06100 Perugia, Via Pinturicchio, 55 - tel. (075) 28655

OTOCOMPOSIZIONE E STAMPA: TIP. M.G. - CITTÀ DI CASTELLO (PG)

I

Calcolo combinatorio

1. Disposizioni semplici, permutazioni semplici, combinazioni semplici

In questo numero considereremo oggetti in numero finito, di natura qualsiasi e di essi studieremo particolari forme di raggruppamento.

Disposizioni semplici - Dati n *oggetti distinti e detto* k *un intero positivo non maggiore di* n, *si chiamano disposizioni semplici di questi* n oggetti a k *a* k, *tutti i gruppi che si possono formare con gli* n *oggetti dati, in modo che ogni gruppo contenga* k *oggetti* (distinti) *e inoltre due gruppi qualunque differiscano tra loro o per qualche oggetto o per l'ordine con cui gli oggetti sono disposti* (ad es. raffigurandoli disposti sopra una retta).

Il numero delle disposizioni semplici di n oggetti a k a k si suole indicare col simbolo $D_{n,k}$.

Proviamo che

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2) \;....\; (n-k+1). \tag{1}$$

Supponiamo di aver formato le disposizioni semplici degli n oggetti a $k-1$ a $k-1$. Se in una di esse poniamo, dopo l'ultimo suo oggetto, uno qualunque degli $n-(k-1)$ oggetti che non contiene, otteniamo una disposizione semplice a k a k. Quindi, da una disposizione semplice a $k-1$ a $k-1$ si ottengono, con questo procedimento, $n-(k-1)$ disposizioni semplici a k a k. Poiché facilmente si vede che, così facendo, si ottengono tutte le disposizioni a k a k e nessuna di esse è ripetuta, si ha che il numero delle disposizioni semplici di n oggetti a k a k è dato dal numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti a $k-1$ a $k-1$ moltiplicato per $n-(k-1)$. Cioè

$$D_{n,k} = [n-(k-1)].\; D_{n,k-1}$$

Questa relazione è valida per ogni $k = 2, 3, 4, ..., n$ e quindi, scrivendola successivamente per tali valori di k, si ha:

$$D_{n,2} = (n-1) \cdot D_{n,1}$$
$$D_{n,3} = (n-2) \cdot D_{n,2}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$D_{n,k} = (n-k+1) \cdot D_{n,k-1}$$

Moltiplicando queste uguaglianze membro a membro, sopprimendo i fattori comuni ai due membri ottenuti e tenendo presente che $D_{n,1} = n$, si ha la (1). ■

È comodo visualizzare le disposizioni con una tabella. Dati gli oggetti a_1, a_2, a_3, a_4, le disposizioni semplici a 1 a 1 sono gli oggetti stessi, cioè

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4.$$

Per avere le disposizioni semplici a 2 a 2, basta porre alla destra di ogni disposizione a 1 a 1 (cioè alla destra di ognuno degli oggetti a_1, a_2, a_3, a_4), uno alla volta, ciascuno degli oggetti che mancano.
Queste sono dunque:

$$\begin{array}{lll} a_1\,a_2, & a_1\,a_3, & a_1\,a_4, \\ a_2\,a_1, & a_2\,a_3, & a_2\,a_4, \\ a_3\,a_1, & a_3\,a_2, & a_3\,a_4, \\ a_4\,a_1, & a_4\,a_2, & a_4\,a_3. \end{array}$$

Per ottenere le disposizioni semplici a 3 a 3, si pone alla destra di ogni disposizione a 2 a 2, uno alla volta, ciascuno degli oggetti mancanti. E così di seguito.

Esempi

1) Quanti sono i numeri di 3 cifre che non contengono né lo 0 né il 5, con la condizione che ogni cifra debba figurare una volta sola?

Si tratta di calcolare il numero delle disposizioni (dato che un

numero cambia di valore cambiando l'ordine delle cifre) delle rimanenti otto cifre a 3 a 3. Cioè:

$$D_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6$$

2) In quanti modi diversi quattro persone possono occupare quattro di cinque posti numerati?

Tale numero è dato dalle disposizioni semplici di 5 oggetti a 4 a 4, cioè:

$$D_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$ ■

Permutazioni semplici - Le disposizioni semplici di n *oggetti distinti a* n *a* n *si chiamano permutazioni semplici e il loro numero si denota col simbolo* P_n.

Si ha quindi

$$P_n = D_{n,n} = n \cdot (n-1)(n-2) .... 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Il prodotto di tutti i numeri interi da 1 a n si suole denotare con $n!$ e si legge *n fattoriale*, si pone cioè

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 .... n.$$

Quindi

(2) $$P_n = n!$$

La permutazione di un elemento a_1 è a_1.
Le permutazioni di due elementi a_1 ed a_2 si ottengono scrivendo a_2 dopo a_1 e poi trasportando a_2 al primo posto; esse sono

$$a_1\,a_2, \qquad a_2\,a_1$$

Per ottenere le permutazioni di tre elementi a_1, a_2, a_3 si scrive a_3 alla destra di ciascuna permutazione di due elementi a_1, a_2, indi si porta a_3 successivamente dall'ultimo posto al primo posto:

$$\begin{array}{lll} a_1\,a_2\,a_3, & a_1\,a_3\,a_2, & a_3\,a_1\,a_2, \\ a_2\,a_1\,a_3, & a_2\,a_3\,a_1, & a_3\,a_2\,a_1. \end{array}$$

E analogamente si ottengono le permutazioni di quattro elementi a_1, a_2, a_3, a_4.

Fissiamo ora una permutazione degli n elementi distinti come *fondamentale* o *principale* e sia ad es. la

$$a_1\ a_2\ ....\ a_n$$

in cui gli indici si succedono in ordine crescente.

Considerata un'altra qualsiasi permutazione degli stessi n elementi, si dirá che due suoi elementi presentano una *inversione* quando si succedono in ordine diverso da quello della principale. Nella permutazione principale non vi sono inversioni.

Nella permutazione

$$a_3\ a_4\ a_1\ a_2\ a_5\ a_6\ a_7\ ....\ a_n$$

presentano inversione le coppie di elementi

$$a_3,\ a_1; \qquad a_3,\ a_2; \qquad a_4,\ a_1; \qquad a_4,\ a_2.$$

Il numero delle inversioni è quindi 4.

Il massimo numero di inversioni si ha nella permutazione inversa:

$$a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2}\ ....\ a_3\ a_2\ a_1$$

cioè quella in cui gli elementi si susseguono in ordine inverso rispetto a quello della principale, perché ogni elemento fa inversione con tutti quelli che lo seguono. Il numero delle inversioni che presenta la permutazione inversa è dunque

$$(n-1)+(n-2)+....+2+1.$$

Diciamo che una permutazione semplice di n oggetti è di *classe* pari o dispari a seconda che presenti un numero pari o dispari di inversioni.

Proviamo ora che *una permutazione* Q, *ottenuta da un'altra* P, *scambiando due elementi, è di classe diversa da quella di* P.

Supponiamo dapprima che gli elementi scambiati siano consecutivi, a_i e a_j,

$$P\colon a_r\ ....\ a_i\ a_j\ ....\ a_s$$

$$Q\colon a_r\ ....\ a_j\ a_i\ ....\ a_s$$

È chiaro che la coppia (a_j, a_i) presenterà inversione in Q se non la presenta in P e viceversa, mentre non si alterano le inversioni degli altri elementi. Se ne deduce che il numero delle inversioni di Q è uguale a quello delle inversioni di P aumentato o diminuito di un'unità, cioè Q e P sono di classe diversa.

Se poi gli elementi scambiati non sono consecutivi, ma separati da p elementi, si può passare da P a Q operando $2p+1$ scambi di elementi consecutivi, ciascuno dei quali altera la parità della classe.

Poiché il numero degli scambi è dispari, si conclude ancora che Q e P sono di classe diversa. ■

Da questa proposizione si deduce che le *permutazioni di classe pari sono tante quante quelle di classe dispari.*

Infatti consideriamo tutte le $n!$ permutazioni semplici di n oggetti, e in tutte scambiamo due elementi fissati ad arbitrio. Si ritrovano in tal modo tutte le permutazioni, e se si avevano p permutazioni di classe pari e q di classe dispari, ora se ne hanno p dispari e q pari, deve dunque aversi

$$p = q = \frac{n!}{2}.$$ ■

Combinazioni semplici - Dati n *oggetti distinti e detto* k *un intero positivo non maggiore di* n, *si chiamano combinazioni semplici di questi* n *oggetti a* k *a* k *tutti i gruppi che si possono formare con gli* n *oggetti dati in modo che ogni gruppo contenga* k *oggetti* (distinti), *ritenendo due gruppi non distinti se e solo se contengono gli stessi elementi.*

Il numero delle combinazioni semplici di n oggetti a k a k si denota col simbolo $C_{n,k}$ e questo numero si calcola subito osservando che se in ognuna di queste combinazioni si permutano tra loro, in tutti i modi possibili, i k elementi che vi compaiono, si ottengono tutte le disposizioni degli n oggetti a k a k.

Poiché allora ogni combinazione dà luogo in questo modo a P_k disposizioni avremo:

$$P_k \cdot C_{n,k} = D_{n,k}$$

e quindi

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k}$$

che per le (1) e (2) si scrive:

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)}{k!} \qquad (3) \qquad \blacksquare$$

Il secondo membro di quest'ultima relazione si suole denotare col simbolo $\binom{n}{k}$ che si legge *n sopra k*, e quindi

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)}{k!}$$

Facciamo vedere come si possono formare le combinazioni. Supponiamo di avere cinque elementi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Le combinazioni di questi elementi a 1 a 1 sono

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_5$$

Si ottengono le combinazioni a 2 a 2 scrivendo, a destra di ciascun elemento, ciascuno degli elementi seguenti (l'ultimo elemento a_5 non darà luogo ad alcuna combinazione).
Si ha dunque:

$$\begin{array}{llll}
a_1\,a_2, & a_1\,a_3, & a_1\,a_4, & a_1\,a_5, \\
 & a_2\,a_3, & a_2\,a_4, & a_2\,a_5, \\
 & & a_3\,a_4, & a_3\,a_5, \\
 & & & a_4\,a_5.
\end{array}$$

Le combinazioni a 3 a 3 si ottengono scrivendo, a destra di ciascuna combinazione a 2 a 2, ciascuno degli elementi seguenti l'ultimo (le combinazioni terminanti con a_5 non danno luogo ad alcuna combinazione a 3 a 3). Si ha dunque:

$$\begin{array}{lll}
a_1\,a_2\,a_3, & a_1\,a_2\,a_4, & a_1\,a_2\,a_5, \\
 & a_1\,a_3\,a_4, & a_1\,a_3\,a_5, \\
 & & a_1\,a_4\,a_5, \\
 & a_2\,a_3\,a_4, & a_2\,a_3\,a_5, \\
 & & a_2\,a_4\,a_5, \\
 & & a_3\,a_4\,a_5.
\end{array}$$

Analogamente si passa a determinare le combinazioni a 4 a 4 e quelle a 5 a 5.

ESEMPI

1) Dati in un piano cinque punti, tre dei quali non risultino mai allineati, quante rette si possono tracciare congiungendo i punti a due a due?

Tale numero è dato dalle combinazioni di cinque elementi a 2 a 2 cioè $\binom{5}{2} = 10$.

2) Quante sono le quaterne che si possono formare con i 90 numeri del lotto?

Tale numero è dato dalle combinazioni di 90 elementi a 4 a 4 cioè $\binom{90}{4} = 2.555.190$.

2. Disposizioni e combinazioni con ripetizione

In questo numero considereremo sempre oggetti in numero finito, di natura qualsiasi e studieremo quelle particolari forme di raggruppamento, senza il vincolo che in ciascun raggruppamento gli oggetti siano distinti. Togliendo questa restrizione, in ogni gruppo di k oggetti un oggetto può comparire più volte e di conseguenza non occorre più supporre che il numero k sia non maggiore del numero degli oggetti dati.

Disposizioni con ripetizione - Dati n *oggetti distinti e detto* k *un numero intero positivo, si chiamano disposizioni con ripetizione, di questi* n *oggetti a* k *a* k, *tutti i gruppi che si possono formare con gli* n *oggetti dati in modo che ogni gruppo contenga* k *oggetti distinti o coincidenti* (in tutto o in parte) *e inoltre due gruppi qualunque differiscano tra loro o per qualche elemento o per l'ordine con cui gli oggetti sono disposti.*

Il numero delle disposizioni con ripetizione di n oggetti a k a k si suole denotare col simbolo $D^{(r)}_{n,k}$ e si prova che:

$$D^{(r)}_{n,k} = n^k.$$

La formazione delle disposizioni con ripetizione si ha in modo analogo a quello fatto per le disposizioni semplici. Lasciamo questo compito al lettore.

ESEMPI

1) Con le cifre 1, 2, 5, 6, quanti numeri di tre cifre si possono formare?

Questi sono dati dal numero delle disposizioni con ripetizione di quattro elementi a 3 a 3. Cioè

$$D^{(r)}_{4,3} = 4^3$$

2) Quante colonne si debbono compilare in schedine del totocalcio per essere certi di vincere?

Il numero richiesto è dato dalle disposizioni con ripetizione dei tre elementi 1, X, 2 a 13 a 13, cioè

$$D^{(r)}_{3,13} = 3^{13}$$ ■

Combinazioni con ripetizione - Dati n *oggetti distinti e detto* k *un intero positivo, si chiamano combinazioni con ripetizione di questi* n *oggetti a* k *a* k *tutti i gruppi che si possono formare con gli* n *oggetti dati in modo che ogni gruppo contenga* k *oggetti distinti o coincidenti* (in tutto o in parte), *ritenendo due gruppi non distinti se e solo se contengono gli stessi elementi.*

Il numero delle combinazioni con ripetizione di n oggetti a k a k si denota con $C^{(r)}_{n,k}$ e si prova che:

$$C^{(r)}_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Il lettore trovi un procedimento per la formazione delle combinazioni con ripetizione.

ESEMPI

1) Quanti sono i numeri di tre cifre, ciascuna non nulla, tali che in ognuno di essi ogni cifra sia non maggiore della seguente?

Il numero richiesto è dato dalle combinazioni con ripetizione di nove elementi a tre a tre perché esiste un solo modo di ordinare tre di queste cifre, distinte o no, con il requisito richiesto. Si ha quindi

$$C^{(r)}_{9,3} = \binom{9+3-1}{3} = 165$$

2) Quanti sono i numeri di tre cifre tali che in ognuno di essi ogni cifra sia non minore della seguente?

Tale numero è dato dalle combinazioni con ripetizione di dieci elementi a tre a tre, diminuito di 1 perché non si può conteggiare il raggruppamento 000 che non ha significato. Il numero richiesto è quindi

$$C^{(r)}_{10,3} - 1 = \binom{10+3-1}{3} - 1.$$

3. Binomio di Newton

Un'applicazione di notevole importanza è costituita dallo sviluppo della potenza n-esima di un binomio.

Sviluppiamo il prodotto

$$(x + a_1)(x + a_2) \ .... \ (x + a_n);$$

ordinando secondo le potenze decrescenti di x si ha

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + ... + c_{n-1} x + a_1 \cdot a_2 \ .... \ a_n$$

dove: c_1 indica la somma $a_1 + a_2 + ... + a_n$; c_2 indica la somma dei prodotti degli stessi n numeri combinati a 2 a 2; c_3 indica la somma dei prodotti degli stessi numeri combinati a 3 a 3 e così di seguito.

Per $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = a$ si ha allora

$$c_1 = \binom{n}{1} a, \qquad c_2 = \binom{n}{2} a^2, \qquad ...., \qquad c_{n-1} = \binom{n}{n-1} a^{n-1}$$

e di conseguenza

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} a x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + ... + \binom{n}{n-1} a^{n-1} x + a^n$$

che rappresenta lo sviluppo del *binomio di Newton*.

4. Coefficienti binomiali

Ai numeri $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \binom{n}{4}, ...$, che si presentano come coefficienti nello sviluppo del binomio di Newton, viene dato il nome di coefficienti binomiali.

Mettiamo in evidenza qualche prorietà di questi coefficienti.

a) Per $0 < k < n$ è

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{4}$$

Infatti dalla

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1)(n-2) .... (n-k+1)}{k!}$$

si deduce l'asserto, moltiplicando numeratore e denominatore della frazione per $(n-k)!$. ■

b) Per $0 < k < n$ è

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{5}$$

Infatti dalla (4), cambiando k in $(n-k)$, si ha:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

che insieme alla (4) dà l'asserto. ■

La (5) ci dice che nello sviluppo del binomio di Newton, *i termini equidistanti dagli estremi hanno coefficienti uguali.*

c) Con le proprietà espresse dalle (4) e (5) possiamo attribuire un significato ai simboli che fino ad ora non ne avevano alcuno.

Abbiamo definito il simbolo $\binom{n}{k}$ per $0 < k \leq n$ ma, ricorrendo al principio di permanenza delle leggi formali, possiamo attribuire al simbolo $\binom{n}{k}$ un significato anche per $k = 0$.

Si osservi che la (5) per $n = k$ si scrive:

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0}$$

e poiché il primo membro è uguale ad 1, se vogliamo conservare la validità della (5) anche per $n = k$, al simbolo $\binom{n}{0}$ dobbiamo attribuire il valore 1.

Porremo quindi *per definizione*:

$$\binom{n}{0} = 1$$

Se poi all'uguaglianza

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

espressa dalla (4), vogliamo attribuire un significato anche per $n = k$, dobbiamo porre *per definizione*:

$$0! = 1$$

Dato dunque l'intero $n > 0$, possiamo considerare $n + 1$ coefficienti binomiali

$$\binom{n}{0}, \quad \binom{n}{1}, \quad \binom{n}{2}, \quad \ldots \quad \binom{n}{n}.$$

Dando ad n successivamente i valori 0, 1, 2, 3, ..., scriviamo su righe successive tutti i corrispondenti coefficienti binomiali e otteniamo in tal modo il cosidetto *triangolo di Tartaglia*.

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

in cui gli elementi della i-esima riga sono i coefficienti dello sviluppo della potenza $(i - 1)$-esima del binomio di Newton.

d) Per $1 \leq k \leq n - 1$ è

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{6}$$

Infatti per la (4)

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}. \quad \blacksquare$$

La (6) esprime la proprietà che in ogni riga del triangolo d Tartaglia, ogni elemento (esclusi il primo e l'ultimo) si ottiene somman do due elementi della riga precedente, precisamente quello che occup la stessa posizione e quello che lo precede.

e) Se nello sviluppo del binomio di Newton si pone $x = a = 1$ s ottiene:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

cioè *la somma dei coefficienti binomiali nello sviluppo di* $(x + a)^n$ *è ugual a* 2^n; se invece si pone $x = 1$ ed $a = -1$ si ottiene:

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

cioè la somma dei coefficienti binomiali di posto dispari è uguale all somma dei coefficienti binomiali di posto pari.

ESERCIZI SVOLTI

1 Quanti numeri di quattro cifre distinte si possono formare?

Le disposizioni semplici delle dieci cifre 0, 1, 2, ..., 9 a 4 a 4 contengono, oltre ai numeri richiesti, anche i raggruppamenti di quattro cifre la cui prima cifra è zero.
E poiché il numero di questi raggruppamenti è dato dalle disposizioni semplici di nove elementi a 3 a 3, il numero richiesto è:

$$D_{10,4} - D_{9,3} = 4536$$

2 Sapendo che le disposizioni semplici a 2 a 2 di un certo numero di elementi è 56, determinare il numero degli elementi.

Detto x tale numero si ha $D_{x,2} = x(x-1) = 56$ cioè $x^2 - x - 56 = 0$.
Trascurando la radice negativa risulta $x = 8$.

3 Formati e disposti in ordine crescente i numeri interi di quattro cifre, ottenuti permutando le cifre 1, 2, 3, 4, quale posto occupa il numero 3214?

Questo numero è preceduto da quelli che cominciano con 1, che sono 3! e da quelli che cominciano con 2, che sono 3!. È preceduto poi da quelli che cominciano con 31 che sono in numero di 2!. Il numero 3214 è quindi preceduto da $3! + 3! + 2! = 14$ numeri ed occupa di conseguenza il quindicesimo posto.

4 In quanti modi diversi tre persone possono occupare tre posti numerati?

Tale numero è ovviamente $3! = 6$.

5 Dimostrare la seguente relazione:

$$2\,P_n - (n-1)\,P_{n-1} = P_n + P_{n-1}$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned} 2\,P_n - (n-1)\,P_{n-1} &= n!\,2 - (n-1)!\,(n-1) = \\ &= (n-1)!\,2n - (n-1)!\,(n-1) = (n-1)!\,[2n - (n-1)] = \\ &= (n-1)!\,(n+1) = (n-1)!\,n + (n-1)! = n! + (n-1)! = \\ &= P_n + P_{n-1} \end{aligned}$$

6 Quante sono le diagonali di un poligono semplice di n lati?

I vertici sono n e le rette che li congiungono a 2 a 2 sono $\binom{n}{2}$. Ma tra queste rette ce ne sono n che contengono i lati, quindi le diagonali sono

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

7 Quanti sono i numeri di quattro cifre, divisibili per 5, inferiori a 5000 e non contenenti cifre diverse da 2, 3, 4, 5?

I numeri richiesti hanno 5 come ultima cifra, cioè sono del tipo $abc5$, essendo abc una disposizione con ripetizione delle cifre 2, 3, 4, 5, ed $a \neq 5$. Il loro numero è dunque:

$$D^{(r)}_{4,3} - D^{(r)}_{4,2} = 4^3 - 4^2 = 48$$

8 Sopra un foglio sono state scritte 18 lettere e poi di queste se ne sono cancellate x. Determinare x sapendo che la differenza tra il numero delle combinazioni con ripetizione a 3 a 3 delle lettere rimaste e quello delle combinazioni semplici a 3 a 3 pure delle lettere rimaste, è uguale al numero delle disposizioni con ripetizione a 2 a 2 delle x lettere cancellate.

Essendo

$$C^{(r)}_{18-x,3} = \binom{18-x+3-1}{3}, \qquad C_{18-x,3} = \binom{18-x}{3}, \qquad D^{(r)}_{x,2} = x^2,$$

si ha

$$\frac{(20-x)(19-x)(18-x)}{6} - \frac{(18-x)(17-x)(16-x)}{6} = x^2$$

e da questa semplificando

$$(18-x)^2 = x^2 \quad \text{cioè} \quad x = 9$$

9 Dimostrare che se n è primo, ciascun coefficiente della potenza n-esima di un binomio, eccettuati i termini estremi, è divisibile per n.

Infatti un coefficiente generico dello sviluppo è

$$N = \binom{n}{r}$$

da cui

$$r!\,N = n(n-1)\ldots.(n-r+1)$$

Poiché il secondo membro è divisibile per n, lo sarà anche il primo membro e quindi, essendo n primo e superiore ad r, sarà N divisibile per n.

10 Sviluppare la potenza

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^5$$

Si ha, applicando lo sviluppo del binomio di Newton,

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^5 = (\sqrt{x})^5 + \binom{5}{1}(\sqrt{x})^4\left(-\frac{1}{x}\right) + \binom{5}{2}(\sqrt{x})^3\left(-\frac{1}{x}\right)^2 +$$

$$+\binom{5}{3}(\sqrt{x})^2\left(-\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{5}{4}\sqrt{x}\left(-\frac{1}{x}\right)^4 + \left(-\frac{1}{x}\right)^5 = \sqrt{x^5} - 5x +$$

$$+ 10\,\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{10}{x^2} + 5\,\frac{\sqrt{x}}{x^4} - \frac{1}{x^5}.$$

ESERCIZI PROPOSTI

1 Quante parole di tre lettere (anche senza significato) si possono formare con le 21 lettere dell'alfabeto?

2 Verificare le seguenti uguaglianze:

$$D_{m,k} = m\,D_{m-1,k-1}$$

$$D_{m,k} + (k-1)\,D_{m,k-1} = m\,D_{m,k-1}$$

3 Scrivere tutte le permutazioni di tre elementi e constatare che fra di esse ve ne sono 1, 2, 2, 1 che contengono rispettivamente 0, 1, 2, 3 inversioni rispetto ad una fissata.

4 Dimostrare la seguente relazione:

$$P_n^2 : P_{n-1} = P_{n+1} - P_n.$$

5 Quante bandiere tricolori distinte si possono formare con il bianco, giallo, rosso, verde?

6 Tre persone hanno 4 giacche, 6 pantaloni, 7 paia di scarpe e 5 camicie. In quanti modi si possono vestire?

7 Quanti triangoli si possono formare con cinque punti di un piano, dei quali mai tre sono allineati?

8 In un piano sono date m rette parallele ed altre n rette parallele intersecanti le precedenti. Quanti parallelogrammi si vengono a formare?

9 Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Quanto vale n?

10 Quanti sono i numeri di 6 cifre tutte diverse, che non contengono né lo 0, né il 3, né il 5, né il 7?

11 Quanti sono i numeri di quattro cifre non necessariamente distinte?

12 Quanti sono i numeri di 4 cifre, ciascuna non nulla, tali che in ognuno di essi ogni cifra sia non maggiore della seguente e le ultime due siano uguali?

13 Sviluppare le seguenti potenze:

$$(x-\sqrt{y})^3, \quad (\sqrt{6}-\sqrt{2})^4, \quad \left(\frac{1}{x}+x^2\right)^5, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{y}\right)^4$$

14 Trovare il coefficiente di x^6 e di x^9 nello sviluppo di

$$(2-3x^3)^4$$

15 Risolvere le equazioni:

$$\binom{x}{5}=\binom{x}{3}, \quad 5\binom{x}{3}=\binom{x+2}{3}, \quad 4\binom{x}{4}=15\binom{x-2}{3}$$

Determinanti

1. Matrici e determinanti

Una tabella costituita da $m \cdot n$ numeri (detti elementi) disposti linee orizzontali (dette *righe*) e su n linee verticali (dette *colonn* modo che ogni elemento si trovi all'incrocio di una riga con colonna, dicesi *matrice*.

Per comodità di scrittura tutti gli elementi di una matrice si indi con una stessa lettera munita di due indici, quale ad es. a_{rs}, il prim quali indica la riga e il secondo la colonna a cui l'elemento appar

Per indicare una matrice si usa allora un simbolo del tipo

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \; \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \; \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \; \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

o più brevemente

$$\|a_{rs}\|, \qquad r=1, \dots, m; \qquad s=1, \dots, n$$

Se è $m \neq n$ la matrice si dice *rettangolare*; se è $m=n$ la mat chiama *quadrata* o *di ordine n*. Se la matrice è quadrata si distingu essa due diagonali: la *diagonale principale*, che è quella c dall'elemento a_{11} all'elemento a_{nn}, e la *diagonale secondaria* che a_{n1} ad a_{1n}. Sulla prima di queste diagonali si trovano gli element $a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$, mentre sulla seconda si trovano $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots$