i > \delta_1$;

iii) $f(\delta_{-1}) = f(\delta_1) = 0$;

iv) $|f(i)| < 2$;

v) $f(i)$ est non-croissante lorsque i varie de $-\infty$ à 0 et non-décroissante lorsque i varie de 0 à $+\infty$; alors, l'équation admet une et une seule solution périodique.

Je vais montrer dans cette note que l'énoncé reste valable si on supprime l'hypothèse iv).

L'équation (1) est équivalente au système

$$\frac{di}{dt} = \omega u \quad , \quad \frac{du}{dt} = -\omega[uf(i) + i) \tag{2}$$

dont les trajectoires sont données par l'équation

$$\frac{du}{di} = -f(i) - \frac{i}{u}. \tag{3}$$

Supposons pour un instant que $f(i)$ est monotone au sens strict. Alors. si dans le plan (i, u) on parcourt une demi-droite issue de l'origine, $\frac{i}{u}$ reste constant tandis que $f(i)$ augmente; lorsqu'on parcourt la demi-droite le champ de directions défini par (3) tourne donc dans le sens horaire.

Soit Γ un cycle correspondant à une solution périodique de (1) et soit Γ_k le cycle obtenu par une homotétie par rapport à l'origine de raison k. Alors, d'après la remarque précédente et puisque sur Γ le champ de directions (3) est tangent à Γ, il s'ensuit que pour $k > 1$ le champ de directions (3) sur Γ_k sera dirigé vers l'intérieur de Γ_k et, pour $k < 1$, vers l'extérieur. Si on considère la solution de (2) qui passe par un point initial (i_0, u_0) quelconque non situé sur Γ, cette solution restera entièrement à l'intérieur ou entièrement au dehors du cycle Γ_k qui passe par (i_0, u_0) et ne peut pas être, par conséquent, une solution périodique. Il faut remarquer que le raisonnement resterait valable même si Γ n'est pas étoilé par rapport à l'origine; dans ce cas Γ et Γ_k pourraient avoir des intersections.

Il faut cependant observer que sur les axes coordonnées le champ (3) est toujours tangent aux Γ_k, puisque, sur l'axe des i $\frac{du}{di} = \infty$ et, sur l'axe des u, $\frac{du}{di} = 0$. On pourrait penser que, par exemple pour $k > 1$, les courbes intégrales pourraient sortir de Γ_k par les points situés sur les axes. Il n'en est pas ainsi.

Pour le voir, soit P_0 un point d'intersection de Γ_k, $k > 1$, avec l'axe des u, $u > 0$. Considérons l'équation différentielle homogène $\frac{du}{di} = g(i, u)$ définie dans le voisinage de P_0 par les tangentes aux courbes Γ_k, c'est à dire l'équation qui admet les Γ_k pour courbes intégrales. D'après les remarques faites, on aura $g(i, u) \geq -f(i) - \frac{i}{u}$, le signe d'égalité ayant lieu pour $i = 0$. Mais alors, d'après un théorème classique sur les équations différentielles, les intégrales de (3) à droite de P_0 sont plus petites que les intégrales de $\frac{du}{di} = g$, c'est à dire, les intégrales de (3) penètrent dans l'intérieur de Γ_k même par les points P_0.

Le même raisonnement permet d'éliminer la restriction que nous avions imposée au début, c'est à dire, que la monotonie de f était stricte. S'il n'est pas ainsi, dans certains intervalles où f est constante, les courbes intégrales coïncideront avec les courbes Γ_k mais, dès qu'on a atteint l'extremité d'un de ces intervalles, la courbe penètre dans ou sort de Γ_k d'après la valeur de k. Le théorème est ainsi complètement démontré.

2. On peut remarquer que le théorème généralisé peut être aussi démontré avec la même méthode utilisée par G. SANSONE, pourvu qu'on ajoute quelques observations supplémentaires. La méthode de G. SANSONE repose sur le passage aux coordonnée, polaires $i = \rho \cos \theta$, $u = \rho \operatorname{sen} \theta$.

Les équations (2) et (3) prennent alors la forme

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\omega[1 + f(\rho \cos \theta) \sin \theta \cdot \cos \theta] \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\omega\rho f(\rho \cos \theta) \cdot \sin^2 \theta \end{aligned} \right. \tag{4}$$

$$\frac{d \log \rho}{d\theta} = \sin^2 \theta \, \frac{f(\rho \cos \theta)}{1 + f(\rho \cos \theta) \sin \theta \cos \theta}. \tag{5}$$

L'hypothèse $|f| < 2$ est destinée à éviter l'annullation du dénominateur dans (5). Si $|f|$ prend des valeurs ≥ 2 ce dénominateur peut effectivement s'annuller et $\frac{d\theta}{dt}$ peut prendre des valeurs positives. Une étude très simple des régions R où $\frac{d\theta}{dt} > 0$ permet de voir que ces régions sont bornées par des courbes telles que le champ de vecteurs (3) (ou (4)) sort toujours de R sur ces courbes. Il s'ensuit qu'une solution périodique ne peut jamais penetrer dans les régions R. Donc, pour les solutions périodiques, le dénominateur de (5) reste toujours positif et la démonstration de G. SANSONE maintient sa validité.