

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA – A. A. 2000-2001

TITOLO DELLA TESI:

Questioni riguardo all'esistenza
di soluzioni periodiche
delle equazioni differenziali
di tipo Liénard.

Relatore:
prof. Gabriele Villari

Candidata:
Lilia Rosati

Correlatore:
prof. Rosa Maria Bianchini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA – A. A. 2000-2001

TITOLO DELLA TESINA:

Il teorema dei quattro vertici
(teoria delle curve piane)

Relatore:
prof. Graziano Gentili

Candidata:
Lilia Rosati

Indice

1	Introduzione	9
1.1	Presentazione	9
1.2	Le applicazioni e le equazioni del 2° ordine	10
1.3	Organizzazione del lavoro	14
1.4	Ringraziamenti	15
2	Nozioni preliminari	17
2.1	Sistemi equivalenti	17
2.2	Il piano delle fasi e il piano di Liénard	18
2.3	Sistemi quasi lineari	21
2.3.1	Definizioni	21
2.3.2	Classificazione dei punti singolari	22
3	Caso autonomo	29
3.1	Il ritratto di fase	29
3.2	Il metodo del confronto	35
3.3	L'equazione di Duffing	35
3.4	Due criteri di esistenza	39
3.5	Intersezione con l'isoclina	49
3.6	Le proprietà (H) e (K)	55
4	Caso forzato	59
4.1	Sistemi autonomi associati	59
4.2	Il metodo della trappola	61
4.3	Due criteri di esistenza	63
5	Un'equazione polinomiale forzata	69
5.1	Un particolare sistema autonomo associato	69
5.1.1	Generalità	69
5.1.2	Il ritratto di fase	70
5.1.3	Movimento dei cicli limite al variare di un parametro	72
5.1.4	Il caso $p(x) = x^3 + ax^2 - b$	78

5.1.5	Biforcazione di un ciclo limite da una separatrice	83
5.2	L'equazione autonoma associata	87
5.3	Un nuovo criterio di esistenza	91
5.3.1	L'enunciato	96
5.4	Passaggio a equazioni forzate di tipo più generale	102
Bibliografia		109

Elenco delle figure

2.1	<i>Classificazione dei punti critici</i>	25
3.1	<i>prime nozioni sull'andamento di campo nel piano delle fasi</i>	30
3.2	<i>andamento di campo nel piano di Liénard</i>	31
3.3	<i>esempi di traiettorie nel piano delle fasi</i>	31
3.4	<i>una diversa ipotesi di segno su $g(x)$</i>	32
3.5	<i>grafico dell'isoclina dell'equazione di Van der Pol</i>	33
3.6	<i>andamento di campo per l'equazione di Van der Pol</i>	34
3.7	<i>lemma di confronto</i>	36
3.8	<i>un centro globale per l'equazione di Duffing</i>	38
3.9	<i>un centro locale per l'equazione di Duffing</i>	38
3.10	<i>costruzione di una traiettoria limitata con il teorema 1</i>	41
3.11	<i>costruzione di una traiettoria limitata per l'equazione di Van der Pol</i>	43
3.12	<i>costruzione di una traiettoria limitata con il teorema 2</i>	47
3.13	<i>la proprietà H</i>	56
4.1	<i>costruzione della zona invariante per il teorema di Brouwer</i>	62
4.2	<i>estensione all'equazione forzata del caso con proprietà K</i>	67
5.1	<i>andamento di campo del sistema simmetrico</i>	71
5.2	<i>esempio di sistema simmetrico ($p(x) = ax$)</i>	72
5.3	<i>possibilità di comparsa di cicli limite dopo lo sdoppiamento della separatrice</i>	73
5.4	<i>movimento dei cicli limite stabili e instabili</i>	75
5.5	<i>biforcazione del ciclo limite semistabile dall'esterno (a) e dall'interno (b)</i>	77
5.6	<i>la separatrice del sistema \tilde{S}</i>	79
5.7	<i>le separatrici della famiglia S_a</i>	80
5.8	<i>esistenza e unicità di a^*: un valore di a per cui $h(a) > 0$</i>	82
5.9	<i>una traiettoria limitata per un sistema di S_a</i>	84
5.10	<i>il diagramma di biforcazione dalla separatrice</i>	85

5.11	<i>il movimento dei cicli limite al diminuire del parametro</i>	86
5.12	<i>le limitazioni a priori</i>	95
5.13	<i>l'enunciato con k pari: costruzione della zona invariante</i>	98
5.14	<i>esempio: un sistema con un solo ramo di separatrice</i>	101
5.15	<i>esempio: un sistema con separatrice percorsa in tempo finito</i>	102
5.16	<i>teorema di Poincaré-Bohl: costruzione di Ω</i>	105
5.17	<i>teorema di Krasnosel'skiĭ</i>	107

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Presentazione

Lo scopo di questa tesi è quello di discutere questioni riguardo all'esistenza di soluzioni periodiche di due tipologie di equazioni differenziali ordinarie, strettamente legate tra loro. Precisamente prenderemo in considerazione l'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, non lineare, autonoma

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (1.1)$$

con $f : t \rightarrow f(t)$ e $g : t \rightarrow g(t)$ funzioni reali (questa equazione è comunemente nota come equazione di Liénard) e l'equazione affine che si ottiene da questa aggiungendo un termine forzante periodico

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t) = e(t + T), \quad (1.2)$$

con f e g come sopra ed $e : t \rightarrow e(t)$ funzione reale e periodica di periodo T , a cui si fa riferimento come equazione di Liénard forzata. In particolare ci soffermeremo sull'equazione forzata polinomiale

$$\ddot{x} + p_{2k+1}(x)\dot{x} + \gamma x = e(t), \quad (1.3)$$

con l'intero $k \geq 0$ e $\gamma > 0$, dove f e g sono due polinomi di grado dispari, di cui il primo qualsiasi.

I primi studi del caso autonomo presero avvio nel 1922 per opera di B. Van der Pol che analizzò l'equazione 1.1 nel caso particolare in cui

$$f(x) = \mu(x^2 - 1) \quad \text{e} \quad g(x) = x,$$

con μ costante positiva, mentre il caso generale, con f e g continue e $xg(x) > 0$, fu affrontato a partire dal 1928 da A. Liénard. I risultati ottenuti da questi due matematici sono riportati in ogni testo sulle equazioni differenziali ordinarie e costituiscono una pietra miliare nello studio della meccanica delle oscillazioni non lineari.

1.2 Le applicazioni e le equazioni del 2° ordine

Senza avere la pretesa di fare una vera e propria storia, riporteremo alcuni risultati e qualche esempio derivante dal campo delle applicazioni per collocare in un contesto più ampio l'interesse per le equazioni differenziali del secondo ordine, e in particolare per quelle da noi considerate.

Nel corso dello studio di alcuni problemi di fisica, tanto di meccanica che di elettromagnetismo, scaturiscono equazioni differenziali del secondo ordine. In meccanica, per esempio, una equazione del secondo ordine descrive il moto in una dimensione e compare applicando il secondo principio della dinamica $F = ma$. Una schematizzazione molto generale può essere del tipo

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t),$$

ovvero

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0,$$

o anche dei tipi 1.2 e 1.1. In 1.1, ad esempio, a meno del segno abbiamo che $g(x)$ è la risultante delle forze conservative agenti sul sistema, e che $f(x)\dot{x}$ è la risultante delle forze dissipative. Nell'equazione 1.2, $f(x)\dot{x}$ ha ancora questo significato, e $g(x)$ è la risultante delle forze conservative indipendenti dal tempo, mentre $e(t)$ è una forza esterna, funzione periodica del tempo.

Sotto opportune ipotesi, molti problemi possono essere schematizzati mediante equazioni differenziali lineari; esempi classici sono il moto dell'estremo libero di una molla che obbedisce alla legge di Hooke, a cui sia attaccato un blocchetto di massa nota, o il moto del pendolo per piccole oscillazioni. Nel caso della molla si giunge all'equazione

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{1.4}$$

dove m è la massa del blocchetto, mentre k è la costante elastica della molla. Ad una equazione di questo tipo si giunge anche nel caso delle piccole oscillazioni del pendolo. Dall'equazione 1.4 si ottiene la legge che regola le oscillazioni armoniche

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t,$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$. Possiamo a questo punto cogliere un aspetto dell'equazione lineare 1.4, che ci interessa evidenziare perché ci sarà utile per un futuro raffronto, e cioè che le sue soluzioni sono tutte periodiche.

Nell'ambito dell'elettromagnetismo consideriamo il caso preso in esame da Van der Pol, che troviamo in Cesari [5], ovvero un circuito elettrico

con un triodo e con una corrente induttiva. L'applicazione della seconda legge di Kirchhoff che regola il flusso di corrente in un circuito, condusse Van der Pol all'equazione

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (1.5)$$

ove x rappresenta, appunto, il flusso di corrente e μ è una costante positiva. Sperimentalmente egli aveva osservato che il flusso di corrente era periodico. Questo risultato può essere spiegato solo in termini della non linearità dell'equazione. Se consideriamo la forma linearizzata dell'equazione 1.5, che si ottiene tralasciando il termine $\mu x^2 \dot{x}$, otteniamo l'equazione lineare

$$\ddot{x} - \mu \dot{x} + x = 0,$$

che non ha soluzioni periodiche, a causa di un effetto di amplificazione della corrente dovuto al termine $-\mu \dot{x}$, anzi tutte le soluzioni crescono nel tempo. Al contrario nell'equazione 1.5, il termine dovuto alla resistenza, $-\mu(1 - x^2)\dot{x}$, amplifica la corrente solo per valori di essa inferiori a 1, mentre per $x > 1$ cambia segno, diventando positivo, e smorza la corrente. Questa azione alternata della resistenza spiega perché l'equazione di Van der Pol può avere una soluzione periodica ed è a questo fenomeno che ci si riferisce con il termine di oscillazioni non lineari. Raffrontando questo esempio con il precedente, giungiamo a cogliere la diversità che intercorre tra una soluzione periodica di una equazione lineare e quella di un'equazione non lineare; in quest'ultimo caso la soluzione periodica ha carattere di "eccezionalità", ovvero si ottiene come soluzione limite che divide insiemi di soluzioni dal comportamento contrastante. Man mano che avviciniamo i parametri di una soluzione a quelli di una soluzione periodica, avanti (o indietro) nel tempo, la prima tende ad assumere il comportamento della seconda. Questa caratteristica ci porterà a definire nel piano delle fasi il concetto di ciclo limite. Nella pratica, ciò corrisponde a una situazione di regime. Emerge a questo punto anche un altro aspetto, di fondamentale importanza per le applicazioni, e cioè la stabilità delle soluzioni periodiche. Le soluzioni periodiche vanno differenziate secondo che le soluzioni "vicine" tendano ad assumerne il comportamento avanti o, piuttosto, indietro nel tempo (avvicinamento/allontanamento). Nelle applicazioni ciò corrisponde a situazioni di equilibrio stabili ovvero instabili. Un criterio sufficiente che stabilisce contemporaneamente l'esistenza e la stabilità di soluzioni periodiche è fornito dal teorema di Poincaré-Bendixon ed è alla base di molti risultati per il caso autonomo.

Come abbiamo già detto, Liénard (a cui dobbiamo l'introduzione dell'omonimo piano) inquadrò l'equazione 1.5 in un ambito più generale, cioè considerò l'equazione 1.1, che schematizza molti problemi derivanti dalla fisica, compresi il moto dell'estremo libero della molla e il moto del pendolo quando vengano meno alcune (o a maggior ragione tutte le) ipotesi semplificative.

Una particolare equazione di Liénard che svolge un ruolo importante, in quanto confronteremo con essa, in un senso che verrà precisato, la generica equazione, è l'equazione di Duffing

$$\ddot{x} + g(x) = 0.$$

Tale equazione, in dinamica, corrisponde al modello conservativo; supponiamo, dunque, di averla ottenuta applicando il secondo principio della dinamica ad un sistema costituito da una particella su cui agiscono esclusivamente forze conservative. Facendo, come per tutto il seguito, l'ipotesi di continuità della g possiamo considerare la funzione integrale

$$G(x) = \int_0^x g(s) ds,$$

che rappresenta l'energia potenziale della particella. Nell'equazione di Duffing moltiplichiamo ambo i membri per $\dot{x}dt$ e integriamo, ottenendo

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + G(x) = \text{cost.} \quad (1.6)$$

Secondo l'interpretazione dinamica del moto, il primo termine rappresenta l'energia cinetica della particella e la 1.6 esprime il principio di conservazione dell'energia applicato alla particella stessa. Scrivendo l'equazione di Duffing come sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases}$$

la 1.6 può essere riscritta come

$$\frac{1}{2}y^2 + G(x) = \text{cost.}$$

la quale, al variare della costante che esprime il livello di energia corrispondente, dà tutte le possibili orbite del sistema.

Analizziamo ora il modello non conservativo, qual'è quello del caso strettamente generale dell'equazione 1.1; supponiamo, dunque, che sul sistema considerato poco sopra agiscano anche forze dissipative, di risultante $-f(x)\dot{x}$. Supposto, come per tutto il seguito, f continua, insieme a $G(x)$ possiamo considerare l'integrale

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds$$

e associare all'equazione 1.1 il sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x). \end{cases}$$

Da quest'ultimo risulta $y = \dot{x} + F(x)$. Posto

$$u(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x), \quad (1.7)$$

in analogia a quanto fatto nell'esempio precedente, interpretiamo $\frac{1}{2}y^2$ come l'energia cinetica e $G(x)$ come l'energia potenziale; in tal modo 1.7 rappresenta l'energia totale della particella. Se ora moltiplichiamo l'equazione di Liénard per y , otteniamo

$$du = Fdy.$$

L'integrale $\int Fdy$ calcolato lungo una traiettoria del sistema costituisce l'energia dissipata dalla particella lungo lo spostamento x .

Per un'estesa bibliografia riguardante l'equazione di Liénard fino agli anni '60 rimandiamo a [9], [24] e [14] e ai testi ivi citati, mentre segnaliamo [7] per un'aggiornamento dei risultati fino al 1976. Diversamente dal caso autonomo per il quale sono stati utilizzati metodi geometrici, il caso forzato è stato ampiamente investigato e ha trovato soluzione grazie a metodi topologici negli spazi di funzioni. I primi studi in questo campo risalgono ai primi anni '70 e si devono all'opera di Mawhin, di cui citiamo particolarmente il lavoro [18], e hanno trovato prosecuzione con Reissig [23], Bebernes e Martelli [2], Cesari e Kannan [6] ed altri. Per un'estesa bibliografia rimandiamo a [12].

In questa sede seguiremo metodi geometrici, presentando una rassegna dei maggiori risultati riguardanti il caso autonomo e riportando alcuni risultati per il caso forzato. Tra questi ultimi, sono compresi il metodo geometrico classico, che fornisce un'alternativa interessante ai metodi topologici, e un metodo nuovo, applicato al caso particolare dell'equazione polinomiale 1.3, con cui otterremo un risultato che presenta alcuni aspetti degni di nota, quali la possibilità di dare una spiegazione geometrica ad una curiosità analitica e, soprattutto, di essere esteso ad equazioni forzate di tipo più generale della 1.2, che non entrano nel campo di applicabilità dei metodi topologici.

Lo studio del caso autonomo precede, non soltanto cronologicamente, ma anche logicamente, quello del caso forzato; infatti i risultati riguardanti il primo saranno utili per il secondo, come risulta chiaro con alcune semplici osservazioni. In primo luogo si vede che nell'equazione

1.2 il tempo t appare esplicitamente solo nel termine forzante $e(t)$, inoltre, mettendoci in condizioni di regolarità e, in particolare, supponendo $e(t)$ continua, esistono due costanti, e ed E , tali che $e < e(t) < E$ per $t \in [0, T]$. Allora sarà particolarmente interessante considerare le due equazioni di Liénard autonome

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e$$

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = E,$$

dalle quali, grazie all'introduzione di uno strumento semplicissimo, quale un criterio di confronto, dedurremo il comportamento delle soluzioni di 1.2.

1.3 Organizzazione del lavoro

Il lavoro è organizzato in questo modo. Nel secondo capitolo forniremo alcune nozioni preliminari, tra cui quelle necessarie per trasferire lo studio dell'equazione autonoma nel piano delle fasi o nell'equivalente piano di Liénard, associando ad essa un sistema equivalente, ed enunceremo il teorema di Poincaré-Bendixon. Il capitolo terzo è dedicato al caso autonomo: lavorando nel piano delle fasi otterremo due condizioni sufficienti ad assicurare l'esistenza di almeno una soluzione periodica stabile. In seguito, lavorando nel piano di Liénard, verranno fornite condizioni necessarie e sufficienti per l'intersezione delle traiettorie del sistema equivalente con una particolare curva di questo piano. Combinando le varie situazioni che si possono ottenere, talvolta negando, talvolta assicurando tali condizioni, sia avanti che indietro nel tempo, possiamo produrre equazioni dotate di almeno una soluzione periodica stabile. Vale la pena di osservare che in questo modo si possono ottenere quasi tutti i risultati conosciuti in letteratura. Nel capitolo quarto presenteremo il metodo geometrico classico, basato sul teorema di Brouwer, per l'esistenza di soluzioni periodiche dell'equazione di Liénard forzata. Il capitolo quinto è suddiviso in tre paragrafi. Nel primo verrà presa in considerazione l'equazione polinomiale 1.3 con $\gamma = 1$ e verrà studiato il movimento dei cicli limite nel piano delle fasi al variare di un parametro. Nel secondo verrà fornito un metodo con cui si ottiene l'esistenza di soluzioni periodiche per l'equazione 1.3. Nel terzo paragrafo infine, alla luce del metodo appena illustrato, passibile di estensione all'equazione forzata, $\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = e(t)$, di tipo più generale della Liénard, vengono riportati altri due teoremi che potrebbero servire allo stesso scopo.

1.4 Ringraziamenti

A conclusione del lavoro intrapreso, desidero ringraziare, per la sua preziosa e paziente collaborazione, il dottor Gianni Ciolli che ha curato la parte grafica con intelligenza e abilità; inoltre desidero ringraziare il professor Fabio Zanolin per le utili discussioni, improntate alla chiarezza, che hanno contribuito in modo specifico alla stesura dell'ultima parte della tesi e il professor Luigi Antonio Rosati per i suoi preziosi consigli; non ultimo, desidero rivolgere un pensiero di gratitudine al professor Gabriele Villari, relatore della tesi, per avermi proposto un argomento così vicino al centro dei propri interessi scientifici del momento.

Capitolo 2

Nozioni preliminari

2.1 Sistemi equivalenti

L'equazione 1.1 non rappresenta il caso generale delle equazioni differenziali autonome del secondo ordine, che è dato da

$$h(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0.$$

Grazie al fatto che si può rendere esplicita rispetto a \ddot{x} , l'equazione di Liénard è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x), \end{cases} \quad (2.1)$$

ovvero al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \quad (2.2)$$

con

$$F(x) = \int_0^x f(u) du.$$

Ovviamente i due sistemi sono equivalenti fra loro e la trasformazione non lineare

$$(x, y) \rightarrow (x, y + F(x)),$$

che lascia invariata la coordinata x , trasforma una soluzione di 2.1 in una soluzione di 2.2.

I sistemi 2.1 e 2.2 sono casi particolari del sistema autonomo

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) \\ \dot{y} = G(x, y) \end{cases}, \quad (2.3)$$

in cui il fatto che le variabili x e y non dipendono esplicitamente dal tempo t presenta il vantaggio che, delle soluzioni

$$(x, y) : t \rightarrow (x(t), y(t)),$$

possiamo dare una rappresentazione nel piano \mathbb{R}^2 , che chiameremo *piano delle fasi*, anziché nello spazio \mathbb{R}^3 in cui sono collocati i relativi grafici.

2.2 Il piano delle fasi e il piano di Liénard

Se $(x, y) : t \rightarrow (x(t), y(t))$ è una soluzione di 2.3, lo è anche $(x_\tau, y_\tau) = (x(t + \tau), y(t + \tau))$ per ogni $\tau \in \mathbb{R}$. Geometricamente questo significa che, se al grafico di una soluzione del sistema 2.3 si dà una traslazione arbitraria τ lungo l'asse t , si ottiene ancora il grafico di una soluzione di 2.3.

L'insieme che si ottiene proiettando su \mathbb{R}^2 , nella direzione dell'asse t , il grafico di una soluzione (x, y) di 2.3 è lo stesso per tutte le soluzioni (x_τ, y_τ) che si ottengono per traslazione dal grafico di (x, y) . Tale insieme è per definizione un'*orbita* di 2.3 e ciascuna delle (x_τ, y_τ) è una rappresentazione parametrica dell'orbita stessa.

Si chiama *piano delle fasi* il piano xy con $t = 0$ nel quale si proiettano le curve integrali, soluzioni di 2.3. Quando ad una equazione si possono associare più sistemi equivalenti e quindi più piani nei quali studiare la proiezione delle soluzioni, tendiamo a contraddistinguere tali piani con nomi diversi. Per questo motivo nel caso del sistema 2.2 individueremo il piano delle fasi con il termine *piano di Liénard*.

Il piano delle fasi e il piano di Liénard non sono gli unici piani nei quali si può studiare l'equazione di Liénard; creando nuovi sistemi equivalenti si possono individuare altri piani che, in determinate condizioni (ad es. quando g è una funzione dispari), presentano alcuni vantaggi.

Proseguiremo il nostro studio nel piano delle fasi o nel piano di Liénard e, poiché ad ogni orbita corrisponde un insieme di soluzioni, in sostanza veniamo a operare un raggruppamento di queste ultime in base ai valori che esse assumono. Nel raggruppamento si viene a perdere la nozione del tempo: praticamente focalizzeremo la nostra attenzione sul fatto che un'orbita passa o no per un punto del piano delle fasi, piuttosto che sull'istante in cui ciò accade.

Talvolta ci riferiremo a un'orbita con il termine *traiettoria* anche se ciò costituisce una piccola inesattezza. Infatti una traiettoria è il grafico di una soluzione, quindi solo la proiezione di una (o più) traiettorie è propriamente un'orbita.

Lo studio delle orbite nel piano delle fasi diventa tanto più significativo quando per ogni punto passa (una e) una sola orbita e ciò avviene se sono verificate condizioni per (l'esistenza e) l'unicità delle soluzioni ai problemi di Cauchy associati al sistema 2.3. In questo caso due orbite non si intersecano e se un'orbita interseca se stessa è immagine di una soluzione periodica.

Ricordiamo che una soluzione si dice *periodica* di periodo $s > 0$, se per ogni $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = x(t + s)$ e $y(t) = y(t + s)$ e si dice *limitata* se esiste un numero reale $k > 0$ tale che $x^2(t) + y^2(t) \leq k$.

Il senso del tempo non si viene a perdere completamente, infatti l'ordinamento naturale in \mathbb{R} determina su ogni orbita un verso di percorrenza positivo e uno negativo. Precisamente se (x, y) è una rappresentazione parametrica e $t' \leq t''$ diremo che $(x(t'), y(t'))$ *precede* sull'orbita $(x(t''), y(t''))$.

Data un'orbita γ definiamo *semiorbita negativa* per un punto $\chi = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, e la indicheremo con $\gamma^-(\chi)$, l'insieme dei punti $\chi' \in \gamma(\chi)$ che precedono χ . In modo analogo definiamo $\gamma^+(\chi)$. Se il punto χ sta sull'asse y , cioè $\chi = (0, y_0)$, useremo anche le notazioni $\Gamma^-(y_0)$ e $\Gamma^+(y_0)$ rispettivamente per la semiorbita negativa e quella positiva.

Diremo che $\gamma(\chi)$ è un'orbita *aperta* quando è immagine di una soluzione che per valori distinti di t , diciamo t' , t'' con $t' \neq t''$, assume valori distinti

$$(x(t'), y(t')) \neq (x(t''), y(t'')),$$

ovvero quando non passa due volte per lo stesso punto.

Se invece un'orbita è immagine di una soluzione periodica, detto T_0 l'estremo inferiore dei T tali che

$$(x(t + T), y(t + T)) = (x(t), y(t)),$$

ci sono due possibilità:

(i) $T_0 = 0$ e quindi la soluzione è costante e l'orbita $\gamma(\chi)$ si riduce al punto χ e si dice *orbita singolare*, o *punto singolare*. I punti singolari sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$$

(ii) $T_0 > 0$ e $\gamma(\chi)$ si dice un *ciclo*.

Riguardo ai problemi di Cauchy associati al sistema 2.3, si ha che per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il sistema 2.3 ammette una e una sola soluzione soddisfacente la condizione iniziale

$$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$$

se e solo se F e G sono funzioni continue e localmente lipschitziane. Nel sistema 2.2, e di conseguenza anche nel sistema 2.1 ad esso equivalente, le ipotesi da fare sono più semplicemente f continua e g localmente

lipschitziana. Infatti la f appare solo sotto forma di integrale

$$F(x) = \int_0^x f(u) du$$

ed è noto che la funzione integrale, quando esiste, è lipschitziana. La continuità della f garantisce appunto l'esistenza di tale funzione integrale. In conclusione, per tutto lo studio dell'equazione di Liénard supporremo f continua e g localmente lipschitziana.

Un'altra ipotesi che dovremo sempre fare per $x \neq 0$ è

$$xg(x) > 0.$$

Ciò garantisce che il sistema ammetta come unico punto singolare l'origine e che le orbite vengano percorse in senso orario.

È bene comprendere l'utilità della presenza di un unico punto singolare. A questo proposito ricordiamo che nell'equazione 1.1, o nei sistemi ad essa equivalenti, siamo interessati alla ricerca di soluzioni periodiche, ovviamente non banali, cioè con periodo minimo $T_0 > 0$. Nel piano delle fasi questo corrisponde alla ricerca di un ciclo. Nel procedimento che seguiremo il ciclo verrà ottenuto come orbita limite tra traiettorie che si avvolgono e traiettorie che si svolgono. Per questo è opportuno assumere ipotesi che riducano al minimo la presenza di punti singolari che potrebbero dare origine al caso banale.

Vogliamo a questo punto enunciare un principio che si deduce dal teorema di Poincaré-Bendixon, a cui faremo continuamente riferimento in seguito e in base al quale otterremo l'esistenza di cicli limite.

Se si riesce a produrre una traiettoria uniformemente limitata e ad avere ipotesi che garantiscano che l'unica singolarità è un repulsore, si ottiene l'esistenza di almeno un ciclo limite stabile per il sistema.

Abbiamo già indicato un modo per garantire la presenza di un'unica singolarità. In seguito dovremo: (i) caratterizzare (localmente) l'unica singolarità come punto instabile, ovvero come *sorgente* o *repulsore*, cioè un punto dal quale le orbite si allontanano al crescere del tempo; (ii) cercare di produrre una traiettoria uniformemente limitata, il che sostanzialmente significa, nel piano delle fasi, un'orbita che si avvolge.

Riguardo alla stabilità di un ciclo limite abbiamo quanto segue. Un ciclo limite si dice

- *stabile* quando le orbite che passano per punti sia interni che esterni ad esso, "sufficientemente" vicini ad un qualsiasi punto di esso, tendono ad avvicinarsi ad esso al crescere del tempo,
- *instabile* quando le stesse orbite tendono ad allontanarsene,
- *semistabile* quando non è né stabile né instabile, cioè quando le orbite "vicine" tendono ad avvicinarsi ad esso se provengono dall'interno e ad allontanarsi da esso se provengono dall'esterno, o viceversa.

Il teorema di Poincaré-Bendixon caratterizza il ciclo limite cercato nel modo più interessante per le applicazioni pratiche.

Consideriamo ad esempio l'equazione di Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \mu > 0$$

che governa il flusso di corrente x in un oscillatore a triodo. Vedremo che questa è una particolare equazione di Liénard a cui è possibile applicare il teorema di Poincaré-Bendixon. Osservando che l'origine è lo stato di quiete, mentre il ciclo limite rappresenta la situazione di regime, la stabilità del ciclo limite corrisponde al fatto che perturbando lo stato di regime non è possibile allontanarsi da questo.

2.3 Sistemi quasi lineari

2.3.1 Definizioni

Un sistema del tipo 2.3 è *lineare* quando è del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (2.4)$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Consideriamo il caso non degenere in cui $ad - bc \neq 0$; allora l'unico punto singolare è l'origine. In questo caso la configurazione delle traiettorie ha rilevanza anche per lo studio del tipo di singolarità dell'equazione di Liénard in quanto, in generale, quest'ultima è un caso particolare dei sistemi quasi-lineari, cioè sistemi della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + F_1(x, y) \\ \dot{y} = cx + dy + G_1(x, y) \end{cases}$$

con

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0} F_1(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0} G_1(x, y) = 0$$

e, come giustificheremo brevemente nel seguito, di solito, il tipo di singolarità e la stabilità dell'origine in un sistema di questo tipo viene mutuato dal tipo di singolarità e dalla stabilità dell'origine nel sistema lineare, tranne nel caso del centro.

2.3.2 Classificazione dei punti singolari

Un punto critico (x_0, y_0) del sistema 2.3 si dice che è

- *stabile* se, comunque si scelga $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un δ tale che ogni soluzione $x = x(t)$, $y = y(t)$ del sistema 2.3, che per $t = 0$ soddisfa

$$\{[x(0) - x_0]^2 + [y(0) - y_0]^2\}^{1/2} < \delta,$$

esiste per $t \geq 0$ e ivi soddisfa

$$\{[x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2\}^{1/2} < \varepsilon .$$

Ciò significa che tutte le traiettorie che partono "sufficientemente vicine" a (x_0, y_0) rimangono "vicine" a (x_0, y_0) .

- *asintoticamente stabile* se è stabile e se esiste un $\delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$, tale che se una soluzione $x = x(t)$, $y = y(t)$ soddisfa

$$\{[x(0) - x_0]^2 + [y(0) - y_0]^2\}^{1/2} < \delta_0,$$

allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_0.$$

Ciò significa che le traiettorie che partono "sufficientemente vicine" a (x_0, y_0) non devono semplicemente stare "vicine", ma devono definitivamente tendere a (x_0, y_0) quando t tende all'infinito.

- *instabile* se non è stabile.

Consideriamo ora l'equazione caratteristica del sistema 2.4, data da

$$r^2 - (a + d)r + (ad - bc) = 0$$

con $ad - bc \neq 0$ e vediamo che disposizione hanno, nel piano delle fasi, le curve integrali nei pressi del punto singolare $(0, 0)$, distinguendo i vari

casi possibili a seconda del tipo di radici r_1 e r_2 di tale equazione. Premettiamo che nel caso di sistema lineare non degenerare, a cui ci stiamo interessando, l'equazione caratteristica non ammette radici nulle.

Se le radici sono reali e distinte, $r_1 \neq r_2$, la soluzione generale è del tipo

$$u = Ae^{r_1 t} \quad v = Be^{r_2 t}, \quad (2.5)$$

dove Ouv è un sistema di coordinate aventi le direzioni degli autovettori corrispondenti agli autovalori r_1 e r_2 . Proiettando u e v lungo gli assi x e y , si ottengono le espressioni per x e y .

- 1° Caso *Radici reali e distinte dello stesso segno.*

Supponiamo che le radici siano entrambe negative, $r_i = -\mu_i$, $\mu_i > 0$, $i = 1, 2$. Allora la soluzione generale è del tipo

$$x = \alpha_1 e^{-\mu_1 t} + \alpha_2 e^{-\mu_2 t}, \quad y = \beta_1 e^{-\mu_1 t} + \beta_2 e^{-\mu_2 t}$$

dove soltanto due delle costanti, scelte rispettivamente tra α_1, β_1 e α_2, β_2 sono indipendenti. Il comportamento all'infinito delle soluzioni non dipende dalla scelta delle costanti; per $t \rightarrow +\infty$ ogni soluzione $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$, cioè approssima il punto critico, esponenzialmente, allora esso è asintoticamente stabile. Inoltre, per mettere in evidenza che tutte le soluzioni hanno lo stesso orientamento rispetto al punto critico, quest'ultimo prende il nome di *nodo*. Per l'esattezza si tratta di un *nodo a due tangenti*, in quanto, in prossimità di esso, tutte le soluzioni, eccetto una, si allineano secondo un'unica direzione, per un totale di due direzioni.

Se invece le radici sono entrambe positive, $r_i = \mu_i$, $\mu_i > 0$, $i = 1, 2$, la situazione è simile, in quanto le traiettorie sono le stesse, ma vengono percorse in senso opposto, così che il punto critico viene a qualificarsi come nodo instabile.

- 2° Caso *Radici reali e distinte di segno opposto.*

Siano esse $r_1 = -\lambda$ e $r_2 = \mu$ con $\lambda, \mu > 0$. La soluzione generale è del tipo

$$x = \alpha_1 e^{-\lambda t} + \alpha_2 e^{\mu t}, \quad y = \beta_1 e^{-\lambda t} + \beta_2 e^{\mu t},$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ come sopra. In questo caso esiste una direzione lungo la quale il sistema 2.4 ammette una coppia di soluzioni che vanno verso il punto critico (ciò si ottiene immediatamente dalla

2.5 prendendo $B = 0$) mentre tutte le altre soluzioni divergono. Un punto critico di questo tipo prende il nome di *sella* o *colle* ed è ovviamente instabile.

- 3° Caso. *Radici reali coincidenti.*

Supponiamo che sia $r_1 = r_2 = r$, $-r = \mu > 0$, allora la soluzione generale è data da

$$x = (\alpha_1 + \alpha_2 t) e^{-\mu t}, \quad y = (\beta_1 + \beta_2 t) e^{-\mu t}$$

dove soltanto due delle quattro costanti $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sono indipendenti. Per $t \rightarrow +\infty$, le traiettorie vanno tutte verso il punto critico $(0, 0)$; in un caso si ha un *nodo proprio* (ogni traiettoria approssima il punto critico con una pendenza diversa) e in tutti gli altri casi un *nodo a una tangente* (in prossimità del punto critico le traiettorie si allineano tutte secondo la stessa direzione) e tali nodi sono asintoticamente stabili.

Se $r > 0$, la situazione è simile, cambia solo la direzione delle orbite e si ha un nodo instabile.

- 4° Caso. *Radici complesse con parte reale $\neq 0$.*

Siano esse $r = \lambda \pm i\mu$ con $\lambda \neq 0$. Allora la soluzione generale è del tipo

$$x = e^{\lambda t} (\alpha_1 \cos \mu t + \alpha_2 \sin \mu t), \quad y = e^{\lambda t} (\beta_1 \cos \mu t + \beta_2 \sin \mu t),$$

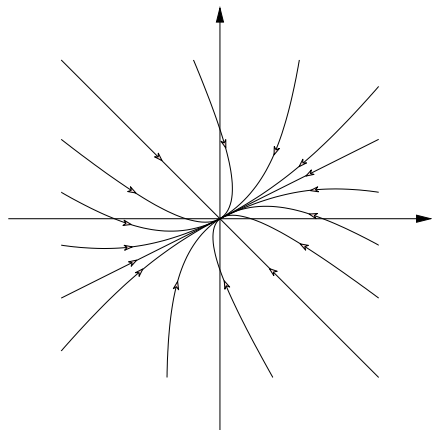
con $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ come sopra. Se $\lambda < 0$, le traiettorie vanno tutte al punto critico con un andamento a spirale; abbiamo così un *fuoco*, asintoticamente stabile. Se la parte reale è positiva, cambia il verso delle orbite e abbiamo un fuoco instabile.

- 5° Caso. *Radici puramente immaginarie.*

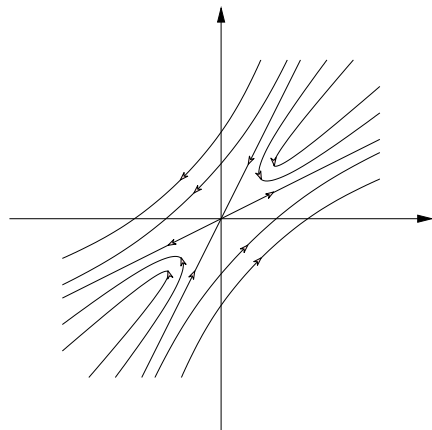
Nonostante che la formula per le soluzioni si ottenga come caso particolare della precedente, questo caso viene trattato a parte perché le traiettorie non hanno più un andamento a spirale, ma sono curve chiuse. Il punto critico in questo caso si chiama *centro* ed è sempre stabile (ma non asintoticamente).

Un esempio di questi casi è riportato in figura 2.1.

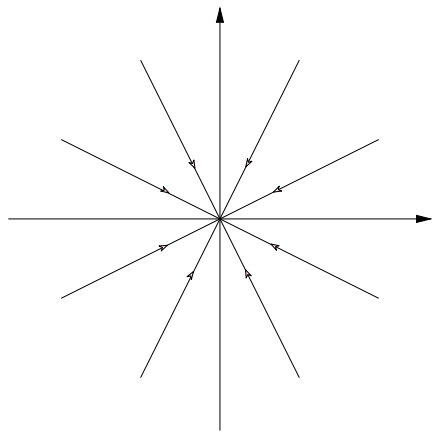
Per estendere questa classificazione all'origine, in quanto punto critico, di un sistema quasi-lineare non degenerare (cioè con $ad - bc \neq 0$), è



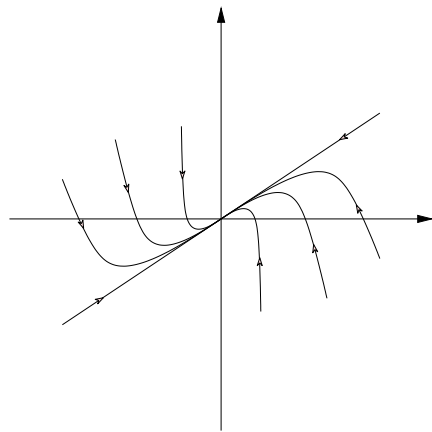
NODO A DUE TANGENTI



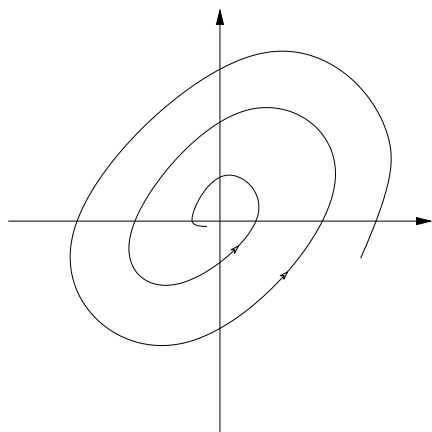
SELLA



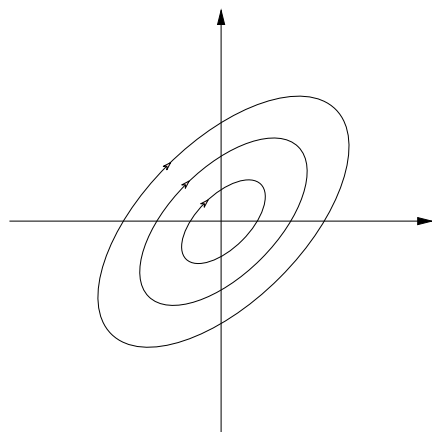
NODO PROPRIO



NODO A UNA TANGENTE



FUOCO



CENTRO

Figura 2.1: *Classificazione dei punti critici*

necessario un passaggio intermedio. Rimaniamo nell'ambito dei sistemi lineari e supponiamo che i coefficienti a, b, c, d siano i risultati di misure fisiche, quindi soggetti a una percentuale di errore. È lecito chiedersi se una piccola variazione nei coefficienti possa cambiare il tipo e la stabilità di un punto critico. La risposta è negativa ogni volta che i parametri della classificazione (determinante dell'equazione caratteristica e parte reale delle radici, ovvero le radici stesse) sono tutti diversi da zero, in quanto, se la variazione resta entro certi limiti, essi mantengono lo stesso segno; al contrario quando uno di essi è nullo, e cioè nel caso delle radici reali coincidenti, ovvero immaginarie pure, vi sono variazioni arbitrariamente piccole che danno luogo a una classificazione diversa. Nel primo caso si può passare a radici reali distinte o complesse coniugate, ma, se la variazione rimane entro certi limiti, la parte reale delle radici o le radici stesse hanno lo stesso segno delle radici reali coincidenti che avevamo in precedenza. Ciò significa che può cambiare il tipo di punto critico, da nodo a una tangente si può passare a nodo a due tangenti oppure a un fuoco, ma non cambia la sua stabilità. Nel secondo caso si può passare a radici complesse coniugate, senza alcuna indicazione per il segno della parte reale. Pertanto il centro (stabile) può diventare un fuoco, tanto instabile che asintoticamente stabile; in sintesi, non si conserva alcun elemento della classificazione.

A questo punto affermiamo, senza dimostrarlo, che le variazioni nella classificazione di un punto critico di un sistema quasi-lineare, rispetto al sistema lineare associato, sono le stesse che si ottengono per piccole variazioni dei coefficienti di quest'ultimo, con l'aggiunta della possibilità della comparsa di un *centro-fuoco*, che è un nuovo tipo di punto critico, molto più complesso, che può scaturire in seguito a una perturbazione (non lineare) di un centro.

Per concludere, applichiamo questa classificazione all'equazione di Van der Pol. In un intorno dell'origine tale equazione può essere approssimata da un sistema quasi-lineare con

$$a = -1, \quad b = \mu, \quad f_1(x, y) = -\mu x^2 y.$$

Si distinguono tre casi, $0 < \mu < 2$, $\mu > 2$ e $\mu = 2$, in corrispondenza dei quali le radici dell'equazione caratteristica sono complesse con parte reale positiva, oppure reali distinte o reali coincidenti, in entrambi i casi positive. Ciò significa che l'origine, per il sistema lineare, è rispettivamente un fuoco, un nodo a due tangenti o un nodo a una tangente, ma sempre

instabile e tale risulta *localmente* anche per l'equazione di Van der Pol. Quando ciò si verifica diremo che l'origine è una singolarità *localmente repulsiva*.

Capitolo 3

Caso autonomo

3.1 Il ritratto di fase

Consideriamo l'equazione di Liénard 1.1

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

e i sistemi ad essa equivalenti 2.1 e 2.2 e mettiamoci nelle condizioni affinché siano garantite esistenza e unicità delle soluzioni soddisfacenti le condizioni di Cauchy. Inoltre supponiamo $xg(x) > 0$ per $x \neq 0$; in questo caso il sistema ammette come unico punto singolare l'origine e le orbite vengono percorse in senso orario. Cominciamo a vedere l'andamento di una possibile orbita nel piano delle fasi, ovvero nel piano di Liénard, al crescere del tempo.

Nel piano delle fasi si ha $\dot{x} = 0$ per $y = 0$. In questi punti $\dot{y} = -g(x)$, quindi, per ipotesi, \dot{y} e x hanno segno opposto. Ciò significa che se un'orbita incontra l'asse x , lo attraversa con velocità verticale, \dot{y} , ascendente per $x < 0$, discendente per $x > 0$. Inoltre la componente orizzontale della velocità, \dot{x} , ha il segno di y , ovvero è positiva nel *I* e *II* quadrante, negativa nel *III* e *IV*. Queste nozioni possono essere riassunte graficamente nella figura 3.1.

Si tenga presente che, al di fuori dei punti dell'asse y , la figura 3.1 non è comprensiva di informazioni relative al segno di \dot{y} . Nozioni al riguardo possono essere ottenute cominciando col determinare il luogo dei punti in cui $\dot{y} = 0$. Esso è costituito da una curva, che prende il nome di *zero-isoclina*, ed è definita da

$$y = -\frac{g(x)}{f(x)}.$$

In presenza di zeri della f , la zero-isoclina si spezza in più rami, che complessivamente dividono il piano in più regioni, all'interno delle quali

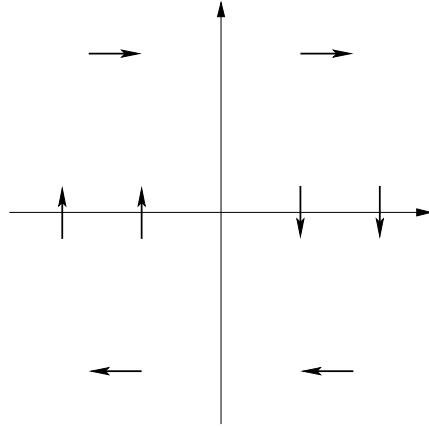


Figura 3.1: *prime nozioni sull'andamento di campo nel piano delle fasi*

il segno di \dot{y} si mantiene costante perché può cambiare soltanto (ma non necessariamente) oltrepassando un ramo di isoclina.

Per avere una conoscenza dettagliata del segno di \dot{y} e dell'andamento di campo, a titolo di esempio, esamineremo il caso particolare dell'equazione di Van der Pol, in cui f e g sono funzioni note, ovvero determineremo quello che si chiama il *ritratto di fase* di tale equazione.

A differenza del piano delle fasi, nel piano di Liénard, possiamo giungere a una descrizione completa dell'andamento di campo, senza scendere in casi specifici. Qui la velocità è verticale sulla curva

$$y = F(x),$$

ascendente dalla parte delle $x < 0$, discendente per le $x > 0$, mentre \dot{x} è positiva al di sopra e negativa al di sotto di essa, tutto ciò in accordo con il fatto che tale curva corrisponde all'asse x nella trasformazione che muta il piano delle fasi nel piano di Liénard. La curva $y = F(x)$ prende il nome di ∞ -isoclina, *isoclina verticale* o semplicemente di *isoclina*. Inoltre la componente verticale della velocità, \dot{y} , ha, molto semplicemente, segno opposto a x ed è nulla sull'asse y . Si tenga presente che, nelle ipotesi che faremo, l'andamento della curva $y = F(x)$ è simile a quello che ha nel caso particolare dell'equazione di Van der Pol; pertanto giungiamo alla rappresentazione grafica dell'andamento di campo nel piano di Liénard, come è riportato in figura 3.2.

Torniamo al piano delle fasi e in figura 3.3 osserviamo l'andamento di due possibili orbite. In particolare si osservi il senso di percorrenza delle orbite: che è orario, fuorché per quelle che provengono dal quarto quadrante e non hanno alcuna intersezione con l'asse x . Appare chiaro che tra tutte le orbite ve ne possono essere alcune che si avvolgono intorno

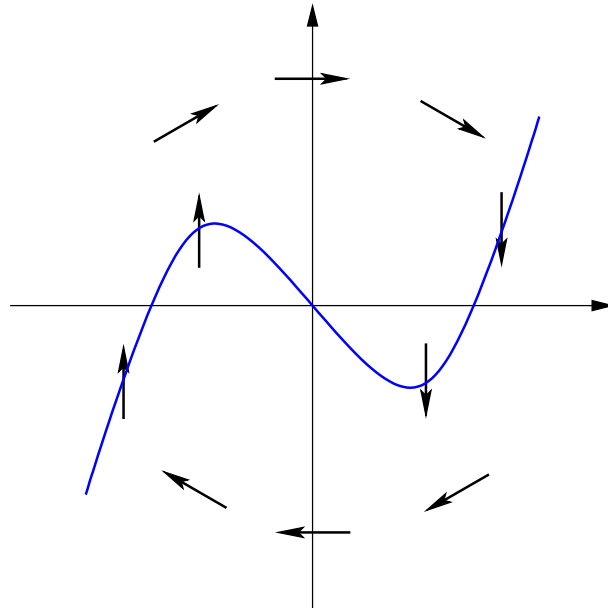


Figura 3.2: *andamento di campo nel piano di Liénard*

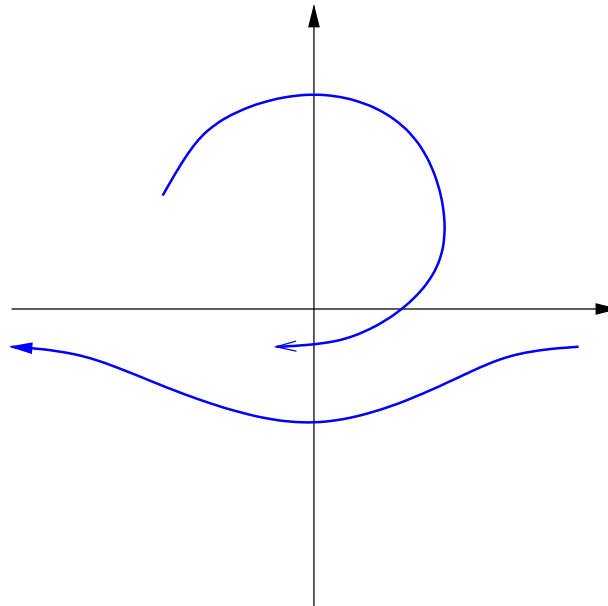


Figura 3.3: *esempi di traiettorie nel piano delle fasi*

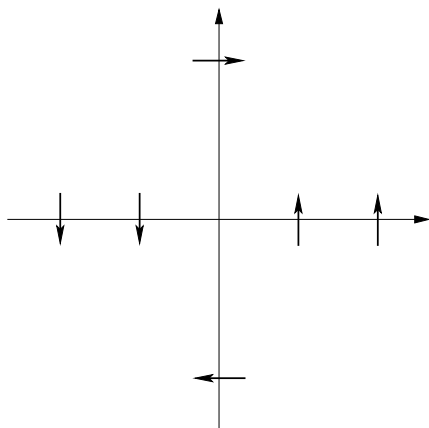


Figura 3.4: una diversa ipotesi di segno su $g(x)$

all'origine. Ciò è dovuto all'ipotesi $xg(x) > 0$ per $x \neq 0$. Al contrario, l'ipotesi

$$xg(x) < 0$$

per $x \neq 0$, che continua a garantire la presenza di un'unica singolarità nell'origine, non sarebbe altrettanto vantaggiosa. Essa comporterebbe un andamento di campo del genere riportato in figura 3.4, con il quale un'orbita che taglia l'asse x non può tagliarlo ancora né avanti né indietro nel tempo e pertanto non esistono orbite che si avvolgono. Questo significa che viene meno una delle condizioni di applicabilità del teorema di Poincaré-Bendixon, e con essa si perde anche la condizione sufficiente all'esistenza di cicli, fornita dal teorema stesso, ma quel che è più importante è che non esistono cicli!

Studiamo ora il ritratto di fase dell'equazione di Van der Pol, in cui $f(x) = \mu(x^2 - 1)$, $\mu > 0$ e $g(x) = x$. Si osservi che sono verificate le ipotesi f continua, g localmente lipschitziana e $xg(x) > 0$ per $x \neq 0$. Consideriamo la zero-isocline, e cioè la curva definita dalla funzione

$$y = -\frac{x}{\mu(x^2 - 1)}.$$

Tale curva, sia essa Γ , è il grafico di una funzione dispari ed è, quindi, simmetrica rispetto all'origine. Presenta due asintoti verticali definiti da $x = \pm 1$, che corrispondono agli zeri della f e pertanto si spezza in tre rami $\Gamma_1(x)$ per $x \in (-\infty, -1)$, $\Gamma_2(x)$ per $x \in (-1, +1)$ e $\Gamma_3(x)$ per $x \in (+1, +\infty)$. Si ha

$$\Gamma(0) = 0, \lim_{x \rightarrow -1^-} \Gamma(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} \Gamma(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = 0$$

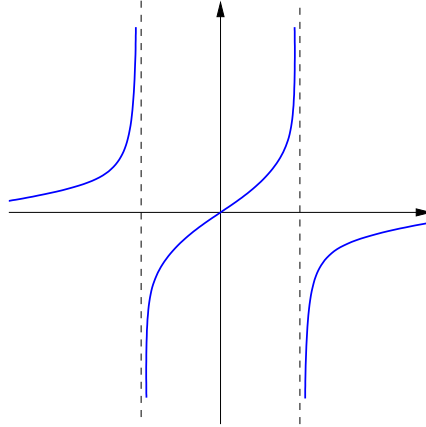


Figura 3.5: grafico dell'isoclina dell'equazione di Van der Pol

e per simmetria si ottengono i limiti destro e sinistro per $x \rightarrow -1$ e il limite per $x \rightarrow -\infty$. Infine, dal calcolo della derivata

$$\Gamma'(x) = \frac{x^2 + 1}{\mu(x^2 - 1)^2} \neq 0,$$

ricaviamo che non ci sono estremi locali. Otteniamo il grafico riportato in figura 3.5.

Una volta individuata la zero-isoclina, possiamo determinare il segno di \dot{y} . Si può fare in due modi:

- *1° metodo.* Consiste nel risolvere, rispetto a y , la disequazione

$$\dot{y} = -\mu(x^2 - 1)y - x > 0.$$

Tenendo conto di quanto già detto relativamente alla suddivisione, da parte dell'isoclina, del piano in regioni all'interno delle quali il segno di \dot{y} resta costante, è sufficiente determinare tale segno in un unico punto per ciascuna di esse; nella fattispecie dobbiamo prendere in considerazione quattro regioni. Cominciamo dalle due regioni che contengono uno dei due semiassi x . Otteniamo che in ciascuna di esse \dot{y} ha segno opposto al segno del semiasse in essa contenuto. Infatti per i punti dell'asse x si ha

$$\dot{y} = -x.$$

Passiamo alle altre due regioni. Abbiamo

$$\text{sgn}(\dot{y}) = \text{sgn}[-\mu(x^2 - 1)y], \text{ per } |y| \text{ grande}$$

quindi per $|x| > 1$, $\dot{y} < 0$ per qualche $y > 0$ con $|y|$ grande e $\dot{y} > 0$ per qualche $y < 0$ con $|y|$ grande. Quindi nella regione in alto a sinistra $\dot{y} < 0$, mentre nella regione in basso a destra $\dot{y} > 0$.

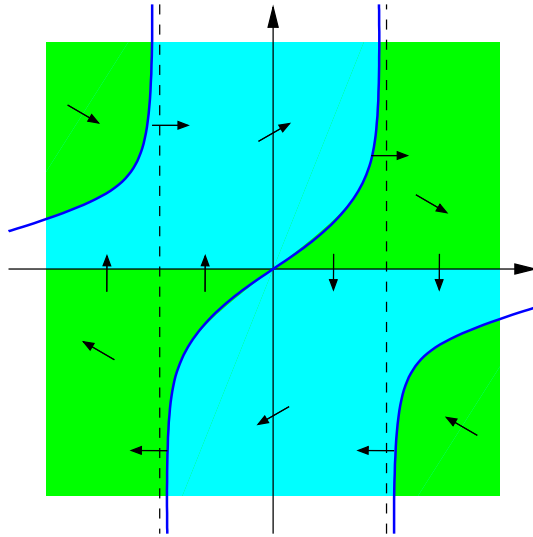


Figura 3.6: andamento di campo per l'equazione di Van der Pol

- 2° metodo. Poniamo

$$h(x, y) = \dot{y} = -\mu(x^2 - 1)y - x.$$

Si ha

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} = -\mu(x^2 - 1) \begin{cases} < 0, & |x| > 1 \\ > 0, & |x| < 1 \end{cases}.$$

Ciò significa che fissato x con $|x| > 1$, \dot{y} è una funzione decrescente di y . Essendo già a conoscenza che \dot{y} si annulla su Γ , al di sopra di essa sarà negativo, al di sotto positivo. Analogamente fissato x con $|x| < 1$, otteniamo \dot{y} positivo al di sopra di Γ , negativo al di sotto.

La curva Γ , con i suoi tre rami Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , divide il piano in quattro regioni nelle quali si alterna il segno di \dot{y} . Per una completa conoscenza del campo dobbiamo tenere conto anche del segno di \dot{x} , che come già sappiamo, varia in maniera molto più semplice. In conclusione, otteniamo le sei regioni della figura 3.6, nelle quali si alterna il segno di

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

La prima regione è costituita dalla parte del II quadrante delimitata da Γ_1 . La seconda appartiene al semipiano delle y positive ed è delimitata da Γ_1 , dalla semiretta $x < 0$ e dalla parte di Γ_2 appartenente a tale semipiano. La terza appartiene al semipiano delle y positive ed è delimitata dalla parte di Γ_2 appartenente a tale semipiano e dalla semiretta

$x > 0$. La quarta è costituita dalla parte del *IV* quadrante delimitata da Γ_3 . La quinta appartiene al semipiano delle y negative ed è delimitata dalla semiretta $x > 0$, da Γ_3 e dalla parte di Γ_2 appartenente a tale semipiano. La sesta ed ultima appartiene al semipiano delle y negative ed è delimitata dalla semiretta $x < 0$ e dalla parte di Γ_2 appartenente a tale semipiano.

3.2 Il metodo del confronto

Introduciamo ora il *metodo del "confronto"*.

Siano $\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + g(x) = 0$ e $\ddot{x} + f_2(x)\dot{x} + g(x) = 0$ due equazioni di Liénard e sia $f_1 > f_2$. Nel piano delle fasi la *pendenza* di un'orbita in un suo punto (x, y) , detta anche *slope*, o *slope del sistema*, è data da

$$y' = y'(x, y) = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -f(x) - \frac{g(x)}{y}.$$

Se nel punto (x, y) un'orbita dell'equazione con f_1 interseca un'orbita dell'equazione con f_2 , nell'ipotesi $f_1 > f_2$, si ha:

$$y'_1(x, y) = -f_1(x) - \frac{g(x)}{y} < -f_2(x) - \frac{g(x)}{y} = y'_2(x, y),$$

pertanto si ha il seguente

Lemma 3.1 *Siano*

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + g(x) = 0,$$

$$\ddot{x} + f_2(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

due equazioni di Liénard. Se

$$f_1 > f_2,$$

le orbite dell'equazione con f_1 "entrano" nelle orbite dell'equazione con f_2 (vedi figura 3.7).

3.3 L'equazione di Duffing

Con l'applicazione del lemma 3.1 otterremo, tra l'altro, notizie sulla stabilità dell'origine. Per fare ciò, data una generica equazione di Liénard, la confronteremo con l'equazione di Duffing

$$\ddot{x} + g(x) = 0,$$

— TRAIETTORIE DEL SISTEMA CON f_1
 — TRAIETTORIE DEL SISTEMA CON f_2

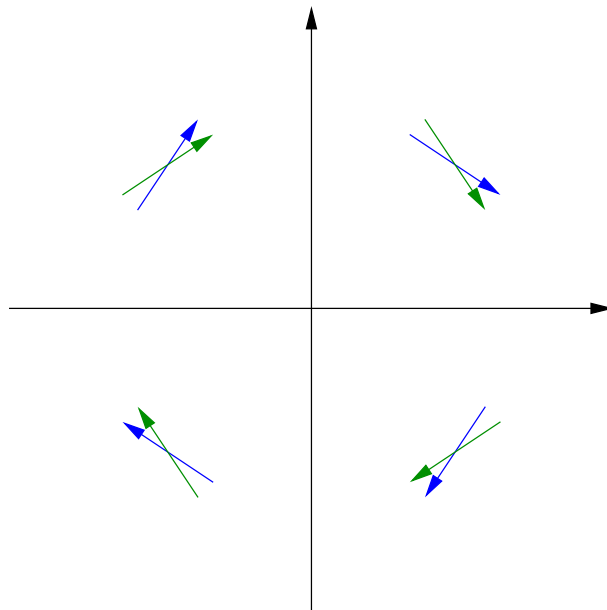


Figura 3.7: *lemma di confronto*

che, come abbiamo già detto, è anch'essa un'equazione di Liénard con $f(x) = 0$.

Studiamo il ritratto di fase dell'equazione di Duffing: per fare ciò scriviamo il sistema ad essa equivalente:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} .$$

Si ricava facilmente che su ogni orbita del sistema la funzione

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(u) du$$

è costante. Studiamo le funzioni

$$\psi(x, y) = k \tag{3.1}$$

al variare di k tra i reali non negativi.

Poiché

$$\psi(0, y) = \frac{1}{2}y^2 = k,$$

si ha

$$y(0) = \pm\sqrt{2k},$$

pertanto i valori $\pm\sqrt{2k}$ costituiscono le intersezioni della curva 3.1 con l'asse y .

Poniamo

$$G(x) = \int_0^x g(u) du.$$

Facendo, come di consueto, l'ipotesi $xg(x) > 0$ per $x \neq 0$, $G(x)$ è una funzione positiva e monotona in ciascuno dei due rami $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$.

Poiché

$$G(x) = \psi(x, 0),$$

la curva 3.1 incontra l'asse x solo se l'equazione integrale

$$G(x) = k$$

ha soluzione in x .

Se $G(x)$ non è limitata superiormente e cioè se

$$\int_0^x g(u) du = +\infty,$$

per ogni $k \in \mathbb{R}^+$, $G(x) = k$ ammette due soluzioni x_1 e x_2 con $x_1 < 0 < x_2$, a cui corrispondono le due intersezioni positiva e negativa con l'asse x . Ciò significa che ogni curva della famiglia $\psi(x, y) = k$ è chiusa.

Sia ora $G(x)$ limitata superiormente e sia $H = \lim G(x) = \sup G(x)$. Per l'ipotesi di segno sulla g , si ha $H > 0$, allora $G(x) = k$ ammette due soluzioni x_1 e x_2 con $x_1 < 0 < x_2$, solo per $k < H$, quindi le orbite della famiglia $\psi(x, y) = k$ che incontrano l'asse y al di sotto del valore $\sqrt{2H}$, incontrano anche l'asse x in x_1 e x_2 e pertanto sono chiuse, mentre a quelle che incontrano l'asse y per $y \geq \sqrt{2H}$ viene a mancare perlomeno una delle due intersezioni con l'asse x , e pertanto sono aperte (da una, o da due parti). L'orbita passante per $(0, \sqrt{2H})$ è la prima delle orbite aperte e per questo prende il nome di *separatrice*.

Poiché $H > 0$, è provata l'esistenza di orbite chiuse, o meglio esiste un intorno di $x = 0$ in cui le orbite sono chiuse.

Secondo la classificazione dei punti singolari data all'inizio del capitolo, in entrambi i casi l'origine, in quanto singolarità, è un centro. Tuttavia i due casi si distinguono per il fatto che nel secondo la proprietà di essere centro è valida solo in un intorno del punto singolare. In questo caso diremo che l'origine è un *centro locale* (vedi figura 3.9), mentre nel primo diremo che l'origine è un *centro globale* (vedi figura 3.8).

Dunque nell'equazione di Duffing l'origine, per lo meno *localmente*, è sempre un centro. Ciò è sufficiente per caratterizzare *allo stesso modo* il tipo di stabilità dell'origine nell'equazione di Liénard.

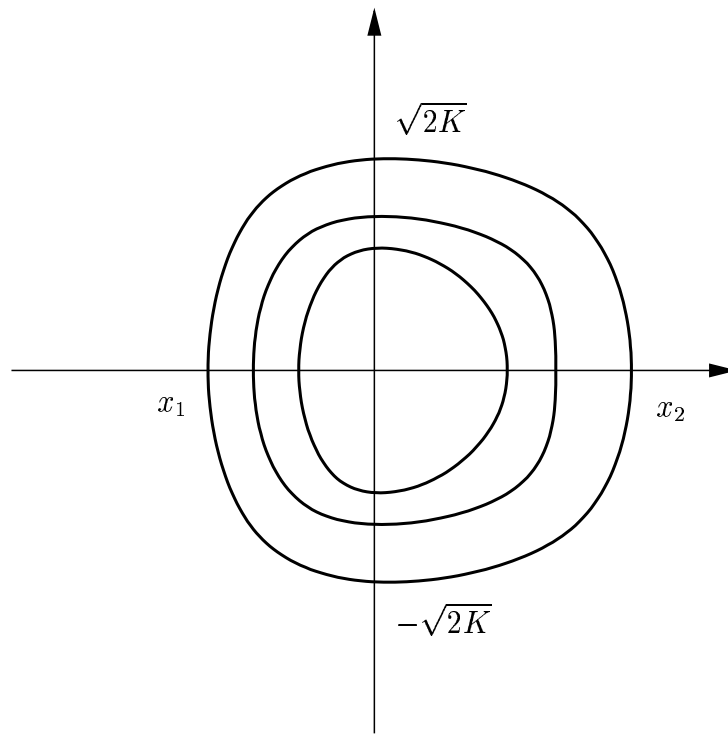


Figura 3.8: un centro globale per l'equazione di Duffing

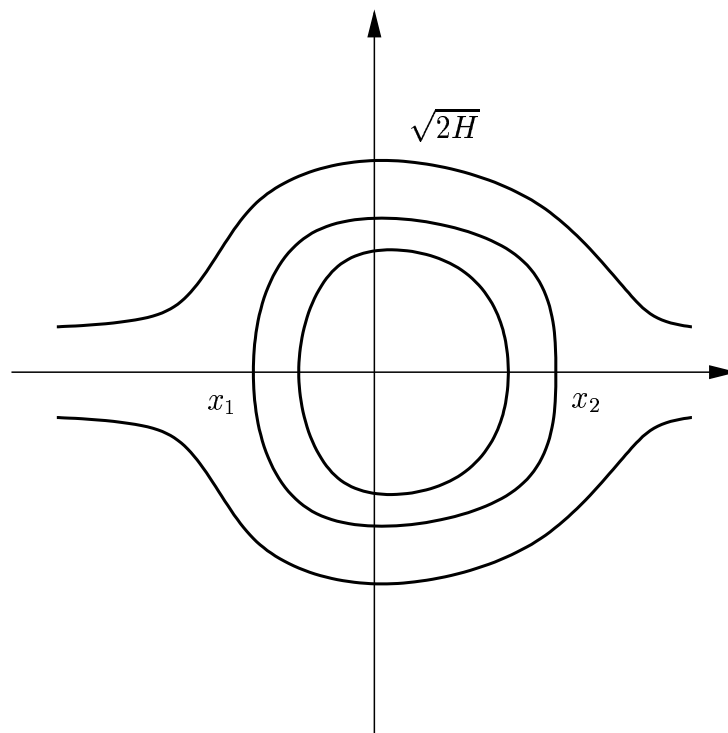


Figura 3.9: un centro locale per l'equazione di Duffing

Osservazione. Poco sopra abbiamo introdotto la nozione di separatrice, vogliamo ora completarla. Data una equazione di Liénard, consideriamo il sistema equivalente nel piano delle fasi. Tenendo presente il modello polinomiale sul quale focalizzeremo la nostra attenzione nel seguito, per semplicità e senza perdita di generalità per tale modello, supponiamo che esista una semiorbita negativa che proviene dall'infinito (ciò accade ad esempio quando $f(x) < 0$ per x grande, caso a cui ci si può ricondurre con una inversione del senso del tempo). Nelle consuete ipotesi di esistenza e unicità per i problemi di Cauchy associati al sistema considerato, per l'unicità, ogni orbita che vi passa al di sotto proviene anch'essa dall'infinito, senza incontrare l'asse x . Al contempo, per la condizione di esistenza, per ogni punto del semiasse x positivo passa un'orbita del sistema. Pertanto esistono insiemi di orbite dalle caratteristiche diverse; tali insiemi sono separati da uno o più elementi separatori, che prendono appunto il nome di *separatrici*. Più propriamente parleremo di *semiorbita negativa con le caratteristiche di separatrice*, chiamando *separatrice* un'orbita che ha le caratteristiche appena descritte tanto per la semiorbita negativa, quanto per la semiorbita positiva, a cui possiamo estendere l'analoga definizione.

3.4 Due criteri di esistenza

Dimostriamo ora un primo risultato riguardante l'esistenza di cicli limite [27].

Teorema 3.1 *Siano $f(x)$ continua e $g(x)$ localmente lipschitziana per $x \in (-\infty, +\infty)$; sia $xg(x) > 0$ per $x \neq 0$ e, inoltre valgano le seguenti ipotesi:*

1. $f(0) < 0$ e $\exists \delta > 0 : f(x) > 0$ per $|x| > \delta$,
2. $\min \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sup \frac{g(x)}{f(x)}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \sup \frac{|g(x)|}{f(x)} \right\} < +\infty$,
3. $\exists h \geq \delta$ e $b > 0$ tali che $f(x) + |g(x)| > b > 0$ se $|x| > h$.

Allora esiste almeno una soluzione periodica per l'equazione di Liénard.

Dim. Ricordiamo innanzi tutto che con la prima parte delle ipotesi si garantisce: (a) esistenza e unicità delle soluzioni soddisfacenti le condizioni di Cauchy, (b) che l'unica singolarità è nell'origine e che le orbite vengono percorse in senso orario.

Per la continuità della f , da $f(0) < 0$ segue che esiste un intorno di $x = 0$ in cui $f(x) < 0$. Sia esso (α, β) , con $-\delta < \alpha < 0 < \beta < \delta$. Consideriamo l'equazione di Duffing e consideriamo l'intorno di $x = 0$ in cui per questa equazione l'origine è un centro (eventualmente tutto il piano). Se nell'intersezione, sicuramente non vuota, di questo intorno con (α, β) confrontiamo l'equazione di Liénard con l'equazione di Duffing, otteniamo che le orbite della prima escono dalle curve chiuse della seconda; questo ci permette di dire che l'origine è localmente repulsiva. Notiamo che per individuare il tipo di stabilità del punto critico, grazie al metodo del "confronto", possiamo fare a meno di usare i teoremi di linearizzazione.

Proseguiamo la dimostrazione facendo vedere che si può produrre una traiettoria limitata; l'asserto segue poi dall'applicazione del teorema di Poincaré-Bendixon.

Consideriamo la zero-isoclina $y = -g(x)/f(x)$. Come conseguenza dell'ipotesi **1**, ci sono punti in cui $f(x)$ si annulla. Sia δ_1 il più piccolo e δ_2 il più grande di tali zeri (allora $\delta \geq \max\{|\delta_1|, \delta_2\}$). Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow \delta_1^-} -\frac{g(x)}{f(x)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \delta_2^+} -\frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

Sia Δ_1 il grafico della funzione $u_1(x) = -g(x)/f(x)$ per $x \in (-\infty, \delta_1)$, e sia Δ_2 il grafico di $u_2(x) = -g(x)/f(x)$ per $x \in (\delta_2, +\infty)$. Le due curve Δ_1 e Δ_2 dividono il piano delle fasi in tre regioni. L'ipotesi **2** garantisce che (i) u_1 è limitato superiormente per $x \rightarrow -\infty$ o che (ii) u_2 è limitato inferiormente per $x \rightarrow +\infty$. Supponiamo qui che si verifichi (i) (la dimostrazione per il caso (ii) è analoga).

Poiché $u_1(x) > 0$, come conseguenza di (i), possiamo scegliere un punto $\alpha = (x_\alpha, u_1(x_\alpha))$ su Δ_1 la cui ascissa x_α sia a sinistra di δ_1 e la cui ordinata sia più grande di tutti i valori che $u_1(x)$ assume per $x < x_\alpha$. Poniamo

$$G(x, y) = -f(x)y - g(x) .$$

Poiché $\partial G(x, y)/\partial y = -f(x)$, possiamo affermare che per ogni fissato $x \notin [\delta_1, \delta_2]$, $\dot{y} = G(x, y)$ è una funzione decrescente di y . Avendo già osservato che $\dot{y} = 0$ sulla zero-isoclina, in particolare sul ramo $u_1(x)$, \dot{y} è negativo al di sopra e positivo al di sotto di essi. La figura 3.10 è comprensiva di queste nozioni relative al campo.

Consideriamo la traiettoria che passa per il punto $\alpha = (x_\alpha, u_1(x_\alpha))$. Se la percorriamo a ritroso nel tempo, passiamo per punti (x, y) con valori di y via via maggiori e che quindi rimangono sempre al di sopra

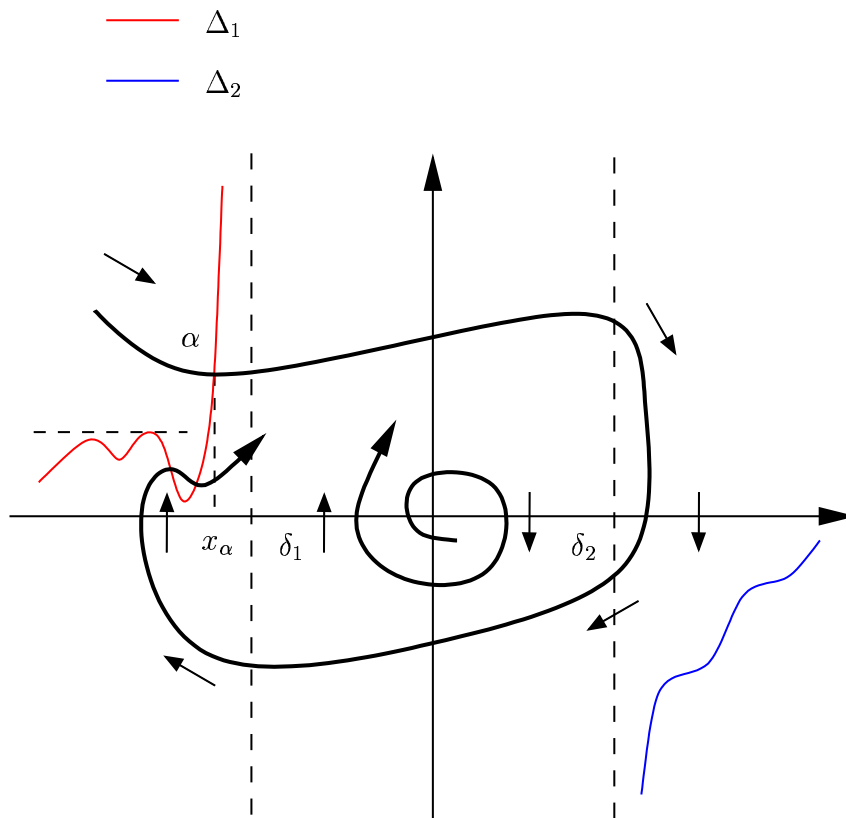


Figura 3.10: costruzione di una traiettoria limitata con il teorema 1

del corrispondente valore $u_1(x)$. Concludiamo che, poiché è limitata dal ramo dell'isoclina, la traiettoria per α proviene dall'*infinito* senza intersecare l'asse x prima di raggiungere il punto $\alpha \in \Delta_1$.

Continuiamo a studiare la traiettoria nei punti che seguono α . Se analizziamo la pendenza della curva, data da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -f(x) - \frac{g(x)}{y}, \quad (3.2)$$

concludiamo che tale curva non può avere asintoti verticali, in quanto $f(x)$ e $g(x)/y$ sono quantità limitate per y grande. Inoltre, ricordando l'andamento di campo della generica equazione di Liénard, e in particolare il fatto che nel semipiano delle x negative un'orbita può tagliare l'asse x solo se proviene dal *III* quadrante, la traiettoria per α , proveniente dal *II* quadrante, è limitata dall'asse delle x . Ne consegue che essa deve attraversare l'asse delle y . Esaminando la traiettoria nel semipiano delle x positive, poiché persistono i motivi per l'assenza di asintoti verticali, possiamo affermare che la traiettoria o attraversa l'asse x nell'intervallo $0 < x \leq \delta_2$, oppure attraversa la retta $x = \delta_2$. Nel secondo caso, ricordando l'andamento di campo sopra la curva $u_2(x)$, $y(x)$ diminuirà dopo $x = \delta_2$; inoltre l'ipotesi **3.** non permette la presenza di un asintoto orizzontale. Infatti se questo esistesse, esisterebbero valori x per cui almeno una delle due quantità $f(x)$ o $g(x) = |g(x)|$ risulterebbe superiore a $b/2$, determinando un valore strettamente negativo per il limite della quantità 3.2, che dovrebbe invece essere nullo. Così la traiettoria deve certamente attraversare l'asse delle x per qualche $x > \delta_2$. Ora la traiettoria si trova nel semipiano delle $y < 0$. Sempre come conseguenza di 3.2, la traiettoria, che è limitata dal ramo Δ_2 di isoclina, non può avere asintoti verticali, pertanto deve attraversare l'asse delle y per qualche valore $y < 0$.

Successivamente, tornata nel semipiano delle $x < 0$, non potendo avere asintoti orizzontali come conseguenza di **3.**, la traiettoria taglia l'asse delle x nell'intervallo $(\delta_1, 0)$, ovvero per qualche $x \leq \delta_1$. Nella seconda eventualità, la traiettoria può tagliare la curva Δ_1 , ma l'ordinata del punto di incontro deve essere più piccola dell'estremo superiore di $u_1(x)$ per $-\infty < x < x_\alpha$.

Alla fine, la traiettoria deve rimanere sotto il grafico Δ_1 , poiché $y(x)$ è una funzione decrescente al di sopra di Δ_1 . In ogni caso possiamo concludere che questa traiettoria è limitata. Nel caso in cui fosse stato limitato $u_2(x)$, avremmo scelto come corrispondente punto di partenza un punto $\beta \in \Delta_2$, con ascissa $x_\beta > \delta_2$. Abbiamo trovato che cominciando all'istante iniziale da un punto α (o β), il punto $(x(t), y(t))$ si muove,

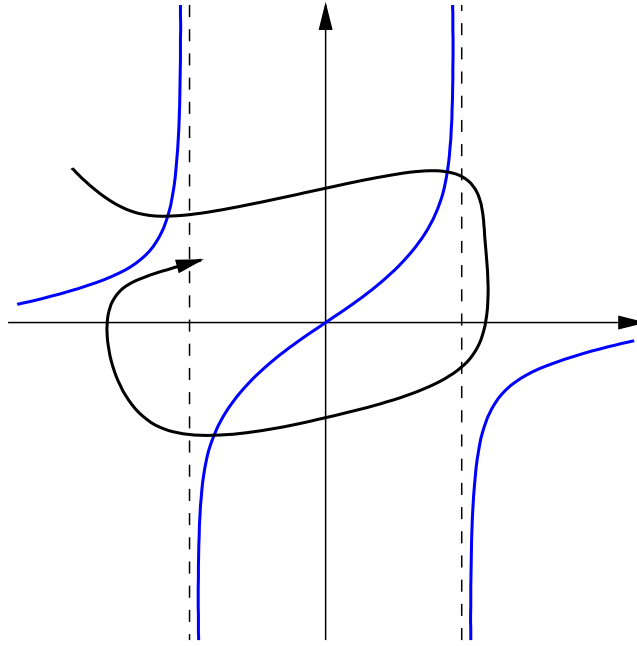


Figura 3.11: costruzione di una traiettoria limitata per l'equazione di Van der Pol

al crescere del tempo su una traiettoria limitata. Perciò siamo nelle ipotesi del teorema di Poincaré-Bendixon, quindi esiste almeno un ciclo limite stabile per il sistema, ovvero una soluzione periodica stabile per l'equazione di Liénard.

In figura 3.10 è rappresentata una traiettoria limitata costruita con il teorema 3.1.

Si noti che l'equazione di Van der Pol verifica le ipotesi del Teorema 3.1 e in particolare l'ipotesi 1.. Infatti si ha $f(x) = \mu(x^2 - 1) < 0$ per $|x| < 1$, $f(x) > 0$ per $|x| > 1$ e quindi l'origine è localmente repulsiva. Ritroviamo così, come caso particolare, un risultato già ottenuto per altra via. In figura 3.11 è rappresentata una traiettoria limitata per l'equazione di Van der Pol.

Sempre l'equazione di Van der Pol verifica anche le ipotesi del successivo teorema, in cui presentiamo un altro criterio sufficiente a stabilire l'esistenza di almeno un ciclo limite stabile [25].

Teorema 3.2 Siano $f(x)$ continua e $g(x)$ localmente lipschitziana per $x \in (-\infty, +\infty)$ e sia $xg(x) > 0$ per $x \neq 0$. Inoltre:

1. $f(0) < 0$ ed $\exists \delta_1, \delta_2$ con $\delta_1 < 0 < \delta_2$ tali che $f(x) > 0, x \notin [\delta_1, \delta_2]$,

2. $\int_0^\infty g(u) du = +\infty$,
3. $\exists \alpha \leq \delta_1, \beta \geq \delta_2$ tali che $\int_\alpha^\beta f(u) du > 0$.

Allora esiste almeno una soluzione periodica per l'equazione di Liénard.

Dim. È conveniente analizzare l'equazione di Liénard nel piano delle fasi; cioè consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x) \end{cases} \quad (3.3)$$

La prima parte delle ipotesi garantisce che (a) per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ c'è un'unica soluzione $(x(t), y(t))$ del problema di Cauchy associato al sistema 3.3 e (b) l'origine è l'unica singolarità e le orbite vengono percorse in senso orario.

Confronteremo il sistema 3.3 con il seguente sistema, equivalente all'equazione di Duffing:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \quad (3.4)$$

Per l'ipotesi **2**. l'origine è un centro globale per il sistema 3.4 quindi, come già sappiamo, le traiettorie di tale sistema sono curve chiuse contenenti l'origine, su ognuna delle quali la funzione $\psi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(u) du$ è costante.

Per la continuità della f e per l'ipotesi **1**. esiste un intorno di $x = 0$ in cui f è negativa. In questo intorno confrontiamo il sistema 3.3 con il sistema 3.4; otteniamo che le orbite del primo escono dalle curve chiuse del secondo, cosa che caratterizza l'origine come sorgente per il sistema 3.3.

Se riusciamo a provare che esiste una traiettoria limitata per il sistema 3.3 allora possiamo applicare il teorema di Poincaré-Bendixon per dedurre l'esistenza di almeno una soluzione periodica stabile per l'equazione di Liénard.

Facciamo dunque vedere che si può produrre una traiettoria limitata.

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha < \delta_1 < \delta_2 < \beta$; consideriamo l'intervallo $[\alpha, \beta] \supset [\delta_1, \delta_2]$; poiché al di fuori di esso $f(x) > 0$, $[\alpha, \beta]$ contiene tutti gli intervalli nei quali $f(x) < 0$; tra questi, come abbiamo già osservato poco sopra, c'è almeno un intorno dell'origine. In questi intervalli, per il criterio di confronto, le traiettorie escono dalle curve chiuse del sistema 3.4. Facciamo vedere che tanto più aumenta y , tanto più ciò è vantaggioso ai fini di trovare un'orbita che si avvolge. Per indicare la traiettoria che

all'istante $t = 0$ passa per il punto P , cioè tale che $(x(0), y(0)) \equiv P$, useremo la notazione $(x(t), y(t); P)$, mentre lasceremo $(x(t), y(t))$ quando non è necessario specificare il punto di partenza. Inoltre indicheremo con $(x(t), y(t))$ le traiettorie del sistema 3.4 e $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ le traiettorie del sistema 3.3.

Sulla retta $x = \alpha$ scegliamo un punto $P_0(\alpha, y_0)$, con $y_0 > 0$, abbastanza grande in un senso che verrà precisato nel corso della dimostrazione. Siano Γ_0 il ciclo $(x(t), y(t); P_0)$ del sistema 3.4 che passa per P_0 e $P_1(\beta, y_1)$, $P_2(\beta, y_2)$, $P_3(\alpha, y_3)$ i punti di intersezione di Γ_0 con le rette $x = \alpha$ e $x = \beta$, ordinati nel senso di percorrenza dell'orbita. Ricordiamo che su Γ_0 la funzione $\psi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(s) ds$ è costante, sia ad esempio pari a K , e che tale ciclo è simmetrico rispetto all'asse x . Quindi Γ_0 è unione dei grafici delle due funzioni $y = \pm\sqrt{2(K - G(x))}$, ove, come di consueto, abbiamo posto $G(x) = \int_0^x g(s) ds$. Essendo la funzione integrale $G(x)$ monotona decrescente per $x < 0$ e monotona crescente per $x > 0$, nell'intervallo $[\alpha, \beta]$ il punto di massima ordinata sull'emiciclo $(x, \sqrt{2(K - G(x))})$ è raggiunto per $x = 0$ e quello di minima in uno degli estremi $y(\alpha)$ oppure $y(\beta)$. Supponiamo che sia $y_0 = y(\alpha) = \min \sqrt{2(K - G(x))} = \min |\sqrt{2(K - G(x))}|$; allora consideriamo la traiettoria del sistema 3.3 $(\hat{x}(t), \hat{y}(t); P_0)$ e facciamo vedere che si avvolge.

Osservazione. In maniera del tutto analoga si procede se, invece, risulta $y(\beta) = \min \sqrt{2(K - G(x))} = \min |\sqrt{2(K - G(x))}|$. In tal caso va presa in considerazione la traiettoria $(\hat{x}(t), \hat{y}(t); P_2)$, dove $P_2 \equiv (\beta, y_2 = -y(\beta))$, e vanno rinumerati i punti $P_i, i = 0, \dots, 3$ secondo il nuovo ordine cronologico sull'orbita. In questo modo è ancora assicurato che la scelta cada sulla traiettoria di 3.3 che comincia dal punto di $(x(t), y(t); P_2)$ con ordinata di modulo minimo nell'intervallo $[\alpha, \beta]$ (si tenga presente che per l'unicità dei problemi di Cauchy associati al sistema 3.4 $(x(t), y(t); P_2) \equiv (x(t), y(t); P_0)$).

Lo slope del sistema 3.3 è dato da

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -f(x) - \frac{g(x)}{y}. \quad (3.5)$$

Osserviamo che per $|y|$ grande y' è limitato e dunque per le traiettorie di questo sistema è esclusa la presenza di asintoti verticali; ne consegue che $(\hat{x}(t), \hat{y}(t); P_0)$ può incontrare l'asse x per $x < \beta$ oppure necessariamente incontra la retta $x = \beta$. Nel primo caso abbandoniamo questa

traiettoria e andiamo a sceglierne un'altra con un punto di partenza più alto. Infatti potrebbe trattarsi di una traiettoria che si svolge dall'origine, come certamente ne esistono in un intorno del punto critico, che è un repulsore. Per essere certi dell'intersezione con $x = \beta$ consideriamo la traiettoria $(\hat{x}(t), \hat{y}(t); \tilde{P}_2)$, dove \tilde{P}_2 è un qualsiasi punto di ascissa β , percorriamola a ritroso nel tempo fino all'intersezione (questa volta certa) con la retta $x = \alpha$ nel punto \tilde{P}_0 , che sarà il nostro nuovo punto P_0 . Si ricordi che, per l'unicità dei problemi di Cauchy associati al sistema 3.3, la traiettoria $(\hat{x}(t), \hat{y}(t); \tilde{P}_0)$, coincide con $(\hat{x}(t), \hat{y}(t); \tilde{P}_2)$. Dunque, senza perdere in generalità, supponiamo che $(\hat{x}(t), \hat{y}(t); P_0)$ incontri la retta $y = \beta$. Allora integriamo la 3.5 tra α e β , ottenendo

$$\hat{y}(\beta) - \hat{y}(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} -f(s) ds - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{g(s)}{\hat{y}(s)} ds \quad (3.6)$$

e, per l'ipotesi **3.**,

$$\hat{y}(\beta) < \hat{y}(\alpha) \quad (3.7)$$

a condizione che in tutto l'intervallo $[\alpha, \beta]$, $|\hat{y}|$ sia sufficientemente grande da rendere trascurabile il termine $g(x)/\hat{y}(x)$. Si può sempre supporre che ciò avvenga perché nell'eventualità opposta sposteremmo più in alto il punto di partenza. Più avanti calcoleremo i parametri esatti per quantificare i concetti che stiamo esprimendo.

Ciò si può riassumere dicendo che sull'orbita $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ l'ordinata \hat{y} , pur crescendo arbitrariamente all'interno della fascia $[\alpha, \beta]$, all'uscita di essa ha un valore più basso di quello con cui è entrata.

Ponendo $\hat{y}_1 = \hat{y}(\beta)$, tenendo conto anche di quanto già detto in precedenza, si ha $y_1 > y_0 > \hat{y}_1$. Ne consegue che il punto $\hat{P}_1(\beta, \hat{y}_1)$ della traiettoria $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ è interno a Γ_0 . Ora la traiettoria si muove per punti di ascissa $\hat{x} > \beta$, così che, per il criterio del confronto, entra nei cicli del sistema 3.4 e, in particolare, nel ciclo per \hat{P}_1 , che indicheremo con Γ_1 , interno a Γ_0 . Allora la traiettoria attraversa l'asse x e in seguito procede nel senso delle x decrescenti, giungendo ad una nuova intersezione con la retta $x = \beta$ in un punto $\hat{P}_2(\beta, \hat{y}_2)$, $\hat{y}_2 < 0$. Per la simmetria dei cicli e in particolare di Γ_1 e per il criterio di confronto, abbiamo $|\hat{y}_2| < \hat{y}_1$. Dopo \hat{P}_2 , la traiettoria entra una seconda volta nella fascia $[\alpha, \beta]$. La presenza di asintoti verticali è già stata esclusa, allora possiamo considerare l'integrale definito 3.6. Ancora una volta dobbiamo accertarci che nell'intervallo di integrazione $|\hat{y}|$ resti sufficientemente grande nel senso precisato sopra. Supponiamo che ciò accada perché in caso contrario ci riportiamo a questo caso cambiando il punto di partenza; nella seconda

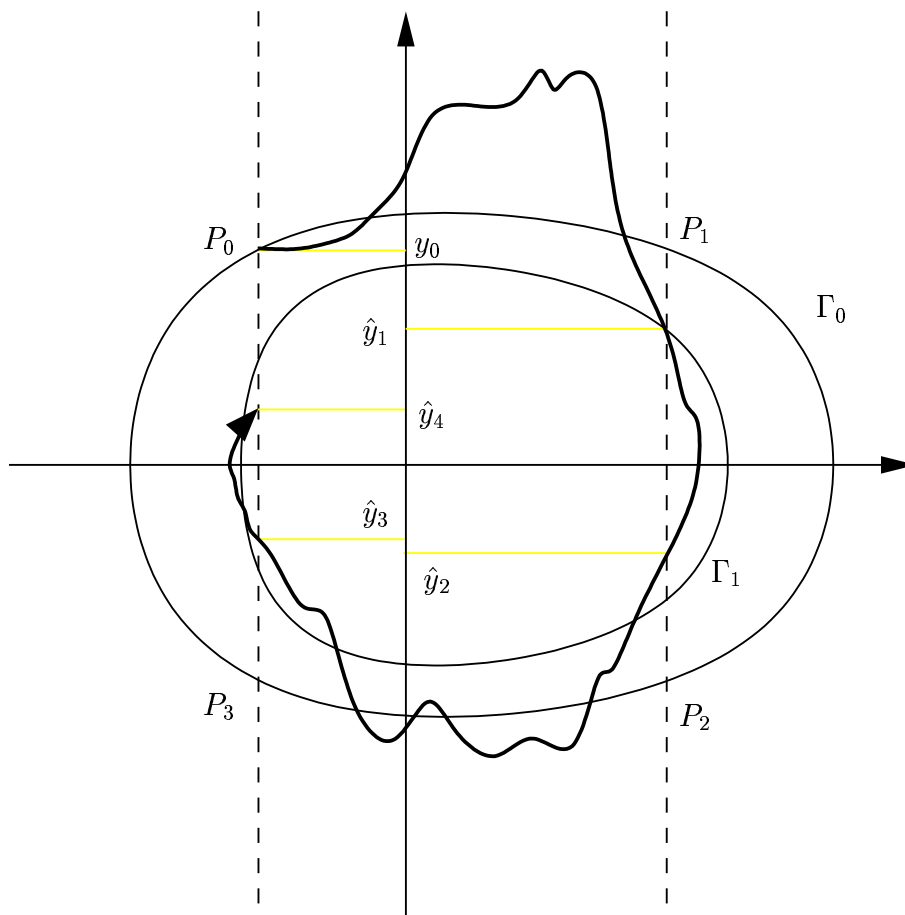


Figura 3.12: costruzione di una traiettoria limitata con il teorema 2

eventualità, per trovare il nuovo punto di partenza, scendiamo opportunamente al di sotto di \hat{P}_2 , cioè scegliamo $\bar{y}_2 \ll \hat{y}_2$, e consideriamo la traiettoria $(\hat{x}(t), \hat{y}(t); (\beta, \bar{y}_2))$, che ora verifica la condizione desiderata, e la seguiamo a ritroso fino alla prima intersezione con la retta $x = \alpha$: tale punto sarà il nuovo P_0 . Dunque vale ancora 3.7 che, ponendo $\hat{y}_3 = \hat{y}(\beta)$, diventa $|\hat{y}_3| < |\hat{y}_2|$. Usando ancora una volta il criterio di confronto otteniamo che la traiettoria interseca la retta $x = \alpha$ in un nuovo punto (α, \hat{y}_4) e per la simmetria dei cicli rispetto all'asse x risulta $\hat{y}_4 < |\hat{y}_3|$. Infine abbiamo $\hat{y}_4 < y_0$, ovvero la traiettoria $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ è limitata. Possiamo a questo punto applicare il teorema di Poincaré-Bendixon, con cui risulta provata l'esistenza di almeno un ciclo limite stabile. In figura 3.12 è rappresentata la costruzione di una traiettoria limitata.

La dimostrazione è basata su ineccepibili considerazioni di carattere qualitativo e può dirsi conclusa; tuttavia vogliamo arricchirla con il calcolo delle costanti che durante il suo svolgimento rivestono un ruolo significativo.

Grazie all'ipotesi **3**, possiamo scegliere $A > 0$ tale che

$$-\int_{\alpha}^{\beta} f(s) ds + \frac{2M}{A}(\beta - \alpha) < 0$$

con $M = \max \{|g(x)|, \alpha \leq x \leq \beta\}$.

Sia ora $B = \max \{|f(x)|, \alpha \leq x \leq \beta\}$ e sia

$$K > A + (\beta - \alpha) \left[B + \frac{M}{A} \right].$$

Poiché, come abbiamo già detto, la funzione $\psi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$ è costante sulle traiettorie dell'equazione di Duffing, tra queste possiamo scegliere una traiettoria Γ_0 tale che $|y| > K$ se $(x, y) \in \Gamma_0$ e $\alpha \leq x \leq \beta$. Siano come nella parte precedente (α, y_0) , (β, y_1) , (β, y_2) e (α, y_3) punti di Γ_0 .

Sia $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ la traiettoria dell'equazione di Liénard che parte da (α, y_0) . Facciamo vedere che $\hat{y}(t) \geq A$ per $\alpha \leq \hat{x} \leq \beta$.

Anzitutto osserviamo che, per quanto già detto, esiste un primo t_0 tale che $\hat{x}(t_0) = \beta$.

Allora, considerato l'andamento di campo, per $0 < t < t_0$, mentre $\alpha \leq \hat{x}(t) \leq \beta$, $\hat{y}(x) > 0$. Dunque, detto $m = \min \{\hat{y}(t), \alpha \leq x \leq \beta\}$, si ha $0 < m \leq \hat{y}(s)$, $0 < s \leq t$.

Per la 3.5, si ha per $0 < t < t_0$

$$\hat{y}(t) - \hat{y}(\alpha) = \hat{y}(\hat{x}(t)) - y_0 = -\int_{\alpha}^{\hat{x}} f(s) ds - \int_{\alpha}^{\hat{x}} \frac{g(s)}{\hat{y}(s)} ds.$$

In particolare

$$y_0 - m \leq \int_{\alpha}^{\hat{x}} |f(s)| ds + \frac{1}{m} \int_{\alpha}^{\hat{x}} |g(s)| ds \leq (\beta - \alpha) \left(B + \frac{M}{m} \right).$$

Da $y_0 > K$ segue $A + (\beta - \alpha) \frac{M}{A} - m < (\beta - \alpha) \frac{M}{m}$. Inoltre da $m > 0$ segue

$$m^2 - \left[A + (\beta - \alpha) \frac{M}{A} \right] m + (\beta - \alpha) M > 0,$$

che è una disequazione di secondo grado in m . Si ha

$$\Delta = \left[A - (\beta - \alpha) \frac{M}{A} \right]^2 \geq 0.$$

Data la scelta di A , possiamo sempre supporre che sia $A > (\beta - \alpha) \frac{M}{A}$, allora $\Delta > 0$ ed esistono due soluzioni reali e distinte dell'equazione, date da $m = \frac{1}{2} \left\{ A + (\beta - \alpha) \frac{M}{A} \pm \left[A - (\beta - \alpha) \frac{M}{A} \right] \right\}$. Detta m_1 la più piccola e m_2 la più grande, le soluzioni della disequazione sono date da $m < m_1$

e $m > m_2$. Si ha $m_1 = (\beta - \alpha) \frac{M}{A} < A$ e $m_2 = A$. Tra i due insiemi di soluzioni $m < m_1$ e $m > m_2$, la soluzione al problema geometrico che ci siamo posti è contenuta nel secondo poiché per definizione m è il minimo di una funzione continua che, tra gli altri, assume valori superiori a K e quindi ad A . Infine si ha $\hat{y}(t) \geq A$ per $\alpha \leq \hat{x} \leq \beta$.

Per $t = t_0$ si ha

$$\hat{y}(t_0) - y_0 = - \int_{\alpha}^{\beta} f(s) ds - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{g(s)}{\hat{y}(s)} ds \leq - \int_{\alpha}^{\beta} f(s) ds + \frac{M}{A} (\beta - \alpha).$$

D'altra parte poiché Γ_0 è un ciclo dell'equazione di Duffing segue che

$$y_1 - y_0 = - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{g(s)}{y(s)} ds \geq \frac{M}{A} (\beta - \alpha).$$

Pertanto

$$\hat{y}(t_0) - y_1 \leq - \int_{\alpha}^{\beta} f(s) ds + \frac{2M}{A} (\beta - \alpha)$$

e dalla nostra scelta di A segue

$$\hat{y}(t_0) < y_1.$$

Ma le traiettorie dell'equazione di Liénard sono percorse in senso orario, il sistema ad essa equivalente non contiene punti stazionari (x, y) con $x \geq \beta$ e le stesse traiettorie entrano nei cicli dell'equazione di Duffing quando $x \geq \beta$. Così $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ interseca nuovamente $x = \beta$ nell'istante $t_1 > t_0$ e con $0 > \hat{y}(t_1) > y_2$.

Ora sia $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ la traiettoria dell'equazione di Liénard che comincia da (β, y_2) . Per gli stessi ragionamenti fatti per analizzare $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ segue che $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ interseca $x = \alpha$ per la prima volta quando $y > y_3$ e per la seconda volta quando $0 < y < y_0$.

Per l'unicità delle soluzioni al problema di Cauchy associato al sistema 3.3 segue che $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ è limitata.

3.5 Intersezione con l'isoclina

Passiamo ora a presentare un altro risultato di notevole importanza. Si tratta di condizioni necessarie e sufficienti all'intersezione delle traiettorie con l'isoclina verticale nel piano di Liénard. Tali condizioni risulteranno strettamente connesse con l'esistenza di soluzioni periodiche, tanto nel caso autonomo, quanto addirittura nel caso forzato se affrontato con

metodi classici (costruzione di una zona invariante per l'applicazione del teorema di Brouwer).

Prima di proseguire il nostro studio nel piano di Liénard, osserviamo che, nella corrispondenza con il piano delle fasi, l'isoclina verticale riveste il ruolo dell'asse x . Appare ovvio che l'intersezione con tale asse sia un requisito indispensabile per la periodicità di una soluzione. Tuttavia il passaggio al piano di Liénard è conveniente per il fatto che le condizioni necessarie e sufficienti (che ovviamente possiamo tradurre nel piano delle fasi) presentano qui una forma più semplice. Una volta in possesso di tali condizioni, definiremo due proprietà che astraggono le situazioni contemplate nei teoremi 3.1 e 3.2 e, successivamente, ora negando una condizione, ora ipotizzando l'altra, avanti o indietro nel tempo, riformuleremo tali proprietà ottenendo altri due teoremi di esistenza di soluzioni periodiche, che, a loro volta, si rivelano del tutto generali nel senso preannunciato nell'introduzione.

Dato un punto P , possiamo considerare le due semitraiettorie $\gamma^+(P)$ e $\gamma^-(P)$ del sistema 2.2, che passano per quel punto. Poniamo

$$F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi$$

e

$$G(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi .$$

Denotiamo con α la curva $y = F(x)$, cioè l'isoclina verticale. Riguardo alla questione che intendiamo affrontare, è conveniente analizzare il problema dell'intersezione con α separatamente per ciascuna semitraiettoria. Da una breve analisi del ritratto di fase, osserviamo che per l'intersezione di $\gamma^+(P)$ è sufficiente considerare i casi

$$x_0 \geq 0, \quad y_0 > F(x_0) \tag{3.8}$$

e

$$x_0 \leq 0, \quad y_0 < F(x_0), \tag{3.9}$$

mentre per l'intersezione di $\gamma^-(P)$ ci possiamo limitare alle situazioni

$$x_0 \geq 0, \quad y_0 < F(x_0) \tag{3.10}$$

e

$$x_0 \leq 0, \quad y_0 > F(x_0). \tag{3.11}$$

Quando F è limitata inferiormente per x positivo e superiormente per x negativo abbiamo il primo risultato [26].

Teorema 3.3. *Dato il sistema 2.2 con f continua, g localmente lipschitziana e $xg(x) > 0$ per $x \neq 0$, supponiamo che esista una costante $c > 0$ tale che*

$$\begin{aligned} F(x) &> -c > -\infty && \text{se } x > 0 \\ F(x) &< c < +\infty && \text{se } x < 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Per ogni punto $P(x_0, y_0)$ che verifica 3.8, le semitraiettorie $\gamma^+(P)$ intersecano α in $(x, F(x))$ con $x > x_0$, se e solo se

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} [G(x) + F(x)] = +\infty.$$

Per ogni punto $P(x_0, y_0)$ che verifica 3.9, le semitraiettorie $\gamma^+(P)$ intersecano α in $(x, F(x))$ con $x < x_0$, se e solo se

$$\limsup_{x \rightarrow -\infty} [G(x) - F(x)] = +\infty.$$

Questo risultato può essere migliorato [32], estendendolo al caso in cui F non è limitata inferiormente per x positivo o superiormente per x negativo. A tal fine, è utile introdurre alcune notazioni. Data F siano

$$F_+(x) = \max\{0, F(x)\}$$

$$F_-(x) = \max\{0, -F(x)\},$$

così che $F(x)$ può essere scritta come

$$F(x) = F_+(x) - F_-(x).$$

Inoltre siano

$$\Gamma_+(x) = \int_0^x (1 + F_+(\xi))^{-1} g(\xi) d\xi$$

e

$$\Gamma_-(x) = \int_0^x (1 + F_-(\xi))^{-1} g(\xi) d\xi$$

Possiamo così enunciare il successivo risultato.

Teorema 3.4. *Consideriamo il sistema 2.2 con f continua, g localmente lipschitziana e $xg(x) > 0$ per $x \neq 0$. Supponiamo che sia*

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} F(x) > -\infty.$$

Allora per ogni punto $P(x_0, y_0)$ che verifica 3.8, le semitraiettorie $\gamma^+(P)$ intersecano α in $(x, F(x))$ con $x > x_0$, se e solo se

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} [\Gamma_-(x) + F(x)] = +\infty. \quad (3.13)$$

Supponiamo che sia

$$\liminf_{x \rightarrow -\infty} F(x) < +\infty,$$

allora per ogni punto $P(x_0, y_0)$ che verifica 3.9, le semitraiettorie $\gamma^+(P)$ intersecano α in $(x, F(x))$ con $x < x_0$, se e solo se

$$\limsup_{x \rightarrow -\infty} [\Gamma_+(x) - F(x)] = +\infty. \quad (3.14)$$

Osservazione. Quando $F(x)$ è limitata inferiormente per x positivo o superiormente per x negativo si vede che

$$\int_0^{+\infty} (1 + F_-(x))^{-1} g(x) dx = +\infty \quad \text{se e solo se} \quad \int_0^{+\infty} g(x) dx = +\infty,$$

ovvero

$$\int_0^{-\infty} (1 + F_+(x))^{-1} g(x) dx = +\infty \quad \text{se e solo se} \quad \int_0^{-\infty} g(x) dx = +\infty.$$

Pertanto le condizioni 3.13 e 3.14 prendono rispettivamente la forma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sup [G(x) + F(x)] = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sup [G(x) - F(x)] = +\infty,$$

cioè si ottiene il teorema 1.3 come caso particolare del teorema 1.4.

Rimane da analizzare il caso in cui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty,$$

ovvero

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = +\infty.$$

In questo caso non si può dare una condizione allo stesso tempo necessaria e sufficiente all'intersezione con l'isocline, ma, separatamente, una condizione necessaria e una condizione sufficiente. A questo scopo assolvono i due teoremi che seguono.

Teorema 3.5. *Dato il sistema 2.2, con le consuete ipotesi sulla f e sulla g , se per ogni $P(x_0, y_0)$ che verifica 3.8, $\gamma^+(P)$ interseca α , allora*

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} [4\Gamma_-(x) + F(x)] = +\infty.$$

Se per ogni $P(x_0, y_0)$ che verifica 3.9, $\gamma^+(P)$ interseca α , allora

$$\limsup_{x \rightarrow -\infty} [4\Gamma_+(x) - F(x)] = +\infty.$$

Teorema 3.6. *Dato il sistema 2.2 con le consuete ipotesi sulla f e sulla g , se esiste una costante $0 < a < 4$ tale che*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [a\Gamma_-(x) + F(x)] = +\infty,$$

allora per ogni $P(x_0, y_0)$ che verifica 3.8, $\gamma^+(P)$ interseca α in $(x, F(x))$ con $x > x_0$. Se esiste una costante $0 < a < 4$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [a\Gamma_+(x) - F(x)] = +\infty,$$

allora per ogni $P(x_0, y_0)$ che verifica 3.9, $\gamma^+(P)$ interseca α in $(x, F(x))$ con $x < x_0$.

Riguardo all'intersezione con l'isoclina di $\gamma^-(P)$, abbiamo i seguenti teoremi [26], [32].

Teorema 3.7. *Dato il sistema 2.2 con le consuete ipotesi sulla f e sulla g , assumiamo le condizioni 3.12, allora per ogni $P(x_0, y_0)$ che verifica 3.10, $\gamma^-(P)$ interseca α in $(x, F(x))$ con $x > x_0$, se e solo se*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sup [G(x) - F(x)] = +\infty.$$

Per ogni punto $P(x_0, y_0)$ che verifica 3.11, $\gamma^-(P)$ interseca α in $(x, F(x))$ con $x < x_0$, se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sup [G(x) + F(x)] = +\infty.$$

Teorema 3.8. *Dato il sistema 2.2 con le consuete ipotesi sulla f e sulla g , sia*

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} F(x) < +\infty.$$

Allora per ogni punto $P(x_0, y_0)$ che verifica 3.10, $\gamma^-(P)$ interseca α in $(x, F(x))$ con $x > x_0$, se e solo se

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} [\Gamma_+(x) - F(x)] = +\infty.$$

Supponiamo che sia

$$\limsup_{x \rightarrow -\infty} F(x) > -\infty,$$

allora per ogni punto $P(x_0, y_0)$ che verifica 3.11, $\gamma^-(P)$ interseca α in $(x, F(x))$ con $x < x_0$, se e solo se

$$\limsup_{x \rightarrow -\infty} [\Gamma_-(x) + F(x)] = +\infty.$$

Teorema 3.9. Dato il sistema 2.2 con le consuete ipotesi sulla f e sulla g , se per ogni $P(x_0, y_0)$ che verifica 3.10, $\gamma^-(P)$ interseca α in $(x, F(x))$ con $x > x_0$, allora

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} [4\Gamma_+(x) - F(x)] = +\infty.$$

Se per ogni $P(x_0, y_0)$ che verifica 3.11, $\gamma^-(P)$ interseca α in $(x, F(x))$ con $x < x_0$, allora

$$\limsup_{x \rightarrow -\infty} [4\Gamma_-(x) + F(x)] = +\infty.$$

Teorema 3.10. Dato il sistema 2.2 con le consuete ipotesi sulla f e sulla g , se esiste una costante $0 < a < 4$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [a\Gamma_+(x) - F(x)] = +\infty,$$

allora per ogni $P(x_0, y_0)$ che verifica 3.10, $\gamma^-(P)$ interseca α in $(x, F(x))$ con $x > x_0$. Se esiste una costante $0 < a < 4$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [a\Gamma_-(x) + F(x)] = +\infty,$$

allora per ogni $P(x_0, y_0)$ che verifica 3.11, $\gamma^-(P)$ interseca α in $(x, F(x))$ con $x < x_0$.

3.6 Le proprietà (H) e (K)

Introduciamo ora le proprietà (H) e (K) [32] che, come preannunciato, ci serviranno per generalizzare i teoremi 3.1 e 3.2 .

Diremo che *il sistema 2.2 ha la proprietà (H) se possiede una traiettoria chiusa che circonda l'origine e contiene al suo interno tutti i punti critici del sistema ed è tale che ogni traiettoria al di fuori di essa è chiusa.*

Per riformulare la proprietà (H) servendoci delle condizioni necessarie e sufficienti è necessario il seguente

Lemma 3.2. *Supponiamo che f e g siano funzioni dispari (in questo caso le traiettorie del sistema 2.2 sono simmetriche rispetto all'asse y , inoltre con la consueta ipotesi sulla g , l'unico punto critico è l'origine). Supponiamo inoltre che esista $\bar{y} > 0$, tale che per ogni $P(0, y_0)$*

$$\gamma^+(P) \text{ interseca } \alpha \text{ per } y_0 \geq \bar{y}$$

e

$$\gamma^-(P) \text{ interseca } \alpha \text{ per } y_0 \leq -\bar{y}.$$

Allora il sistema 2.2 gode della proprietà (H).

Dim. Data la simmetria delle traiettorie possiamo limitarci a seguire una traiettoria nel semipiano $x > 0$. Sia $P(0, y_0)$ un punto con $y_0 \geq \bar{y}$. Per ipotesi $\gamma^+(P)$ interseca α . Sia ora $y_1 > y_0$ e Q il punto di coordinate $(0, -y_1)$. Ancora per ipotesi $\gamma^-(Q)$ interseca α . Nelle ipotesi di regolarità, che sono sottintese, due traiettorie non si possono incontrare, allora $\gamma^+(P)$ incontra l'asse y . Sfruttando la simmetria otteniamo immediatamente che la traiettoria per P è chiusa (vedi figura 3.13).

A questo punto, abbinando in tutti i modi possibili una delle condizioni sufficienti all'intersezione con l'isoclina di $\gamma^+(P)$ con le coordinate di P soddisfacenti a 3.8 con una delle condizioni sufficienti all'intersezione con l'isoclina di $\gamma^-(P)$ con le coordinate di P soddisfacenti a 3.10, otteniamo vari modi di produrre la proprietà (H).

Arriviamo così alla generalizzazione del teorema 3.2.

Teorema 3.11. *Consideriamo l'equazione*

$$\ddot{x} + (f(x) + p(x))\dot{x} + g(x) = 0 \quad (3.15)$$

con $f, g, p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue e g localmente lipschitziana con $xg(x) > 0$ per $x \neq 0$. Se il sistema 2.2 verifica la proprietà (H) e

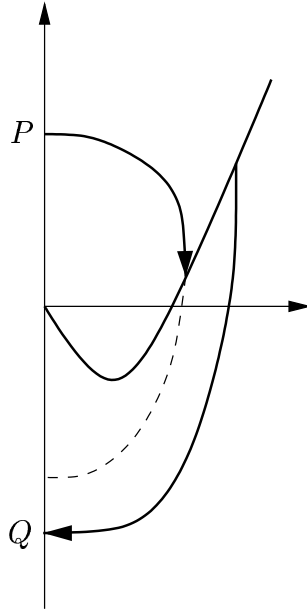


Figura 3.13: la proprietà H

1. l'origine è una sorgente per 3.15,
2. esiste $\delta > 0$ tale che $p(x) > 0$ per $|x| \geq \delta$ e, per qualche $\delta_1 > \delta$,

$$\int_{-\delta_1}^{\delta_1} p(x) dx > 0,$$

allora l'equazione 3.15 ha almeno una soluzione periodica stabile.

Definiamo la proprietà (K) . Diremo che il sistema 2.2 gode della proprietà (K) se esiste $\bar{y} \neq 0$ tale che $\gamma^-(0, \bar{y})$ non interseca α e $\gamma^+(0, \bar{y})$ è oscillatoria.

La proprietà (K) si può ottenere dalle condizioni necessarie e sufficienti all'intersezione con l'isocline, negando la condizione necessaria all'intersezione di $\gamma^-(P)$ con le coordinate di P soddisfacenti a 3.10, ovvero a 3.11 e assicurando la condizione sufficiente all'intersezione di $\gamma^+(P)$ con le coordinate di P soddisfacenti tanto a 3.9 che a 3.8 (vedi figura fig14).

Come generalizzazione del teorema 3.1 abbiamo il

Teorema 3.12. Consideriamo il sistema 2.2 con $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, g localmente lipschitziana con $xg(x) > 0$ per $x \neq 0$. Se

1. l'origine è una sorgente,

2. vale la proprietà (K) ,

allora esiste almeno un ciclo limite stabile di 2.2, cioè una soluzione periodica stabile dell'equazione 1.1.

Usando nel modo descritto sopra le condizioni necessarie e sufficienti, abbiamo vari corollari, corrispondenti ai vari modi di produrre la proprietà (K) contemplati. Ci limitiamo a riportarne uno.

Corollario 3.1. *Consideriamo il sistema 2.2 con le consuete ipotesi di regolarità su f e g , e $xg(x) > 0$ per $x \neq 0$. Supponiamo*

1. $xF(x) < 0$ per $0 < |x| < \varepsilon$,
2. $4\Gamma_+(x) - F(x) \leq K$, per ogni $x \geq 0$,
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [a\Gamma_+(x) - F(x)] = +\infty$, con $0 < a < 4$,
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$.

Allora il sistema 2.2 ha almeno un ciclo limite.

Capitolo 4

Caso forzato

4.1 Sistemi autonomi associati

Consideriamo l'equazione di Liénard forzata

$$\ddot{x} + f(x) \dot{x} + g(x) = e(t) = e(t+T) \quad (4.1)$$

con termine forzante $e(t)$ periodico di periodo T . Siamo interessati alla ricerca di soluzioni periodiche in caso di risonanza, cioè con lo stesso periodo T del termine forzante.

Possiamo ancora scrivere questa equazione differenziale come sistema (equivalente) nel piano delle fasi

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x) + e(t), \end{cases} \quad (4.2)$$

ovvero nel piano di Liénard

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) + E(t) \\ \dot{y} = -\tilde{g}(x), \end{cases} \quad (4.3)$$

con $\tilde{g}(x) = g(x) - \bar{e}$ e $E(t) = \int_0^t (e(s) - \bar{e}) ds$, dove $\bar{e} = (1/T) \int_0^T e(t) dt$, ma questa volta il passaggio a uno di tali piani non presenta più i vantaggi del caso autonomo perché, anche in caso di regolarità, le orbite si possono incontrare e una stessa orbita può passare più volte dallo stesso punto, senza per questo essere immagine di una soluzione periodica. Tuttavia il piano delle fasi (o di Liénard) e i risultati ottenuti nel caso autonomo ci possono essere utili, come abbiamo già accennato nell'introduzione.

Per cominciare, lavoreremo nel piano delle fasi. Supponiamo che valgano le ipotesi che garantiscono esistenza e unicità delle soluzioni ai problemi di Cauchy associati; quindi, oltre alle consuete ipotesi sulla f e sulla g supponiamo $e : t \rightarrow e(t)$ continua. Essendo anche periodica, esistono e ed E tali che $e \leq e(t) \leq E$. Allora consideriamo i due sistemi

autonomi che si ottengono da 4.2 sostituendo $e(t)$, rispettivamente, con i suoi valori minimo e massimo, detti *sistemi autonomi associati* dati da

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x) + e \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x) + E. \end{cases} \quad (4.5)$$

Andiamo ad analizzare le pendenze dei tre sistemi, siano esse rispettivamente y' , y_e e y_E , al fine di introdurre un nuovo criterio di confronto, che ci servirà per costruire la *zona invariante*.

Si ha

$$y' = -f(x) - \frac{g(x)}{y} + \frac{e(t)}{y},$$

$$y'_e = -f(x) - \frac{g(x)}{y} + \frac{e}{y} \quad \text{e} \quad y'_E = -f(x) - \frac{g(x)}{y} + \frac{E}{y}$$

pertanto nel semipiano $y > 0$ si ha $y' \leq y'_E$ e nel semipiano $y < 0$ si ha $y' \leq y'_e$. Se riusciamo a costruire un insieme che, nel semipiano $y > 0$, è delimitato da una traiettoria limitata del sistema con E e, nel semipiano $y < 0$, da una traiettoria limitata del sistema con e , quale che sia l'andamento di una traiettoria di 4.2, una volta entrata in questo insieme, essa non può uscirne. Questo insieme costituisce la cosiddetta *zona invariante*, la cui esistenza può essere sfruttata a nostro vantaggio da un teorema di punto fisso, quale è il teorema di Brouwer.

In assenza di perturbazione, avremmo il sistema autonomo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x), \end{cases} \quad (4.6)$$

equivalente a una comune equazione di Liénard. Se tale sistema gode della proprietà K o è una perturbazione di un sistema di tipo H , possiamo affermare che tale caratteristica è conservata anche dai sistemi 4.4 e 4.5, in quanto la presenza di un termine costante e o E non incide sul comportamento all'infinito delle soluzioni. Supponiamo dapprima che 4.6 sia una perturbazione "opportuna" (nel senso del teorema 3.2) di un sistema di tipo H . Allora, per il lemma di confronto, tutte le traiettorie dei sistemi 4.4 e 4.5 sono uniformemente limitate. Se le traiettorie y_e e y_E , rispettivamente del sistema 4.4, ovvero del sistema 4.5, hanno due intersezioni con l'asse x in comune, possiamo costruire uno *pseudociclo* nel modo indicato in figura 4.1 (a). Ora, un risultato del genere risulta assai improbabile, al contrario è possibile considerare una porzione di y_E compresa tra un'intersezione con il semiasse $x < 0$ e l'intersezione con

il semiasse $x > 0$ immediatamente successiva e da qui ripartire con una traiettoria γ_e e seguirla fino alla successiva intersezione con il semiasse $x < 0$. In questo caso lo pseudociclo viene completato con un segmento dell'asse x . Si possono presentare più situazioni (si vedano le figure 4.1 (b1), 4.1 (b2) e 4.1 (c)), ma in un caso non si tratta di una zona invariante. Per evitare il presentarsi della situazione di figura 4.1 (c) è necessario fare ipotesi sulla f [33]. Supponiamo ora che il sistema 4.6 goda della proprietà K in maniera forte, nel senso che esiste \bar{y} tale che $\forall y \geq \bar{y}$, $\gamma^-(0, y)$ non interseca l'asse x e $\gamma^+(0, y)$ è oscillatoria ed altrettanto valga per i sistemi 4.4 e 4.5, le cui traiettorie verranno indicate rispettivamente con γ_e e γ_E . Allora esiste \bar{x} tale che $\gamma_E^-(\bar{x}, 0)$ non interseca l'asse x prima di $(\bar{x}, 0)$ e $\gamma_e^+(\bar{x}, 0)$ è oscillatoria. Se $(\tilde{x}, 0)$ è la successiva intersezione di $\gamma_e^+(\bar{x}, 0)$ con l'asse x , lo pseudociclo è delimitato dalla porzione di $\gamma_E^-(\bar{x}, 0)$ compresa tra i punti di ascissa \tilde{x} e \bar{x} , dalla porzione di $\gamma_e^+(\bar{x}, 0)$ compresa tra i punti di ascissa \bar{x} e \tilde{x} e, infine, dal segmento verticale che unisce il punto di $\gamma_E^-(\bar{x}, 0)$ di ascissa \tilde{x} con $(\tilde{x}, 0)$, che può essere attraversato solo da traiettorie in ingresso. Con questa costruzione si possono ottenere due pseudocicli diversi, secondo che γ^- provenga dal secondo o dal quarto quadrante (vedi figure 4.1 (d1) e 4.1 (d2)).

4.2 Il metodo della trappola

L'esistenza della zona invariante viene sfruttata dal teorema di Brouwer, secondo cui se $f : A \rightarrow A$ è una funzione definita e continua in una regione $A \subset \mathbb{R}^2$ sufficientemente regolare (omeomorfa a un cerchio), allora esiste almeno un punto fisso, cioè un punto P tale che $f(P) = P$. Si tratta ora di definire f in maniera opportuna. Ciò si ottiene con l'*applicazione di Poincaré* o *T-map*, ϕ , che è una funzione definita nel piano delle fasi che associa ad ogni punto P la posizione assunta dopo il tempo T dalla traiettoria passante per P all'istante iniziale. Servendoci di una notazione già usata in precedenza, abbiamo $\phi(P) = (x(T), y(T); P)$. Definendo l'applicazione di Poincaré nell'insieme invariante, essa risulta una funzione di un insieme, dalle caratteristiche di regolarità richieste, in sé; resta da accertarne la continuità. Quest'ultima deriva dal teorema di continuità rispetto ai dati iniziali, secondo cui le soluzioni che all'istante iniziale passano per due punti "sufficientemente" vicini, dopo un tempo finito si trovano ancora in punti "opportunamente" vicini.

Una volta accertato che sono verificate tutte le condizioni del teorema

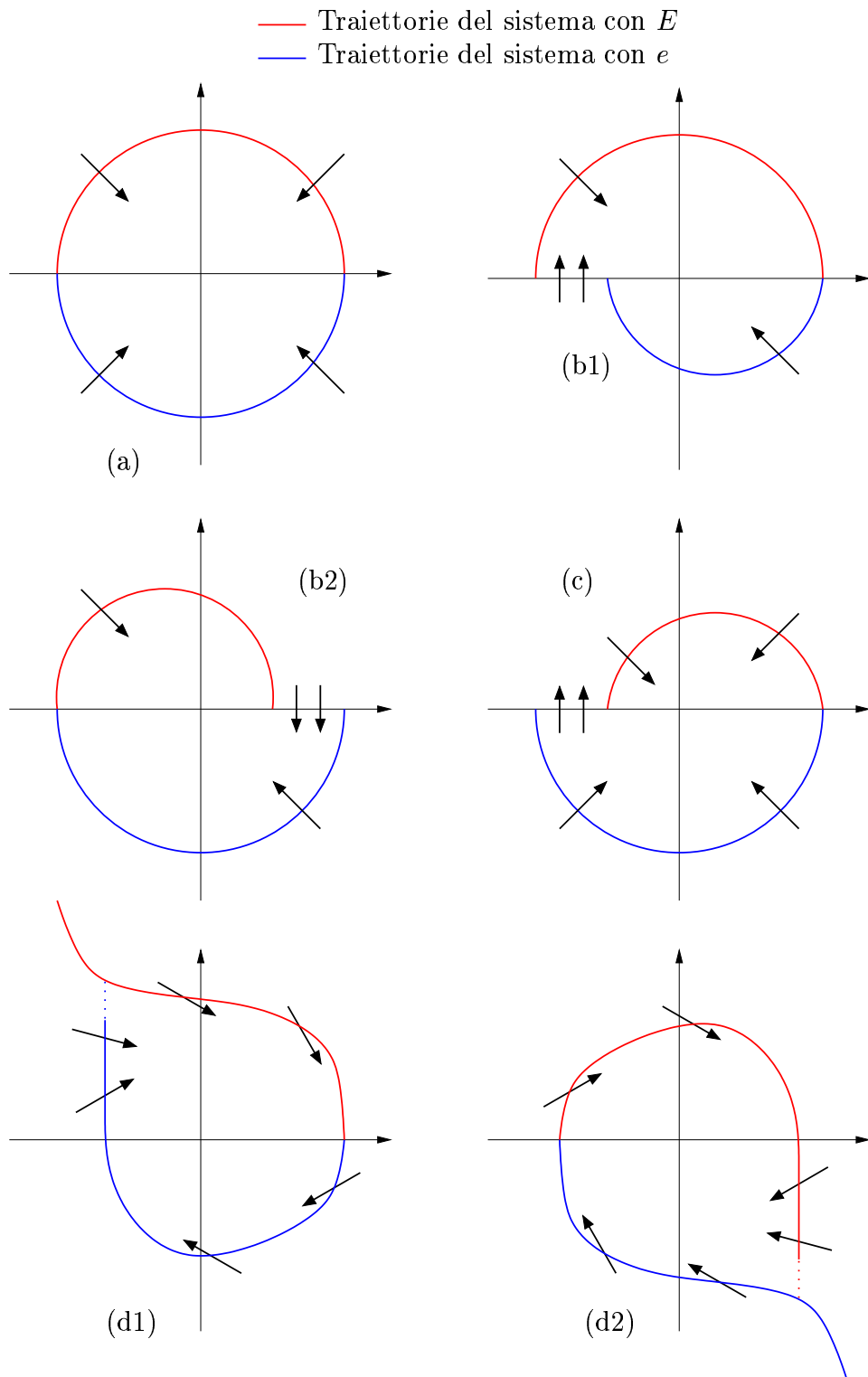


Figura 4.1: *costruzione della zona invariante per il teorema di Brouwer*

di Brouwer, grazie ad esso possiamo affermare l'esistenza di un punto fisso. La soluzione che all'istante iniziale passa per quel punto è una soluzione periodica di periodo T .

Abbiamo così descritto il "metodo della trappola", che, riassumendo, consiste nell'applicazione del teorema di Brouwer alla mappa di Poincaré su una opportuna zona invariante.

Osservazione. In generale la definizione della mappa di Poincaré pone un problema, che è quello della prolungabilità delle soluzioni. Come si sa, ogni soluzione $z(t)$ di un'equazione differenziale è definita per il tempo $t \in]\alpha, \omega[\subseteq \mathbb{R}$. Quando $]\alpha, \omega[\subsetneq \mathbb{R}$, non è detto che si riesca a seguire la soluzione per il tempo T , ciò è possibile soltanto se $t_0 + T < \omega$. Si consideri, ad esempio, il seguente problema di Cauchy associato a un'equazione differenziale del primo ordine

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 \\ x(0) &= 1.\end{aligned}$$

La soluzione è data da

$$x = x(t) = x(t; 1) = \frac{1}{1-t}$$

definita per $t < 1$. Il problema di determinare $x(t)$ per $t \geq 1$ è un problema senza soluzione.

Tuttavia quando viene individuata una zona invariante, per le soluzioni che all'istante iniziale passano per un punto di essa, il problema della prolungabilità non si pone. Infatti, dal momento in cui si stabilisce che $z(t) \in A$ per $t > t_0$, è implicita l'esistenza di tale soluzione in qualsiasi istante di tempo.

4.3 Due criteri di esistenza

Dal punto di vista teorico il problema dell'esistenza di soluzioni T -periodiche per l'equazione di Liénard forzata è risolto. La difficoltà connessa con il metodo della trappola sta nel costruire la zona invariante. Come abbiamo già accennato, in presenza di sistemi autonomi associati che risultano perturbazioni opportune di un sistema di tipo H , è necessario che la perturbazione incida pesantemente quando le soluzioni tendono ad assumere valori "grandi". Con una dimostrazione piuttosto elaborata, che omettiamo, si riesce a provare, nel piano di Liénard dove sono già note le condizioni sufficienti a garantire la proprietà H , il seguente risultato [33].

Teorema 4.1. *Assumiamo le condizioni di regolarità: cioè siano f , g ed e funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue; g localmente lipschitziana ed e T -periodica. Inoltre valga la condizione di segno sulla g*

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x) \operatorname{sgn} x = +\infty \quad (4.7)$$

e il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \quad (4.8)$$

godà della proprietà H . Allora l'equazione

$$\ddot{x} + (f(x) + p(x)) \dot{x} + g(x) = e(t),$$

con $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, ha una soluzione T -periodica a condizione che esistano $\varepsilon, \delta > 0$ tali che

$$p(x) \geq \varepsilon \text{ per } |x| \geq \delta.$$

Quando, invece, il sistema 4.8 verifica la proprietà K , la costruzione della zona invariante risulta più semplice. Lavorando ancora nel piano di Liénard, abbiamo il seguente risultato [32].

Teorema 4.2. *Valgano le condizioni di regolarità su f , g ed e , inoltre, valga l'ipotesi di segno 4.7. Supponiamo che*

1. $4\Gamma_+(x) - F(x) \leq K$ per ogni $x \geq 0$ (K opportuno),
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [a\Gamma_+(x) - F(x)] = +\infty$, con $0 < a < 4$.

Allora l'equazione

$$\ddot{x} + f(x) \dot{x} + g(x) = e(t) = e(t + T)$$

ha almeno una soluzione T -periodica.

Dim. Prima di tutto notiamo che le proprietà **1.** e **2.** non cambiano se rimpiazziamo $F(x)$ con $F(x) - E_1$ o $F(x) - E_2$ e $g(x)$ con $\tilde{g}(x)$. Facciamo vedere che possiamo produrre una zona invariante omeomorfa a un cerchio.

La condizione 4.7 assicura che $\tilde{g}(x) x > 0$ per $|x|$ sufficientemente grande, ad esempio per $|x| \geq d$ con d opportuno. Nel piano di Liénard, per $|x| \geq d$ lavoreremo con il criterio di confronto, nel senso che confronteremo il sistema 4.3 con i due sistemi autonomi associati

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) + E_1 \\ \dot{y} = -\tilde{g}(x) \end{cases} \quad (4.9)$$

e

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) + E_2 \\ \dot{y} = -\tilde{g}(x) \end{cases}, \quad (4.10)$$

dove

$$E_1 = \min \{E(t) : t \in [0, T]\}, \quad E_2 = \max \{E(t) : t \in [0, T]\}.$$

Le traiettorie di questi tre sistemi verranno rispettivamente indicate con γ , γ_{E_1} e γ_{E_2} e lo slope con y' , y'_{E_1} e y'_{E_2} . In particolare, per motivi che vedremo più avanti, confronteremo il sistema 4.3 con il sistema 4.9 per $x < -d$ e con il sistema 4.10 per $x > d$.

L'ipotesi **1.** implica che esiste $\bar{y} < 0$ (si ha anche $\bar{y} < F(d) - E_2$) tale che per ogni $y \leq \bar{y}$, $\gamma_{E_2}^-(d, y)$ non interseca l'isoclina $y = F(x) - E_2$. Sia $P_1(d, y_1)$ un punto con questa proprietà; ciò significa che poiché P_1 si trova sotto la curva $y = F(x) - E_2$, allora la traiettoria di 4.10 per P_1 , indietro nel tempo, è tutta al di sotto di questa stessa curva. Su $\gamma_{E_2}^-(P_1)$ si ha $\tilde{g}(x) > 0$ e $y - F(x) + E(t) \leq y - F(x) + E_2 < 0$, da cui

$$y' < y'_{E_2}.$$

Consideriamo ora la striscia $|x| \leq d$. Qui $y' = -\tilde{g}(x) / [y - F(x) + E(t)]$ è una quantità limitata per $|y|$ grande, pertanto si può scegliere un segmento che unisce P_1 con un punto di ascissa $-d$, con una pendenza tale che ogni semitragittoria $\gamma^+(P)$ che parte da un suo punto P stia tutta al di sopra di esso. Sia $P_2(-d, y_2)$ il secondo estremo di tale segmento.

Per $x < -d$ si ha $\tilde{g}(x) < 0$; qui consideriamo $\gamma_{E_1}^+(P_2)$. Per l'ipotesi **2.** $\gamma_{E_1}^+(P_2)$ incontra l'isoclina $y = F(x) - E_1$ e, poiché l'origine è una sorgente, tale semitragittoria incontra anche l'asse y e necessariamente, prima di esso, la retta $x = -d$ in un punto, che chiameremo $P_3(-d, y_3)$. Suddividiamo il tratto di $\gamma_{E_1}^+(P_2)$ compreso tra le due consecutive intersezioni con la retta $x = -d$ in tre parti. Per $y < F(x) - E(t)$ si ha $y - F(x) + E_1 \leq y - F(x) + E(t) < 0$, pertanto

$$y' < y'_{E_1}.$$

Per $F(x) - E(t) \leq y \leq F(x) - E_1$ si ha

$$y'_{E_1} < 0 < y',$$

ma ciò implica comunque che le traiettorie del sistema 4.3 entrano nelle traiettorie di 4.10 e in particolare in $\gamma_{E_1}^+(P_2)$. Per $y > F(x) - E_1$ si ha $0 < y - F(x) + E_1 \leq y - F(x) + E(t)$, da cui ancora

$$y' < y'_{E_1}.$$

Torniamo a considerare la striscia $|x| \leq d$. Per gli stessi motivi di cui sopra, possiamo scegliere un segmento $\overrightarrow{P_3P_4}$ con il secondo estremo sulla retta $x = d$ con una pendenza tale che ogni semitraiettoria $\gamma^+(P)$ per ogni suo punto P stia al di sotto di esso.

Consideriamo $\gamma_{E_2}^+(P_4)$. Dall'ipotesi 4.7 segue che $G(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$. Inoltre dall'ipotesi **1.** discende che $F(x)$ è limitata inferiormente per $x \geq 0$. Allora vale anche $\lim_{x \rightarrow +\infty} [G(x) + F(x)] = +\infty$, condizione sufficiente a garantire l'intersezione di tale semitraiettoria con l'isoclina $y = F(x) - E_2$ e, per quanto dicevamo sopra, anche con la retta $x = d$. In analogia a quanto sopra, suddividiamo il tratto di $\gamma_{E_2}^+(P_4)$ compreso tra le due successive intersezioni con la retta $x = d$ in tre parti: (i) $y > F(x) - E_2$, (ii) $F(x) - E_2 < y \leq F(x) - E_2$ e (iii) $y \geq F(x) - E_2$, ottenendo separatamente per ciascuna di esse che le traiettorie del sistema 4.3 entrano in quelle di 4.10. Chiamato P_5 il punto di intersezione di $\gamma_{E_2}^+(P_4)$ con l'asse x e P_6 la proiezione di P_5 su $\gamma_{E_2}^-(P_1)$, la curva $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_1$, rappresentata in figura 4.2, racchiude la zona invariante cercata. A questo punto possiamo applicare il teorema di Brouwer per ottenere l'esistenza di una soluzione T -periodica.

Osservazione. Le ipotesi **1.** e **2.** caratterizzano il sistema autonomo associato a 4.3 come un sistema che gode della proprietà K , con l'esistenza di una traiettoria dalle caratteristiche proprietà, che nella fattispecie, nel piano delle fasi, proviene dal quarto quadrante. Scegliendo diversamente tali ipotesi tra le condizioni necessarie e sufficienti all'intersezione con l'isoclina, si può dare un teorema simile che nel suo campo di applicazione comprende la situazione simmetrica a quella appena presa in esame.

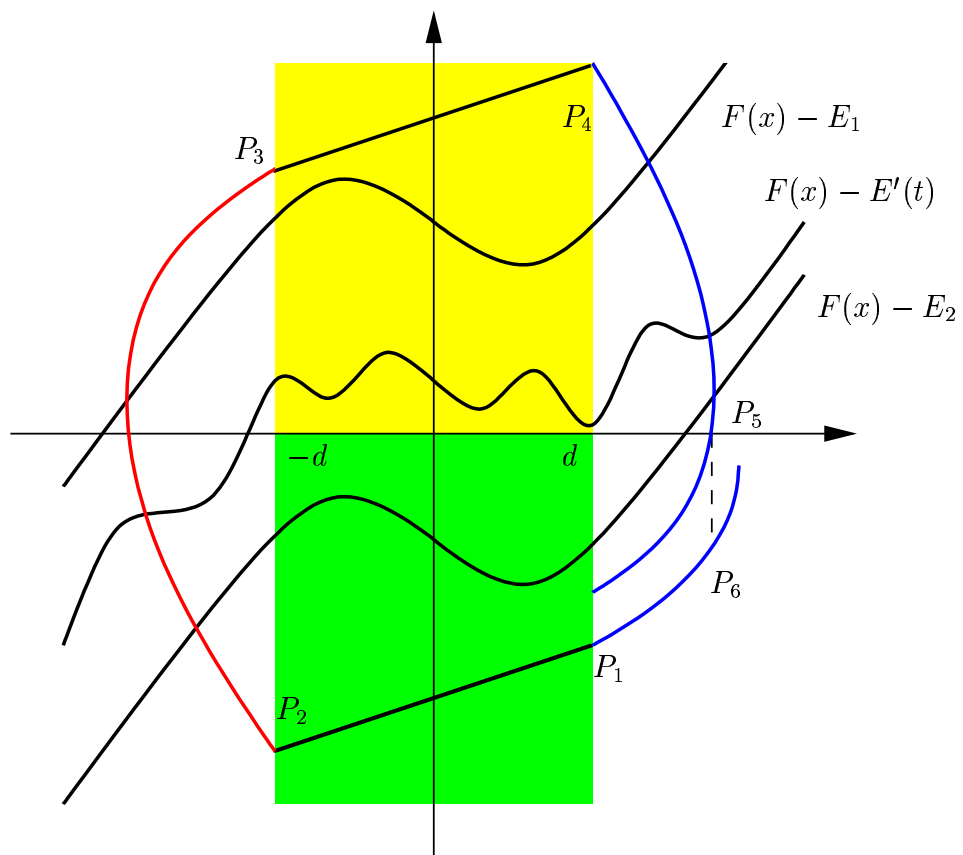


Figura 4.2: estensione all'equazione forzata del caso con proprietà K

Capitolo 5

Un'equazione polinomiale forzata

5.1 Un particolare sistema autonomo associato

5.1.1 Generalità

Come si è detto nell'introduzione, scopo di questa tesi è la ricerca di soluzioni T -periodiche di una particolare equazione di Liénard forzata del tipo 1.2, in cui sia $f(x)$ che $g(x)$ sono polinomi di grado dispari, cioè dell'**equazione polinomiale forzata**

$$\ddot{x} + p(x)\dot{x} + \gamma x = e(t) \quad (5.1)$$

ove $p(x)$ ha grado $n = 2k + 1$, k intero, e γ è una costante positiva. Facciamo un passo indietro e torniamo ai sistemi autonomi; consideriamo infatti il **sistema autonomo associato** al sistema 5.1, corrispondente alla scelta $\gamma = 1$, che è dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -p(x)y - x, \end{cases} \quad (5.2)$$

il cui studio vogliamo affrontare nel presente paragrafo [28].

In generale, e cioè quando il grado di $p(x)$ è un intero qualsiasi, questo sistema presenta ancora delle questioni non risolte. Una di esse, che è connessa al problema che ci poniamo, è quella relativa al 16° problema di Hilbert, che consiste nel trovare una limitazione per il numero di cicli limite che dipenda esclusivamente dal grado n di $p(x)$. Lo studio di questo problema non ha dato esiti certi, ma ha condotto semplicemente a una congettura, formulata dai matematici Lins, De Melo, Pugh [15] sulla base di esempi che la verificano, e dimostrata in seguito [3], [1] in alcuni casi particolari, ma non ancora in generale.

Congettura. *Se n è il grado di $p(x)$ e $n = 2k$, oppure $n = 2k + 1$, allora il sistema 5.2 ha al massimo k cicli limite.*

Se ora ci limitiamo a considerare il sistema 5.2 nel caso in cui $p(x)$ è un polinomio di grado dispari, osserviamo che lo studio in tal caso non può essere affrontato con gli strumenti esposti nel primo capitolo, in quanto viene a mancare una delle condizioni fondamentali, e cioè che $f(x)$ sia di segno costante per $|x|$ grande (abbiamo infatti alternanza di segno tra $f(x)$ e $f(-x)$ per x grande) e pertanto occorre individuare alcune particolarità del sistema in esame, che potremo sfruttare nel caso forzato.

5.1.2 Il ritratto di fase

Un caso particolare del sistema 5.2 con $p(x)$ polinomio di grado dispari, è quello in cui $p(x)$ è una funzione dispari, cioè somma di sole potenze dispari di x . In questo caso il ritratto di fase è simmetrico rispetto all'asse y . Infatti per $(-x, y)$, $x > 0$ dalla 5.2 otteniamo per (\dot{x}, \dot{y})

$$\begin{cases} \dot{x}(-x, y) = y = \dot{x}(x, y) \\ \dot{y}(-x, y) = p(x)y + x = -\dot{y}(x, y). \end{cases}$$

Tale relazione caratterizza una curva simmetrica a cui sia assegnato un verso di percorrenza. Data una traiettoria γ del sistema, la sua simmetrica rispetto all'asse y , $\tilde{\gamma}$, è ancora una traiettoria del sistema. Ma allora γ e $\tilde{\gamma}$ coincidono perché hanno in comune almeno un punto di ascissa nulla. Senza perdere in generalità, supponiamo che il coefficiente del termine di grado massimo, a_n , sia positivo. Infatti se fosse a_n negativo, potremmo ricondurci al caso opposto con un'inversione del senso del tempo.

Dallo studio nel piano delle fasi otteniamo le seguenti proprietà (vedi figura 5.1):

1. *L'origine è un centro.*
2. *Esiste una separatrice γ situata nel semipiano $y < 0$ che unisce i punti all'infinito dell'asse x , Q_2 e Q_1 , ed è unica.*
3. *Le traiettorie al di sopra di γ sono cicli mentre quelle al di sotto di γ sono aperte (e viceversa con γ situata nel semipiano $y > 0$ se a_n è negativo).*
4. *L'isoclina ha gli stessi punti all'infinito dell'asse x , cosa che può essere riassunta da $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x, H(x)) = Q_2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x, H(x)) = Q_1$.*

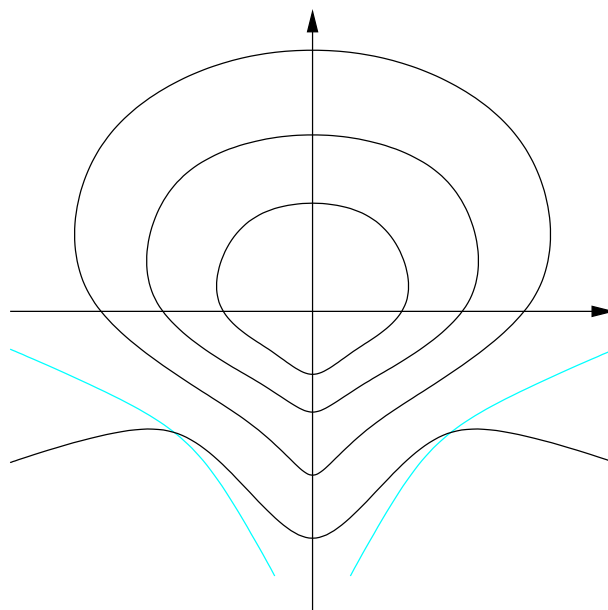


Figura 5.1: *andamento di campo del sistema simmetrico*

Osservazione. Per dare un nome ai punti all'infinito dell'asse x e per dimostrare l'unicità della separatrice nel piano delle fasi bisogna fare ricorso, per esempio, alla compattificazione di Poincaré, di cui in questo contesto diamo solo un'idea. Occorre sostanzialmente proiettare l'intero piano sulla sfera di raggio unitario; così facendo i punti all'infinito del piano vengono proiettati al finito, per l'esattezza sull'equatore della sfera, e i punti singolari all'infinito possono essere riguardati e classificati come i punti singolari al finito. I punti singolari corrispondenti ai punti all'infinito dell'asse y sono di difficile classificazione in quanto non rientrano nella casistica elementare; al contrario si ottiene un risultato molto interessante riguardo ai punti singolari corrispondenti ai punti all'infinito dell'asse x , e cioè che si tratta di selle: essi vengono indicati con Q_1 e Q_2 . Per una trattazione più precisa e completa rimandiamo a [15] oppure a [14].

Un **esempio** semplicissimo che si può fare di un sistema di tipo 5.2 che presenti il comportamento descritto è dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -axy - x . \end{cases}$$

L'isoclina $H(x)$ è la retta $y = -\frac{1}{a}$ e, mentre in generale $H(x)$ non è una traiettoria del sistema, in questo caso, eccezionalmente, coincide con la separatrice γ (vedi figura 5.2). Questa traiettoria del sistema è

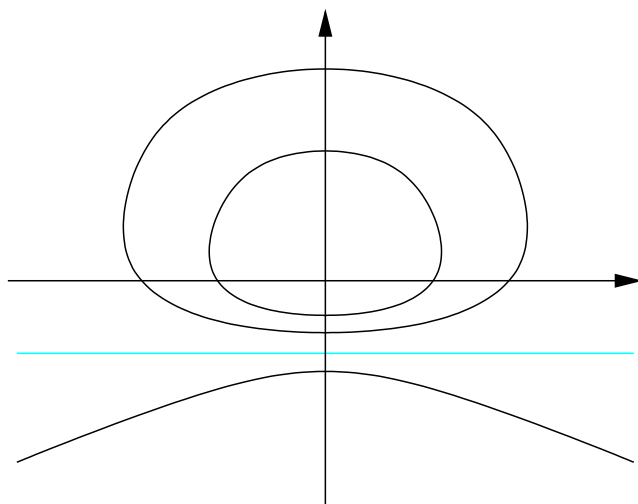


Figura 5.2: *esempio di sistema simmetrico* ($p(x) = ax$)

chiaramente algebrica; trattasi di una eventualità che si allinea perfettamente con un risultato di Odani [20] che ha studiato e risolto la questione dell'esistenza di soluzioni algebriche per il sistema 2.1.

Quando $p(x)$ non è una funzione dispari si viene a perdere la simmetria e, dal confronto degli slope tra il sistema 5.2 e il sistema dello stesso tipo che si ricava sostituendo a $p(x)$ la sua parte dispari, si ottiene che l'origine non è più un centro, ma una sorgente o un pozzo, secondo il segno del coefficiente del termine di grado pari più basso; inoltre la separatrice viene divisa in due parti dall'asse delle y , nel senso che esistono due semitraiettorie del sistema 5.2, diciamo $\Gamma^-(y_1)$ e $\Gamma^+(y_2)$, aventi ciascuna le caratteristiche di separatrice nel semipiano di appartenenza e che da ora in poi verranno anche indicate, rispettivamente, come separatrice di Q_2 , ovvero di Q_1 . La suddivisione della separatrice è il dato interessante che emerge da questa situazione, in quanto in alcune condizioni possono apparire cicli limite. Come si può osservare nella figura 5.3, per l'esistenza di cicli limite è necessario che sia $y_2 < y_1$.

5.1.3 Movimento dei cicli limite al variare di un parametro

La condizione appena individuata per l'esistenza di cicli limite è difficilmente verificabile nella pratica. Sul piano della teoria possiamo procedere in questo modo: dato $p(x)$ facciamo variare uno dei coefficienti dei termini di grado pari, consideriamo cioè, non un solo sistema, ma una famiglia di sistemi del tipo 5.2, e in corrispondenza di ciò andiamo a vedere come varia un eventuale ciclo limite. In questo senso parleremo di movimen-

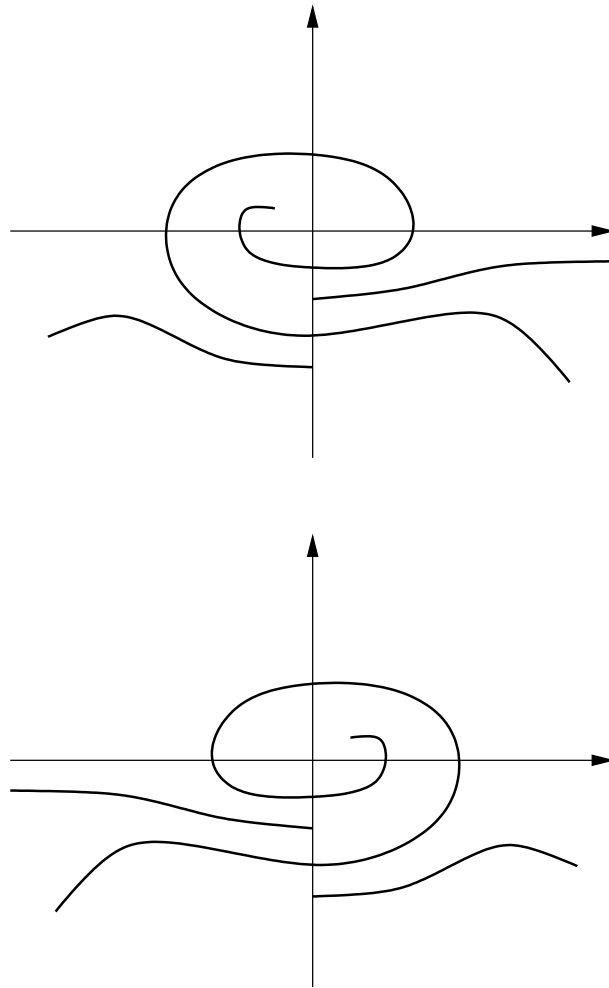


Figura 5.3: *possibilità di comparsa di cicli limite dopo lo sdoppiamento della separatrice*

to di cicli limite e vedremo come in una stessa famiglia, al variare del parametro, cicli limite (stabili e non) possano crearsi e sparire.

Una prima semplificazione del problema si ottiene tenendo conto della seguente condizione necessaria.

Proposizione 5.1. *Se il sistema 5.2 ammette cicli limite, la parte pari di $p(x)$ deve cambiare segno.*

Ciò si traduce nell'esistenza di due interi m, k tali che $a_{2m}a_{2k} < 0$. Senza perdere in generalità, supponiamo $a_{2k} > 0$ e passiamo a considerare la famiglia parametrica S_a di sistemi del tipo 5.2 dipendenti dal parametro a , con $a = a_{2k}$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -P_a(x)y - x, \end{cases} \quad (S_a)$$

con $P_a(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \dots + a_{2k+1}x^{2k+1} + ax^{2k} + \dots + a_0$. Come abbiamo già accennato, seguiremo il movimento dei cicli limite al variare del parametro a . Il movimento dei cicli limite al variare di più coefficienti della parte pari di $p(x)$ si ottiene facendo variare consecutivamente un coefficiente alla volta.

Lo slope di S_a è dato da

$$y' = -P_a(x) - \frac{x}{y},$$

espressione da cui otteniamo immediatamente che se $a_1 > a \Rightarrow y'_{a_1} < y'_a$, cioè lo slope diminuisce al crescere di a .

Proposizione 5.2. *In un intorno anulare della posizione iniziale, i cicli limite stabili si contraggono all'aumentare del parametro a e si espandono al suo decrescere, mentre i cicli limite instabili si muovono in senso inverso.*

Dim. Cominciamo con l'osservare che al di sopra della separatrice le traiettorie sono suddivisibili in insiemi di traiettorie che si svolgono e insiemi di traiettorie che si avvolgono. Due insiemi di traiettorie di tipo diverso sono separati da un ciclo limite (stabile o instabile). Variando con continuità il parametro, in un intorno anulare della posizione iniziale, varia con continuità il comportamento degli insiemi di traiettorie; pertanto non possiamo escludere che sparisca un insieme di traiettorie di un certo tipo, con conseguente scomparsa del ciclo limite o la sua sostituzione con

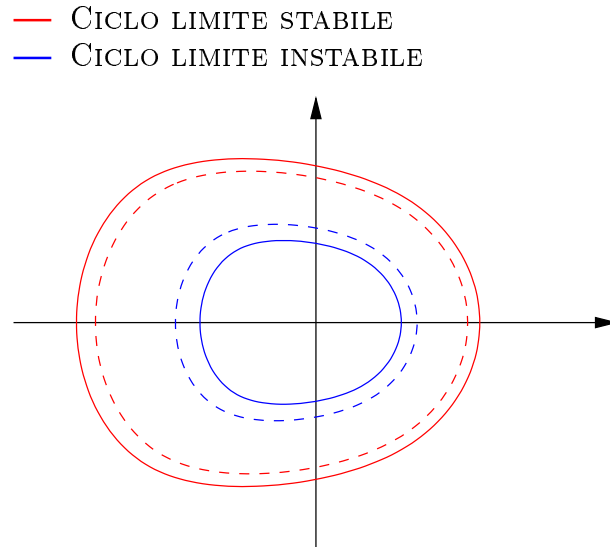


Figura 5.4: *movimento dei cicli limite stabili e instabili*

un ciclo limite semistabile, tuttavia osserviamo che questo può avvenire solo in corrispondenza di un preciso valore del parametro. Supponiamo che per il valore a del parametro esista un ciclo limite (stabile o instabile) per S_a e che esso sparisca o venga sostituito passando ad \bar{a} . Per i valori intermedi abbiamo ancora un sistema che ammette un ciclo limite dello stesso tipo di quello di S_a .

Supponiamo ora che S_a ammetta un ciclo limite stabile e prendiamo $a_1 > a$, in modo tale che anche S_{a_1} ammetta un ciclo stabile. Da $y'_{a_1} < y'_a$ segue che le traiettorie di S_{a_1} entrano in quelle di S_a . In particolare una traiettoria di S_{a_1} che incontra il ciclo limite di S_a , vi entra e dunque è una traiettoria che si avvolge. Ciò significa che il ciclo limite di S_{a_1} è all'interno di quello di S_a . Al contrario se è $a_1 < a$, in modo tale che S_{a_1} ammetta un ciclo stabile come S_a , da $y'_{a_1} > y'_a$ segue che le traiettorie di S_{a_1} escono da quelle di S_a . In particolare il ciclo limite di S_a è attraversato da traiettorie di S_{a_1} in uscita, cioè traiettorie che si svolgono in direzione del rispettivo ciclo limite, che dunque contiene il ciclo limite di S_a .

In maniera del tutto analoga si procede supponendo che S_a ammetta un ciclo limite instabile.

Per la raffigurazione del movimento dei cicli limite (figura 5.4), si sono distinti con una linea tratteggiata i cicli limite corrispondenti a valori crescenti del parametro.

Proposizione 5.3. *In un intorno anulare della posizione iniziale, un ciclo limite semistabile dall'esterno sparisce all'aumentare del parametro, mentre si biforca in due cicli limite, uno stabile (esterno)*

e uno instabile (interno) al suo decrescere. Un ciclo limite semistabile dall'interno sparisce e si biforca in senso diametralmente opposto.

Dim. Supponiamo che il sistema S_a ammetta un ciclo limite *semistabile dall'esterno* (in maniera del tutto analoga si procede se S_a ammette un ciclo limite *semistabile dall'interno*) e prendiamo $a_1 > a$. Da $y'_{a_1} < y'_a$ segue che le traiettorie di S_{a_1} entrano in quelle di S_a . Da ciò possiamo semplicemente dedurre che in un intorno del ciclo limite di S_a le traiettorie di S_{a_1} si avvolgono, come del resto quelle di S_a . Bisogna allora vedere se, come le seconde, le prime sono ancora suddivisibili in due insiemi dalla presenza di un ciclo limite semistabile dall'esterno. Supponiamo per assurdo che tale ciclo limite esista; allora, dal confronto degli slope, segue che esso è attraversato da traiettorie di S_a in uscita e ciò è in contraddizione con il fatto che queste ultime si avvolgono. Allora tale ciclo limite non esiste, né all'interno, né all'esterno del ciclo limite di S_a , cioè è sparito al crescere del parametro. Prendiamo ora $a_1 < a$ e supponiamo che la variazione del parametro sia sufficientemente piccola in modo tale che in un intorno anulare del ciclo limite di S_a siano presenti traiettorie di S_{a_1} che si avvolgono (ricordiamo quanto detto nella dimostrazione precedente, e cioè che il comportamento degli insiemi di traiettorie varia con continuità rispetto al parametro). Tuttavia dal confronto degli slope ($y'_{a_1} > y'_a$) emerge che il ciclo limite di S_a è attraversato da traiettorie di S_{a_1} in uscita; cioè è comparso un insieme di traiettorie che si svolgono che è andato a frammettersi tra le traiettorie di tipo diverso. Ci troviamo, in sostanza, di fronte a tre insiemi di traiettorie che devono essere necessariamente separate da due cicli limite, uno instabile (interno) e uno stabile (esterno).

In presenza di un ciclo limite semistabile dall'interno, oltre al fatto che la scomparsa e la biforcazione del ciclo limite avvengono variando il parametro nel senso opposto, nel secondo caso le mutue posizioni dei cicli stabile e instabile originati dalla biforcazione si scambiano e troveremo il ciclo stabile all'interno e quello instabile all'esterno.

I casi di biforcazione sono riassunti nelle figure 5.5 (a) (ciclo limite semistabile dall'esterno) e 5.5 (b) (ciclo limite semistabile dall'interno), ove, questa volta, si è distinto con un tratteggio la situazione successiva alla biforcazione.

— CICLO LIMITE SEMISTABILE
- - - CICLO LIMITE STABILE
- - - CICLO LIMITE INSTABILE

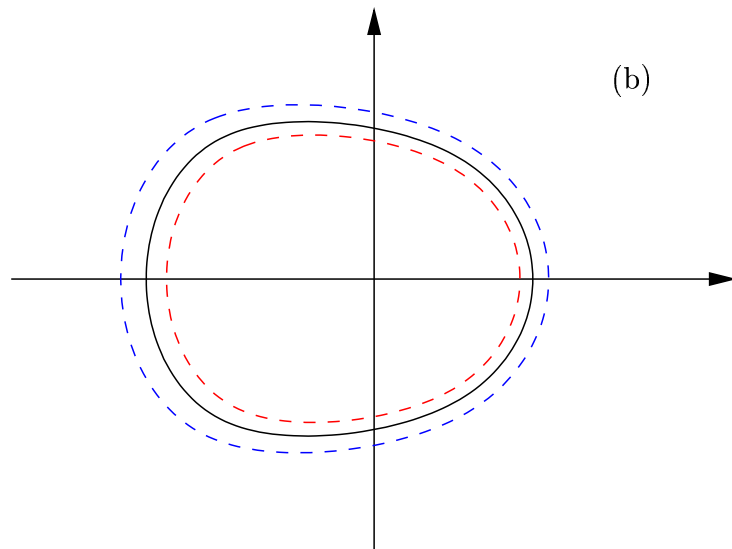
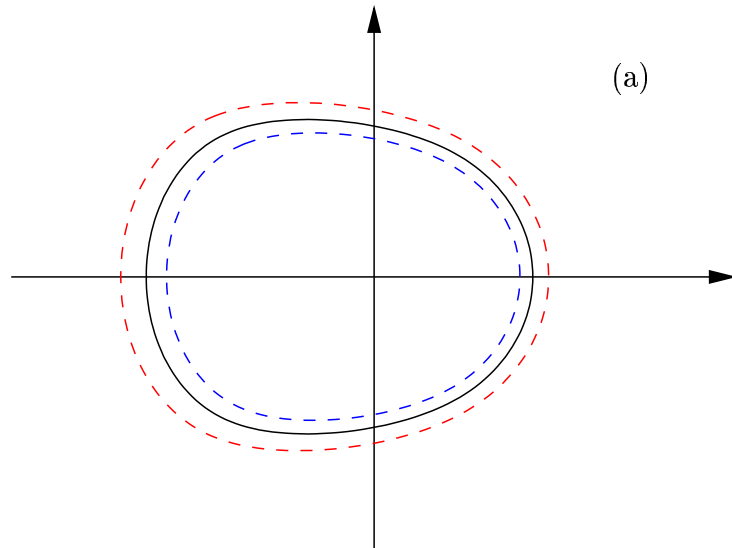


Figura 5.5: *biforcazione del ciclo limite semistabile dall'esterno (a) e dall'interno (b)*

5.1.4 Il caso $p(x) = x^3 + ax^2 - b$

Per semplicità, ma senza perdere in generalità, passiamo ora a considerare un caso particolare del sistema 5.2, quello in cui $p(x)$ è un polinomio di grado 3 ed è dato da

$$p(x) = P_a(x) = x^3 + ax^2 - b,$$

con $a, b > 0$. Si osservi che nella scelta dei segni di a e b si è già tenuto conto del contenuto della Proposizione 1.

Otterremo l'andamento del sistema S_a confrontandolo con il sistema S , dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3 y - x, \end{cases} \quad (S)$$

e con il sistema \tilde{S} , dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(x^3 - b)y - x. \end{cases} \quad (\tilde{S})$$

S è il sistema che si ottiene da S_a sostituendo $p(x)$ con la sua parte dispari e pertanto gode delle proprietà 1.-4.. Il suo slope è dato da

$$y' = -x^3 - \frac{x}{y},$$

mentre l'isoclina è data dalla curva

$$H(x) = -\frac{1}{x^2},$$

che non esaurisce il luogo dei punti in cui le traiettorie di S hanno tangente orizzontale, che infatti comprende anche l'asse y . L'andamento delle possibili traiettorie di S è del tipo rappresentato in figura 5.1.

Lo slope del sistema \tilde{S} è dato da

$$\tilde{y}' = -x^3 + b - \frac{x}{y},$$

mentre l'isoclina è data dalla curva

$$\tilde{H}(x) = -\frac{x}{x^3 - b}.$$

Dal confronto dello slope dei sistemi S e \tilde{S} otteniamo $\tilde{y}' > y'$, per cui le traiettorie di \tilde{S} che incontrano la separatrice di S ne escono. Ciò significa che quelle che incontrano il ramo di Q_2 di quest'ultima attraversano l'asse

— SEPARATRICE DI S
 — RAMI DI SEPARATRICE DI \tilde{S}

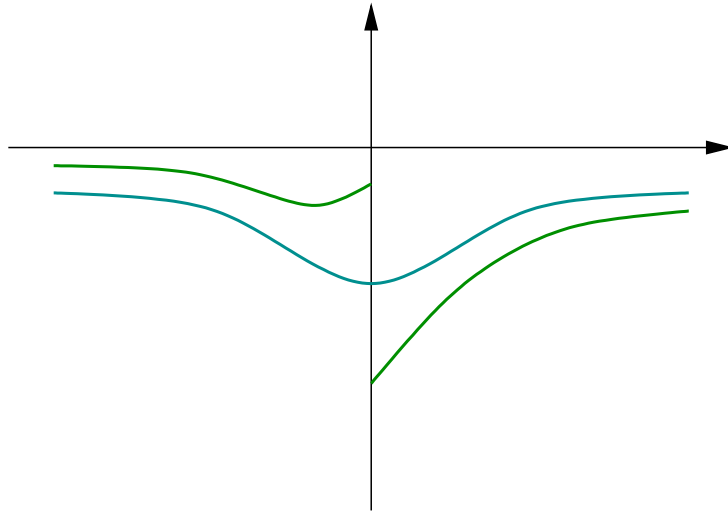


Figura 5.6: la separatrice del sistema \tilde{S}

x indietro nel tempo e dunque si trovano al di sopra del rispettivo ramo di separatrice, mentre quelle che ne incontrano il ramo di Q_1 sono illimitate e pertanto si trovano sotto al rispettivo ramo di separatrice. Otteniamo la situazione rappresentata in figura 5.6.

Passiamo ora a studiare S_a . Lo slope è dato da

$$y'_a = -\left(x^3 + ax^2 - b\right) - \frac{x}{y},$$

mentre l'isoclina è data dalla curva

$$H_a(x) = -\frac{x}{x^3 + ax^2 - b}.$$

L'isoclina ha almeno un asintoto nel semipiano $x > 0$; ha esattamente uno, due o tre asintoti in dipendenza del valore del parametro a in relazione al valore di b (rispettivamente $a \lesseqgtr \sqrt[3]{\frac{27}{4}b}$). Per valori "grandi" di a ci sono tre asintoti; due di questi sono, uno, interno alla fascia $-2\sqrt{\frac{b}{a}} < x < 0$ e, l'altro, interno alla fascia $0 < x < \sqrt{\frac{b}{a}}$ e pertanto tendono ad avvicinarsi all'asse y al crescere di a .

Consideriamo due diversi valori di a e confrontiamo le relative pendenze. Sia ad esempio $a_2 > a_1$; abbiamo $y'_{a_2} < y'_{a_1}$ per $x \neq 0$. In particolare $y'_{a_2} < \tilde{y}' = y'_0$. Da ciò consegue che la separatrice di Q_2 di S_{a_2} sta sopra a quella di S_{a_1} e tutte le separatrici di Q_2 di S_a stanno sopra a quella di \tilde{S} . Viceversa accade per le separatrici di Q_1 (vedi figura 5.7).

- RAMI DI SEPARATRICE DI \tilde{S}
- RAMI DI SEPARATRICE DI S_a , $a = a_1$
- - RAMI DI SEPARATRICE DI S_a , $a = a_2 > a_1$

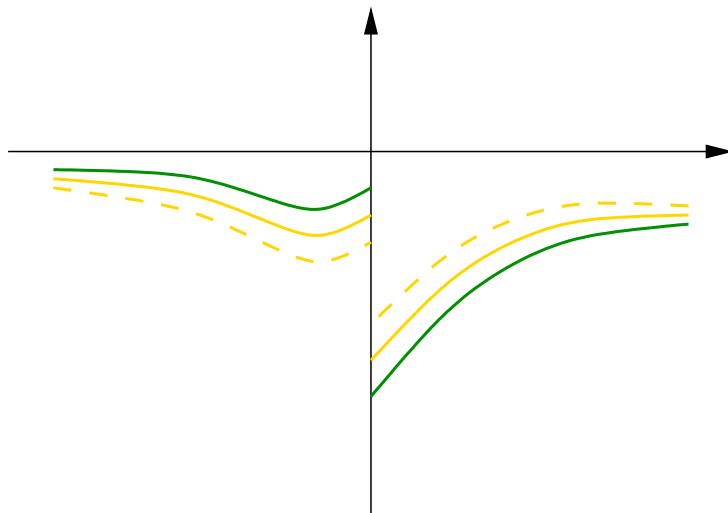


Figura 5.7: le separatrici della famiglia S_a

Se definiamo le funzioni $\phi : a \rightarrow \phi(a)$ come l'ordinata (negativa) del punto di incontro della separatrice di Q_2 di S_a con l'asse y e $\psi : a \rightarrow \psi(a)$ come l'ordinata (negativa) del punto di incontro della separatrice di Q_1 di S_a con l'asse y , abbiamo in sostanza dimostrato il lemma seguente.

Lemma 5.1. *La funzione $\phi : a \rightarrow \phi(a)$ è strettamente crescente, mentre $\psi : a \rightarrow \psi(a)$ è strettamente decrescente.*

Con un'analisi un po' più accurata che si trova in [28] si ottiene un nuovo risultato.

Teorema 5.1. *Le funzioni $\phi : a \rightarrow \phi(a)$ e $\psi : a \rightarrow \psi(a)$ sono continue.*

Definiamo ora la funzione $h : a \rightarrow h(a) = \phi(a) - \psi(a)$, per ogni $a \in \mathbb{R}^+$. Abbiamo

Teorema 5.2. *Esiste un unico a^* tale che $h(a^*) = 0$.*

Dim. Per le analoghe proprietà delle funzioni ϕ e ψ , h risulta una funzione strettamente crescente e continua. Da quanto ottenuto riguardo ai due rami di separatrice di \tilde{S} , abbiamo $h(0) < 0$. Facciamo ora vedere che ci sono valori "grandi" di a per cui $h(a) > 0$.

Dal confronto delle pendenze di S_a e di S , otteniamo che per $x < -\sqrt{\frac{b}{a}}$ e $x > \sqrt{\frac{b}{a}}$, abbiamo $y'_a < y'$; allora nel primo di questi due intervalli

la separatrice di Q_1 di S_a sta al di sotto di quella di S e viceversa nel secondo intervallo per la separatrice di Q_2 di S_a . Per $-\sqrt{\frac{b}{a}} < x < \sqrt{\frac{b}{a}}$ si inverte la relazione tra le pendenze e può accadere che i due rami di separatrice di S_a attraversino la separatrice di S determinando un valore negativo per $h(a)$. Per la continuità di h questa eventualità si presenta certamente per valori piccoli di a . Facciamo vedere che ci sono valori di a per cui almeno da una parte ciò non avviene e si inverte il segno di $h(a)$.

Consideriamo la traiettoria del sistema S_a che taglia la separatrice di S nel punto di ascissa -1 . Prendiamo a sufficientemente grande in modo che sia $-1 < -\sqrt{\frac{b}{a}}$. Allora la prima entra nella seconda per il già richiamato confronto tra le pendenze. Vediamo come cambia la traiettoria considerata all'aumentare di a . Il suo slope nel punto di intersezione $(-1, \bar{y})$ è dato da $y'_a(-1) = 1 - a + b + 1/\bar{y}$, quantità certamente negativa per a grande, di modulo crescente con a . Ciò significa che nella fascia $-1 < x < 0$, se $a_2 > a_1$, la traiettoria di S_{a_2} per $(-1, \bar{y})$ sta al di sotto di quella di S_{a_1} e al crescere di a tale traiettoria tende a tagliare la separatrice di S verticalmente. Ricordiamo che per siffatti valori di a l'isoclina presenta tre asintoti. Andando a ritroso nel tempo nella fascia $-1 \leq x \leq 0$, dal ritratto di fase otteniamo che la traiettoria incontra uno dei rami dell'isoclina in un punto a destra dell'asintoto $x = \bar{x}$, valore per il quale si può ottenere la limitazione $-2\sqrt{\frac{b}{a}} < \bar{x} < -\sqrt{\frac{b}{a}}$ (si tenga presente che nel punto di ascissa $-\sqrt{\frac{b}{a}}$ tale ramo di isoclina incontra l'isoclina di S). Nel suo moto a ritroso la traiettoria scende fino all'isoclina con uno slope che passa da un valore negativo molto grande in modulo fino a zero e dopo risale con uno slope positivo, ma sempre contenuto. Per valutare il dislivello complessivo compiuto dalla traiettoria tra i punti di ascissa -1 e 0 si consideri, oltre allo slope, l'ampiezza degli intervalli interessati: la traiettoria scende in un intervallo che contiene $-1 < x < -2\sqrt{\frac{b}{a}}$ e sale in un intervallo contenuto in $-\sqrt{\frac{b}{a}} < x < 0$. Possiamo affermare che, se a è sufficientemente grande, nell'intervallo $[0, 1]$ la risalita è trascurabile rispetto alla discesa e che pertanto la traiettoria (e a maggior ragione la separatrice di Q_1 di S_a) rimane al di sotto della separatrice di S di una quantità finita.

Consideriamo ora la traiettoria di S_a che incontra la separatrice di S nel punto di ascissa $+1$ e analizziamola nella fascia $0 \leq x \leq 1$. Analogamente a quanto fatto sopra otteniamo che all'aumentare di a l'intersezione tende ad avvenire verticalmente e la traiettoria occupa una posizione

- SEPARATRICE DI S
- ISOCLINA DI S , $y = H(x)$
- SEPARATRICE DI \tilde{S}
- TRAIETTORIE DI S_a CON $a = a_1$ PER $(-1, H(-1))$ E PER $(+1, H(+1))$
- ISOCLINA DI S_a CON $a = a_1$
- TRAIETTORIE DI S_a CON $a = a_2 > a_1$ PER $(-1, H(-1))$ E PER $(+1, H(+1))$
- ISOCLINA DI S_a CON $a = a_2$

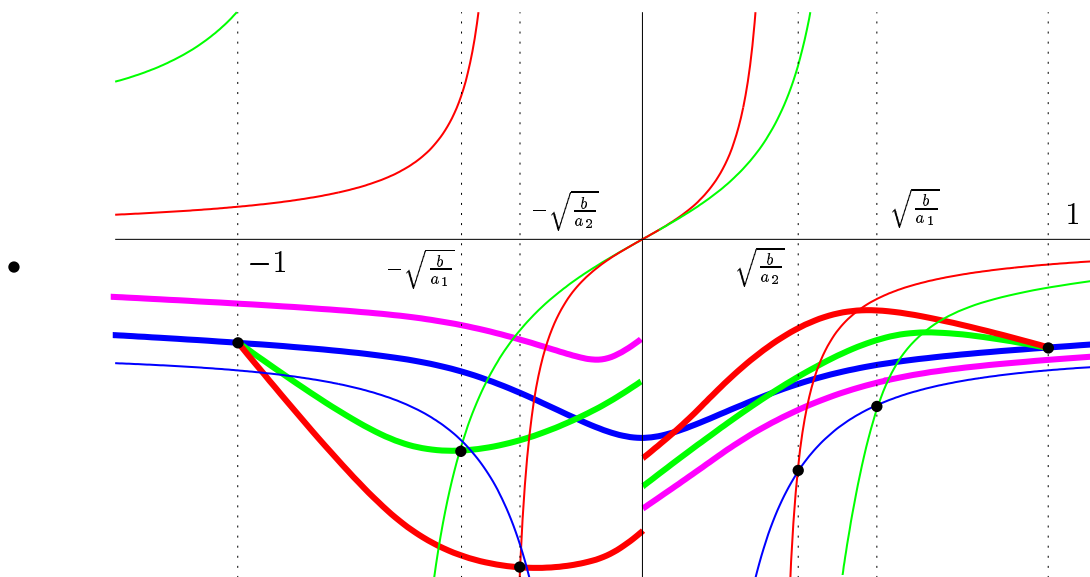


Figura 5.8: *esistenza e unicit  di a^* : un valore di a per cui $h(a) > 0$*

sempre al di sopra delle precedenti (corrispondenti a valori inferiori del parametro). Osservando il ritratto di fase, otteniamo che nel punto di intersezione la traiettoria sta salendo e continua a farlo anche dopo, fino ad incontrare la propria isoclina in un punto di ascissa superiore a $\sqrt{\frac{b}{a}}$, dopo il quale comincia a scendere. Nella discesa pu  attraversare ancora la separatrice di S , ma questo, per il gi  richiamato confronto tra le pendenze, pu  avvenire solo per $x < \sqrt{\frac{b}{a}}$ e, per i motivi di cui sopra, in $x = 0$ sar  scesa al di sotto della separatrice di S di una quantit  trascurabile. Tutto ci  pu  essere esteso alla separatrice di Q_2 di S_a che   situata al di sopra della traiettoria che stiamo considerando. In questo modo risulta provato che $\phi(a) > \psi(a)$ e cio  che $h(a) > 0$ (vedi figura 5.8). Dalla continuit  di h segue l'esistenza di a^* per cui $h(a^*) = 0$, mentre dalla sua monotonia in senso stretto segue l'unicit  di a^* .

Se ora nel sistema 5.2 con $p(x) = x^3 + ax^2 - b$ facciamo variare b tenendo fisso a , otteniamo una famiglia di sistemi dipendenti dal para-

metro b , S_b . Possiamo definire ancora le funzioni ϕ , ψ e h come funzioni di b e dimostrare che sono anche esse continue e strettamente crescenti o decrescenti in un senso che è esattamente opposto rispetto alle stesse funzioni definite per la variabile a . In sostanza ϕ , ψ e h sono funzioni di due variabili che, quando vengano considerate come funzioni di una sola variabile, cosa che si ottiene tenendo fissa l'altra, godono di alcune proprietà che possono essere così riassunte:

- i) $a \rightarrow \phi(a, b)$ e $b \rightarrow \psi(a, b)$ sono strettamente crescenti e continue,*
- ii) $a \rightarrow \psi(a, b)$ e $b \rightarrow \phi(a, b)$ sono strettamente decrescenti e continue,*
- iii) esiste un unico a^* e un unico b^* tali che $h(a^*, b) = h(a, b^*) = 0$.*

Dovrebbero ora apparire chiari i motivi per cui il caso del polinomio di grado tre, trattato per semplicità, non comporti alcuna perdita di generalità. Infatti se la parte pari di $p(x)$ è un polinomio di grado $2n$ con $n > 1$, sia essa ad esempio $a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \dots + a_0$, possiamo ancora definire le funzioni di $n+1$ variabili ϕ , ψ e h , e dimostrare che godono di proprietà analoghe alle (i), (ii), (iii) e cioè risultano ancora strettamente monotone e continue separatamente rispetto a ciascuna variabile, mentre le funzioni $a_{2i} \rightarrow h(a_{2n}, \dots, a_{2i}, \dots, a_0)$ con $i = 0, \dots, n$ ammettono ciascuna un unico zero.

Osservazione. Quando $h(a, b)$ si annulla, il sistema S_a ammette un'unica separatrice che unisce i punti Q_2 e Q_1 , come nel caso simmetrico. Tuttavia continua a differire da questo per tutti gli altri aspetti, come ad esempio per il fatto che le orbite non sono simmetriche, ma si avvolgono o si svolgono; in particolare se $b > 0$ si svolgono in un intorno dell'origine (poiché questa risulta localmente repulsiva).

5.1.5 Biforcazione di un ciclo limite da una separatrice

Nel corso della dimostrazione del teorema 5.2 abbiamo ottenuto l'esistenza di valori "grandi" di a per cui $h(a, b) > 0$; sia \bar{a} uno di questi, allora $h(\bar{a}, b) > 0$. Osservando il ritratto di fase, otteniamo che per il sistema $S_{\bar{a}}$ possiamo produrre una traiettoria che si avvolge (vedi figura 5.9). Insieme al fatto che per la scelta di b l'origine risulta essere una sorgente, cioè localmente repulsiva, per il teorema di Poincaré-Bendixon, ciò implica l'esistenza di almeno un ciclo limite stabile. Supponiamo che sia vera la congettura di Lins, De Melo, Pugh, che per $n = 3$ fissa ad *al più* uno il numero di cicli limite. In tale ipotesi, $S_{\bar{a}}$ ammette esattamente un ciclo limite, ed esso è stabile. Al diminuire del parametro, per la

- SEPARATRICE DI S
- RAMI DI SEPARATRICE DI \tilde{S}
- RAMI DI SEPARATRICE DI S_a , PER a “GRANDE”
- TRAIETTORIE DI S_a

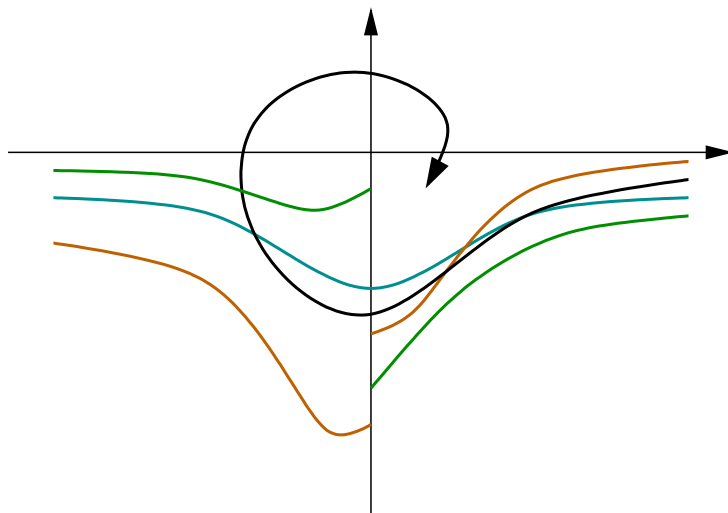


Figura 5.9: una traiettoria limitata per un sistema di S_a

proposizione 5.2, tale ciclo si espande; inoltre la sua esistenza è assicurata finché $h(a, b) > 0$, cioè finché $a > a^*$ (valore definito nel teorema 5.2), come si ottiene dal fatto che h è strettamente crescente e continua e quindi $h(a, b)$ diminuisce con a fino ad azzerarsi nell'unico valore a^* . Continuando a diminuire il parametro, per $a < a^*$, diventa $h(a, b) < 0$ e quindi possiamo produrre una traiettoria di S_a che si svolge e che è illimitata. In questo caso non esiste alcun ciclo limite né stabile, né instabile, altrimenti esso dovrebbe essere affiancato da un altro ciclo limite di opposta stabilità, per un totale di due cicli limite, in contraddizione con la congettura di Lins, De Melo, Pugh. Il valore $a = a^*$ è il valore in corrispondenza del quale il ciclo limite sparisce. In realtà il ciclo limite non sparisce nel nulla, ma, in seguito al suo movimento di espansione, si allarga a tal punto che va ad afflosciarsi sulla separatrice, che - ricordiamo - per $a = a^*$ è costituita da un unico ramo che unisce i punti Q_2 e Q_1 . Ripercorriamo questo fenomeno variando il parametro in senso inverso. Il valore $a = a^*$ è il valore oltre il quale il ciclo limite compare e possiamo rilevare che esso non proviene dal nulla ma trae origine, o meglio *si biforca* dalla separatrice.

Definiamo ora la funzione $a \rightarrow f(a)$ tramite la relazione $h(a, f(a)) = 0$. Dalla monotonia in senso stretto della funzione $h(a, b)$ rispetto a

- ESISTENZA DI UN CICLO LIMITE STABILE
- ASSENZA DI CICLI LIMITE
- BIFORCAZIONE DALLA SEPARATRICE

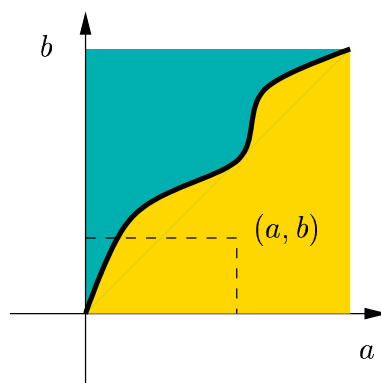


Figura 5.10: *il diagramma di biforcazione dalla separatrice*

ciascuna variabile separatamente, discende che $a \rightarrow f(a)$ è strettamente crescente. Ragionando come per la ϕ , si dimostra anche che è continua.

Il grafico della f può essere interpretato come il diagramma di biforcazione dalla separatrice del ciclo limite, nel senso che andiamo a precisare.

Innanzitutto, per la continuità di f , abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 .$$

Dato il polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 - b$ con $a > 0, b > 0$, consideriamo il sistema 5.2 corrispondente e lo indichiamo con $S_{a,b}$. Ad ogni coppia di valori (a, b) corrisponde un punto del piano; se tale punto è situato al di sopra del grafico della f , $S_{a,b}$ non ammette cicli limite, mentre se (a, b) è situato al di sotto, $S_{a,b}$ ammette un ciclo limite stabile. Nei punti $(a, f(a))$ con $a > 0$ del grafico della f avviene la biforcazione dalla separatrice (vedi figura 5.10).

Supponiamo ora che la congettura di Lins, De Melo, Pugh non sia vera e che S_a possa ammettere più cicli limite di varia natura. In questo caso seguiamo il movimento del più esterno, che, per il sistema $S_{\bar{a}}$, con $h(\bar{a}, b) > 0$, non può essere instabile (ma solo stabile o semistabile), poiché - come abbiamo già detto - possiamo produrre una traiettoria che si avvolge. Come in precedenza, da questa proprietà possiamo dedurre l'esistenza di almeno un ciclo limite stabile. Supponiamo allora che il ciclo limite più esterno sia stabile. Per la proposizione 5.2, diminuendo il parametro, eventuali cicli instabili in esso contenuti si contraggono, mentre esso si espande, restando a maggior ragione il più esterno tra i

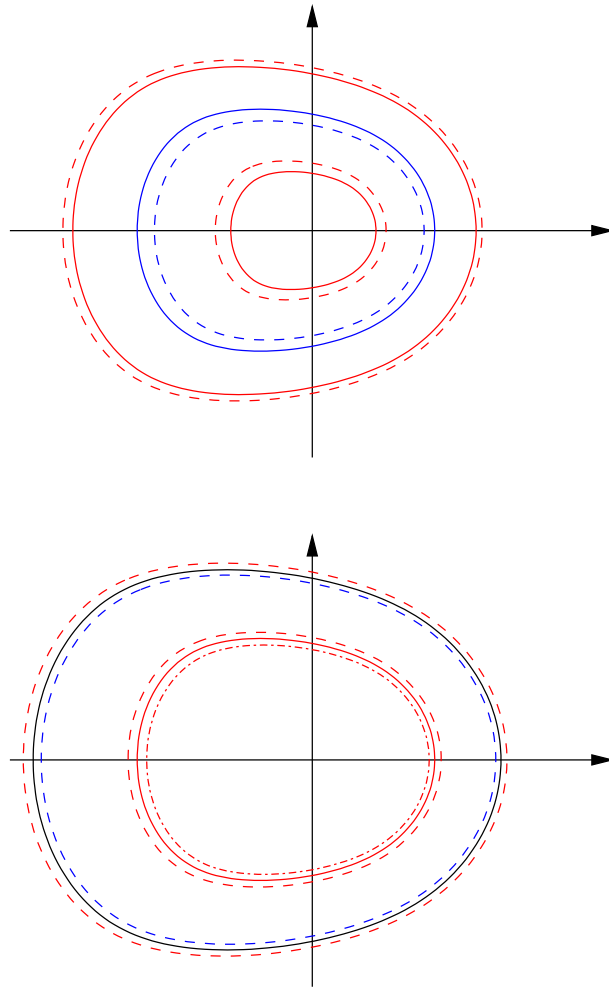


Figura 5.11: *il movimento dei cicli limite al diminuire del parametro*

cicli di questi due tipi. Non possiamo però escludere la possibilità che compaiano uno o più cicli limite neutri che lo contengono. In tal caso può trattarsi esclusivamente di cicli limite semistabili dall'esterno; consideriamo ancora il più esterno (vedi figura 5.11). Per la proposizione 5.3, continuando a diminuire il parametro, tale ciclo si biforca in uno stabile (esterno) e uno instabile (interno), cioè torniamo ancora alla situazione in cui il ciclo limite più esterno è stabile. Osserviamo che la prima parte di questa stessa proposizione, letta in senso inverso, suggerisce tale eventualità; poiché al crescere del parametro un ciclo limite semistabile dall'esterno sparisce, esso può crearsi al suo diminuire. Allo stesso risultato giungiamo se supponiamo che inizialmente il ciclo limite più esterno sia semistabile; infatti, considerato che esiste una traiettoria che si avvolge, esso può solo essere semistabile dall'esterno. Dunque nel seguire i movimenti del ciclo limite più esterno, possiamo supporlo stabile senza perdita di generalità.

In modo simile al precedente, si dimostra che il ciclo limite più esterno si affloscia sulla separatrice, quando $h(a, b)$ si annulla in a^* . È sufficiente osservare che anche in questo caso in a^* viene a mancare un ciclo limite, precisando che più che al numero effettivo, ci riferiamo al tipo (stabile o instabile). Infatti stiamo supponendo di trovarci in una situazione dinamica in cui può variare il numero totale di cicli limite al variare del parametro. Se $\tilde{a} \neq a^*$, il numero di cicli limite (stabili o instabili) di S_a per $a < \tilde{a}$ può differire da quello per $a > \tilde{a}$ per una quantità pari (in questa situazione particolare i cicli limite si creano a coppie - uno stabile e uno instabile - per biforcazione da un ciclo limite semistabile, o si distruggono a coppie per collassamento di uno stabile su uno instabile). Ciò che contraddistingue il passaggio per a^* è il fatto che, per $a > a^*$, S_a ammette m cicli limite instabili ($m \geq 0$) e $m + 1$ stabili, mentre, per $a < a^*$, ne ammette k instabili ($k \geq 0$) ed altrettanti stabili, come si ottiene osservando il ritratto di fase. Risulta così provato che per $a = a^*$ il ciclo limite più esterno si biforca dalla separatrice.

Come nel caso precedente, è possibile definire la funzione f il cui grafico rappresenti il diagramma di biforcazione per il ciclo limite più esterno, anche se una raffigurazione del fenomeno è in generale molto più complicata.

Concludiamo questa parte osservando che sarebbe auspicabile giungere a una dimostrazione della congettura di Lins, De Melo, Pugh in quanto ciò porterebbe un certo riordinamento nel movimento dei cicli limite. Per ottenere una situazione un po' più dinamica in cui cicli limite si creano e si distruggono nel modo ipotizzato, basterebbe scegliere come $p(x)$ nel sistema 5.2 un polinomio di grado più alto.

Per una trattazione più dettagliata del problema della biforcazione si rimanda al lavoro di Perko [22].

5.2 L'equazione autonoma associata

Data l'equazione differenziale del secondo ordine forzata

$$\ddot{x} + p_{2k+1}(x)\dot{x} + \gamma x = e(t), \quad (5.3)$$

con $k \geq 0$, intero, $e : t \rightarrow e(t) = e(t + T)$, funzione continua T -periodica e γ positivo, che si ottiene come caso particolare dell'equazione di Liénard forzata

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t), \quad (5.4)$$

scegliendo $f(x)$ e $g(x)$ tra i polinomi di grado dispari con il coefficiente del termine di grado massimo positivo (ipotesi, quest'ultima, non restrittiva, come abbiamo già osservato all'inizio del paragrafo precedente), consideriamo l'equazione autonoma associata

$$\ddot{x} + p_{2k+1}(x) \dot{x} + \gamma x = 0$$

di cui vogliamo completare lo studio intorno al sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -p_{2k+1}(x)y - \gamma x . \end{cases} \quad (5.5)$$

Nel paragrafo 1, partendo dal ritratto di fase per il sistema simmetrico, abbiamo studiato come varia la separatrice in dipendenza del parametro, per $\gamma = 1$. Passando al generico $\gamma \in \mathbb{R}^+$, visto che trattiamo con funzioni dal comportamento assai regolare quali i polinomi, non ci aspettiamo grosse differenze; tuttavia vogliamo dare una motivazione rigorosa del fatto che il sistema 5.5 presenta lo stesso ritratto di fase del sistema 5.2.

Il modo più diretto è basato sulla determinazione dell'isoclina, con cui si può conoscere nei dettagli il ritratto di fase e, da questo, ricavare l'andamento di una possibile separatrice. Ricalcando il modo di procedere del paragrafo precedente, supponiamo dapprima che p_{2k+1} sia dispari.

L'isoclina è data dalla curva, simmetrica rispetto all'asse x ,

$$H(x) = -\frac{\gamma}{q_{2k}(x)}$$

ove $q_{2k}(x) = p_{2k+1}(x)/x$, è un polinomio pari con il coefficiente del termine di grado massimo positivo. Allora $\exists d > 0$ tale che $q_{2k}(x) > 0$ per $|x| > d$, pertanto $H(x) < 0$ per $|x| > d$; inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} H(x) = 0.$$

Tra le traiettorie del sistema 5.5 ce ne sono sicuramente alcune che tagliano la semiretta $x > d$ (sono tutte - e sole - quelle che passano per un punto di essa all'istante iniziale). Sia $x_0 > d$ e sia $(x, \hat{y}(x)) = (x(t), \hat{y}(x(t)))$ la traiettoria che per $t = 0$ passa per $(x_0, 0)$. Per motivi già visti in precedenza, fino ad un certo istante $t > 0$, il punto su tale traiettoria si muove nel senso delle x decrescenti e resta nel semipiano $y < 0$. Se consideriamo le traiettorie per punti (x, y) con $0 < x < x_0$ e $0 > y > \hat{y}(x)$, otteniamo che esse devono attraversare l'asse x indietro nel tempo. D'altra parte, possiamo considerare la traiettoria $(x, \tilde{y}(x)) = (x(t), \tilde{y}(x(t)))$ che all'istante iniziale attraversa la zero-isoclina nel punto

di ascissa x_0 . Ogni traiettoria al di sotto di essa deve parimenti incontrare la zero-isocline e pertanto è illimitata indietro nel tempo. Abbiamo così individuato due insiemi, non vuoti, di traiettorie dalle caratteristiche diverse, tra i quali è necessariamente situato un elemento separatore, cioè una traiettoria che corrisponde alla nostra definizione di separatrice. La separatrice non può tagliare l'asse x né la zero-isocline, pertanto è situata al di sopra di quest'ultima nel semipiano $y < 0$ ed ha necessariamente lo stesso comportamento all'infinito. Eliminando l'ipotesi p_{2k+1} dispari, procediamo come nel paragrafo precedente.

Un altro modo per determinare il ritratto di fase che, oltre che estendere al generico $\gamma \in \mathbb{R}^+$, valorizza i risultati del paragrafo 1, è quello di servirci di un cambiamento di variabile considerato da Conti in [8]. Grazie ad esso, ogni sistema autonomo di Liénard con $g(s) > 0$ per $s \neq 0$ e $G(\pm\infty) = \infty$ ha lo stesso ritratto di fase del sistema con $g(x) = x$. Applicando questo risultato, otteniamo immediatamente il ritratto di fase del sistema 5.5 dal ritratto di fase di 5.2. Per questo tipo di problema tale cambiamento di variabile va usato con cautela perché, al di fuori di casi semplici come il nostro, in cui $g(x) = \gamma x$, modifica radicalmente il carattere del termine forzante e, soprattutto, non mantiene il tempo del moto sulla traiettoria. Al contrario la conoscenza del tempo impiegato dal punto su una traiettoria è l'argomento chiave su cui si basa la nostra prova di esistenza di soluzioni T -periodiche per l'equazione non autonoma.

Un terzo modo con cui si può ottenere il ritratto di fase senza passare attraverso il caso simmetrico, e che citiamo perché costituisce un risultato importante, è il teorema di Filippov [10].

Affinché l'equazione 5.4 possa comprendere l'equazione polinomiale da noi considerata, supponiamo che valgano le restrizioni

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} g(s) \operatorname{sgn}(s) = +\infty \quad (5.6)$$

e

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} F(s) = +\infty \quad (5.7)$$

(oppure $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} F(s) = -\infty$, che si riconduce alla 5.7, grazie a un'inversione del senso del tempo), ovvero valga ancora la 5.6, mentre la 5.7 valga nella sua forma forte

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} f(s) \operatorname{sgn}(s) = +\infty$$

(oppure $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} f(s) \operatorname{sgn}(s) = -\infty$).

Consideriamo il sistema autonomo associato a 5.4

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x) \end{cases} \quad (5.8)$$

per lo studio del quale è utile definire le seguenti funzioni

$$F(s) = \int_0^s f(\xi) d\xi,$$

$$G(s) = \int_0^s g(\xi) d\xi.$$

Secondo un classico risultato introdotto da Filippov abbiamo che se

$$\sup_{s \geq 0} \sqrt{8} \sqrt{G(s)} - F(s) < +\infty \quad (5.9)$$

esiste un valore $\hat{y}_0 < 0$ tale che per ogni $y_0 < \hat{y}_0$, $\Gamma^-(y_0)$ non incontra l'asse x ; in altre parole, una traiettoria che incontra l'asse y al di sotto di \hat{y}_0 , non incontra l'asse x indietro nel tempo. D'altra parte se $\exists a \in]0, \sqrt{8}[$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a \sqrt{G(s)} - F(s) = +\infty \quad (5.10)$$

allora tale intersezione avviene per ogni y_0 sufficientemente negativo.

Con un' inversione nel senso del tempo dalle condizioni 5.9 e 5.10 si possono ricavare condizioni riguardo all'intersezione di $\Gamma^+(y_0)$ con l'asse x . Combinandole correttamente, otteniamo condizioni affinché una traiettoria nel semipiano $y < 0$ sia illimitata avanti e indietro nel tempo, ovvero giri intorno all'origine.

Poiché siamo interessati a sistemi 3.3 in cui la f e la g sono polinomi di grado dispari, e cioè

$$\begin{aligned} f(x) &= a_{2k+1}x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} + \dots + a_0, \\ a_{2k+1} &> 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= b_{2l+1}x^{2l+1} + b_{2l}x^{2l} + \dots + b_0, \\ b_{2l+1} &> 0, \end{aligned}$$

vediamo come le condizioni 5.9 e 5.10 si traducono nel modello polinomiale. Esse prendono rispettivamente la forma di $l < 2k + 1$ (presenza di due semitraiettorie con le caratteristiche di separatrice, ciascuna per il proprio semipiano di appartenenza) e $l > 2k + 1$. Il valore $l = 2k + 1$ è determinato dal valore dei coefficienti. In caso di simmetria la condizione $l < 2k + 1$ rivela la presenza di una separatrice, in un unico ramo che unisce i due punti all'infinito, mentre la condizione $l > 2k + 1$ rivela che l'origine, al di fuori di un compatto, è un centro globale.

5.3 Un nuovo criterio di esistenza

Vale la seguente proprietà: *la separatrice del sistema 5.5 è limitata in $y = \dot{x}$. Questo risultato si ottiene con ragionamenti simili a quelli sviluppati in [25, Lemma 1], a condizione che si abbia*

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} < +\infty .$$

Il significato che possiamo attribuire a questa proprietà è che *un punto sulla separatrice impiega un tempo infinito per giungere all'infinito.*

Osserviamo che la presenza di una separatrice per l'equazione autonoma con la proprietà sopra enunciata può essere usata per provare l'esistenza di soluzioni T -periodiche per l'equazione forzata con termine forzante periodico. Ciò è quanto faremo nel corso della dimostrazione del teorema 5.3, che a sua volta fornirà le condizioni per l'applicabilità del lemma che stiamo per enunciare. Quest'ultimo ha un campo di validità molto più ampio del contesto nel quale operiamo e un significato innovativo che vogliamo preannunciare.

A differenza del metodo geometrico classico, concettualmente semplice, ma oneroso sul piano pratico, che abbiamo introdotto per il caso generale dell'equazione 5.4 e che - ricordiamo - consiste nel determinare una zona invariante e cioè una limitazione per *tutte* le soluzioni, il nostro prossimo intento è più semplicemente quello di trovare una limitazione solo per le *eventuali soluzioni periodiche*.

Abbiamo il primo dei due risultati citati, che sono stati introdotti in [30] e che verranno in seguito completati con i dettagli mancanti in [31]

Consideriamo l'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine non lineare affine, scalare

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = e(t), \quad (5.11)$$

dove $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua ed $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e T -periodica in t .

Lemma 5.2 *Supponiamo che esista una costante $R > 0$ tale che*

$$|x|_{\infty} < R \quad e \quad |\dot{x}|_{\infty} < R, \quad (5.12)$$

per ogni soluzione T -periodica $x : t \rightarrow x(t)$ di

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = \lambda e(t), \quad (5.13)$$

per qualche $\lambda \in [0, 1]$ e

$$F(s, 0) s > 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{con } |s| \geq R. \quad (5.14)$$

Allora 5.11 ha almeno una soluzione T -periodica.

La dimostrazione, che si ottiene applicando [4, Corollario 6], si fonda sulla teoria relativa al grado di Brouwer, argomento che esula dagli obiettivi di questa tesi e per la cui trattazione precisa rimandiamo al lavoro in questione e a [17], [18], [19]. Prima di procedere vogliamo soffermarci brevemente a considerare l'ipotesi di segno sulla F , 5.14, per capirne il significato. Tale condizione implica che il sistema autonomo associato all'equazione 5.13

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -F(x, y) \end{cases}$$

non ammette singolarità al di fuori di un intorno dell'origine ma soprattutto che, al di fuori di tale intorno, le sue orbite girano in senso orario. Se $F(x, y)$ ha la consueta forma dell'equazione di Liénard $F(x, y) = f(x)y + g(x)$, la condizione 5.14 prende la forma $g(s) s > 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$, con $|s| \geq R$, a noi nota.

Nell'ipotesi $e : t \rightarrow e(t)$ continua, si possono determinare $e, E \in \mathbb{R}$ tali che $e < e(t) < E$ per ogni $t \in [0, T]$; dalla periodicità di $e(t)$ segue che tali limitazioni valgono $\forall t \in \mathbb{R}$. Inoltre possiamo sempre supporre che sia $e < 0$ ed $E > 0$. In tal caso, l'ipotesi di segno sulla F , può essere sostituita dalla condizione

$$\exists d > 0 \quad \text{tale che} \quad F(s, 0) < e, \quad \forall s \leq -d \quad \text{e} \quad F(s, 0) > E, \quad \forall s \geq d$$

che d'ora in avanti assumeremo sempre e che comporta la validità di 5.14, al più per R abbastanza grande ($R \geq d$).

La ricerca dei limiti a priori per le soluzioni T -periodiche dell'equazione 5.13 si basa, come il metodo classico generale, sul metodo del confronto.

Dobbiamo considerare il sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -F(x, y) + \lambda e(t), \quad \lambda \in [0, 1] \end{cases} \quad (5.15)$$

e confrontare le sue traiettorie con quelle dei sistemi autonomi

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -F(x, y) + e \end{cases} \quad (5.16)$$

e

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -F(x, y) + E. \end{cases} \quad (5.17)$$

Se, come dicevamo prima, $e < 0$ ed $E > 0$, vale la limitazione

$$e \leq \lambda e(t) \leq E$$

e pertanto nel semipiano $y < 0$ le traiettorie del sistema 5.15 entrano in quelle di 5.16 ed escono da quelle di 5.17, e viceversa nel semipiano $y > 0$.

I due sistemi di confronto hanno lo stesso ritratto di fase del sistema 5.3, in quanto la presenza di una costante (E o e) non influisce sul comportamento all'infinito della F .

Ciò è vero, in particolare, nel caso di cui ci vogliamo occupare, corrispondente alla scelta $F(x, y) = p_{2k+1}(x)y + \gamma x$, per il quale la precedente affermazione può essere suffragata anche dall'applicazione del teorema di Filippov, da cui traiamo, per i sistemi 5.16 e 5.17 con la F definita come sopra, le stesse conclusioni valide per 5.5. Grazie a questa osservazione possiamo affermare che, nel nostro caso particolare, conosciamo nei dettagli il ritratto di fase di questi due sistemi; in particolare è nota l'esistenza di una separatrice, spezzata in due rami generalmente non contigui, e la proprietà che ciascuno di essi necessita di un tempo infinito per essere percorso.

Indichiamo con $u : t \rightarrow u(t)$ una soluzione periodica dell'equazione 5.13, per qualche $\lambda \in [0, 1]$ e con \underline{u} il minimo delle intersezioni del punto $(u(t), \dot{u}(t))$ con l'asse y . Abbiamo il

Teorema 5.3 *Supponiamo che il sistema 5.17 abbia una separatrice Γ che giace nel terzo (quarto) quadrante e attraversa il semiasse $y < 0$. Se il tempo lungo la separatrice da $x = 0$ fino al punto all'infinito (dal punto all'infinito fino a $x = 0$) è maggiore di T , allora esiste $R > 0$ tale che*

$$\min u(t) > -R, \quad \underline{u} > -R.$$

Dim. Supponiamo che la separatrice Γ del sistema 5.17 giaccia nel terzo quadrante (se Γ giace nel quarto procediamo in maniera simmetrica). Per le ipotesi, Γ è il grafico di una funzione continua e differenziabile $y = -a(x)$, con $a : (-\infty, 0] \rightarrow]0, +\infty)$. Poco sopra, dal confronto delle pendenze, abbiamo ricavato che le traiettorie del sistema 5.15 escono da

quelle di 5.17. Ciò significa, in particolare, che se ad un certo istante t_0 si ha $u(t_0) = 0$ e $\dot{u}(t_0) \leq -a(0) < 0$, allora $\dot{u}(t) \leq -a(u(t))$, per ogni $t \geq t_0$, cioè se la soluzione T -periodica di 5.15 attraversa il semiasse $y < 0$ sotto la separatrice, allora deve rimanere sotto di essa per tutto il tempo che segue.

A questo punto abbiamo che, poiché $u(t)$ è una soluzione periodica e perciò la traiettoria associata (u, \dot{u}) deve attraversare l'asse y in qualche punto di ordinata $y > 0$ (ad esempio nell'istante \bar{t}), deve essere $\dot{u}(t_0) > -a(0)$.

Essendo $u(t)$ soluzione di un sistema non autonomo, essa può attraversare l'asse y anche in istanti diversi da $t_0 + jT$ e da $\bar{t} + jT$. Sia t_1 tale che $u(t_1) = 0$ e $\dot{u}(t_1) < 0$ (se fosse $\dot{u}(t_1) \geq 0$, avremmo già trovato in modo banale il minimo delle intersezioni del punto $(u(t), \dot{u}(t))$ con l'asse y , dato da $\underline{u} = \dot{u}(t_0)$). Per le osservazioni precedenti, abbiamo che $-a(0) < \dot{u}(t_1) < 0$. Pertanto $\underline{u} > -a(0)$.

Sia $t_2 > t_1$ il primo istante dopo t_1 in cui la traiettoria $(u(t), \dot{u}(t))$ incontra il semiasse $x < 0$. Sempre per il fatto che una soluzione periodica deve rimanere strettamente al di sopra della separatrice Γ , abbiamo

$$\dot{u}(t) > -a(u(t)), \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Ora, dividendo per $-a(u(t))$, possiamo scrivere

$$1 > \frac{\dot{u}(t)}{-a(u(t))}.$$

Quindi, integrando tra t_1 e t_2 e usando la periodicità di $t \rightarrow u(t)$, che implica che la lunghezza dell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ sia inferiore al periodo, abbiamo

$$\begin{aligned} T > t_2 - t_1 &> \int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{u}(t)}{-a(u(t))} dt = \\ &= \int_{u(t_2)}^{u(t_1)} \frac{du}{a(u)} = \int_{u(t_2)}^0 \frac{du}{a(u)} = \int_{-K}^0 \frac{du}{a(u)}, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $u(t_2) = -K$.

L'ultimo integrale risulta il tempo Δt necessario per percorrere sulla separatrice Γ il tratto di orbita compreso tra il punto $(0, -a(0))$ e $(-K, -a(-K))$. Infatti, per definizione, $\dot{x}(t) = y(t) = -a(x(t))$, cioè si ha

$$1 = \frac{\dot{x}(t)}{-a(x(t))}$$

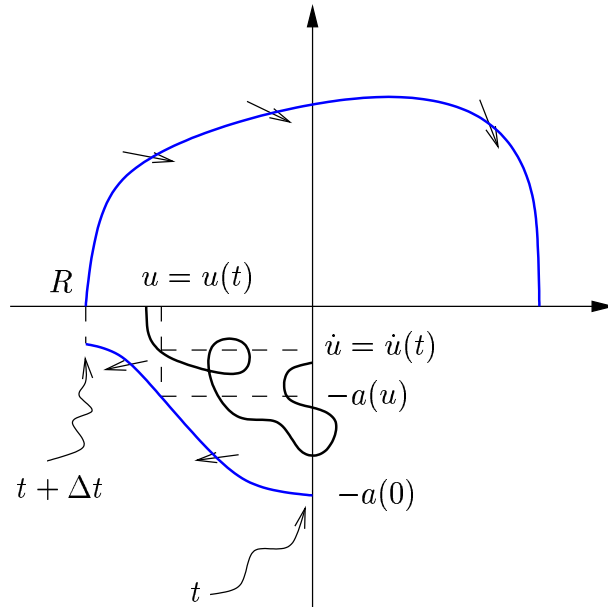


Figura 5.12: le limitazioni a priori

lungo Γ e perciò, integrando tra 0 e Δt , abbiamo che il tempo Δt sarà valutato come

$$\Delta t = \int_0^{\Delta t} \frac{\dot{x}(t)}{-a(x(t))} dt = \int_{-R}^0 \frac{dx}{a(x)}.$$

Ora per l'ipotesi sul tempo lungo la separatrice, sappiamo che esiste $R > 0$, tale che il tempo lungo la separatrice da $x = 0$ a $x = -R$ è più grande di T e questo, per l'ultima formula, significa esattamente che

$$\int_{-R}^0 \frac{dx}{a(x)} > T.$$

A questo punto possiamo concludere che $\min u(t) = u(t_2) > -R$. Infatti, se ciò non fosse vero e $u(t_2) \leq -R$, avremmo

$$T > t_2 - t_1 > \int_{u(t_2)}^0 \frac{du}{a(u)} \geq \int_{-R}^0 \frac{dx}{a(x)} > T,$$

assurdo.

Per finire, è sufficiente osservare che possiamo sempre fare in modo che sia $R > a(0)$. In questo modo risulta anche $\underline{u} > -R$ (vedi figura 5.12).

Concettualmente, la ricerca dei limiti a priori può essere divisa in due parti. Supponiamo dapprima che (u, \dot{u}) sia una soluzione T -periodica che all'istante iniziale attraversa il semiasse $y < 0$. Sia \tilde{t} l'istante in cui

essa taglia il semiasse $x < 0$. Allora $\dot{u}(\tilde{t}) = 0$. Supponiamo di essere riusciti a trovare una costante $Q > 0$ per cui

$$u(\tilde{t}) > -Q \quad \text{all'istante } \tilde{t} \text{ tale che } \dot{u}(\tilde{t}) = 0, u(\tilde{t}) < 0. \quad (5.18)$$

A partire da $(u(\tilde{t}), 0)$, la traiettoria entra in una zona invariante, delimitata, come si sa, nel semipiano $y > 0$, dalla traiettoria (x_E, y_E) di 5.17 che all'istante iniziale passa per $(-Q, 0)$, e, nel 4° quadrante, dalla traiettoria (x_e, y_e) di 5.16 che all'istante iniziale passa per la prima intersezione (in ordine cronologico) di (x_E, y_E) con il semiasse $x > 0$. Se vale 5.18, questa considerazione ci assicura l'esistenza di una costante R per cui vale la condizione 5.12 limitatamente alle porzioni di (u, \dot{u}) che si trovano nel 1°, 2° e 4° quadrante.

Supponiamo ora di essere in possesso di una limitazione di tipo 5.12 per la porzione di (u, \dot{u}) che sta nel 3° quadrante; allora la validità di 5.18 è assicurata e dunque è sufficiente trovare questa per ottenere una limitazione valida su tutto il piano. Se fossimo, invece, in possesso di una limitazione per la porzione di (u, \dot{u}) che sta nel 4° quadrante, possiamo ripetere queste considerazioni, seguendo la soluzione a ritroso nel tempo. Dunque il teorema 5.3 è sufficiente per fornire le condizioni di applicabilità del lemma 5.2.

Si osservi che, ai fini della determinazione della costante R , (x_e, y_e) non contribuisce poiché su tale traiettoria x_e è decrescente; mentre siamo già in possesso di una limitazione in senso verticale (vedi figura 5.12).

5.3.1 L'enunciato

Prendiamo ora in considerazione l'equazione 5.3, che è un caso particolare dell'equazione 5.11 corrispondente alla scelta $F(x, y) = p_{2k+1}(x)y + \gamma x$. Poco sopra abbiamo messo in evidenza alcune proprietà del sistema 5.17 associato, grazie alle quali tale sistema verifica le ipotesi del teorema 5.3; risulta così dimostrata la validità del seguente enunciato:

L'equazione

$$\ddot{x} + p_{2k+1}(x)\dot{x} + \gamma x = e(t)$$

con $\gamma > 0$, $e : t \rightarrow e(t)$ continua, limitata e T -periodica e $k \geq 0$, ha almeno una soluzione T -periodica per ogni polinomio $p_{2k+1}(x)$ di grado dispari ≥ 1 .

Consideriamo ora un'equazione differenziale simile a 5.3, ma con un polinomio di grado pari al posto di p_{2k+1} , con l'ipotesi, peraltro non restrittiva, che abbia il coefficiente del termine di grado massimo (a_{2k}) positivo. È noto che in questo caso l'equazione forzata

$$\ddot{x} + p_{2k}(x)\dot{x} + \gamma x = e(t)$$

ammette almeno una soluzione T -periodica. Infatti rientra nella casistica delle equazioni forzate 1.2 in cui la funzione f determina un effettivo smorzamento al sistema, per le quali esiste un'ampia letteratura, a cominciare dal teorema di Massera [16] (che ipotizzò $f(x) \geq c > 0$, per qualche costante c e $|x|$ grande), per non parlare dei lavori classici di Gormory [11], Mawhin [17], Graef [12] e molti altri. Tuttavia si tratta di un risultato che si può ottenere anche con metodi geometrici e, in particolare, con il metodo classico della "trappola". Potremmo applicare anche il teorema 5.3, ma non c'è bisogno di andare a cercare una limitazione per le soluzioni periodiche, dal momento che esiste una limitazione per tutte le soluzioni. Si tratta di costruire la zona invariante, tenendo presente che il sistema equivalente all'equazione autonoma associata gode della proprietà K . Per fare ciò, consideriamo la zero-isoclina $y = H(x) = -\gamma x/p_{2k}$. Nel caso in cui abbia asintoti devo scartare la porzione contenuta nella fascia compresa tra il più piccolo e il più grande zero di p_{2k} ; restano due rami in cui $H(x) > 0$ dalla parte delle x negative e $H(x) < 0$ dalla parte delle x positive. Servendoci per il seguito di notazioni già usate in precedenza, cominciamo a dire che lavoreremo con il sistema con E nel semipiano $y > 0$ e con il sistema con e nel semipiano $y < 0$, e con le rispettive isocline che hanno un andamento simile a $H(x)$ e lo stesso comportamento all'infinito. Si procede ora come per la dimostrazione del teorema 3.1 scegliendo un punto sul ramo più a sinistra dell'isoclina, $P_\alpha(\alpha, H_E(\alpha))$ di ascissa $\alpha < 0$, con la proprietà che la sua ordinata è maggiore delle ordinate di tutti i punti dell'isoclina che lo precedono. È noto che la traiettoria $(x_E, y_E; P_\alpha)$ proviene dall'infinito senza incontrare l'asse x per valori negativi del tempo e che esiste un istante, $t_1 > 0$, nel quale incontra per la prima volta il semiasse $x > 0$; sia $(x_\alpha, 0)$ il punto di intersezione. Scegliamo ora un punto sul ramo più a destra dell'isoclina, $P_\beta(\beta, H_e(\beta))$ di ascissa $\beta > 0$, e seguiamo la traiettoria $(x_e, y_e; P_\beta)$ fino alla sua intersezione con il semiasse $x < 0$ in $(x_\beta, 0)$. La zona invariante è delimitata dalla porzione di traiettoria (x_E, y_E) compresa tra i punti di ascissa x_β e x_α , dal segmento della retta $x = x_\alpha$, compreso tra l'asse x e la traiettoria (x_e, y_e) ; dalla porzione di quest'ultima, compresa tra i punti di

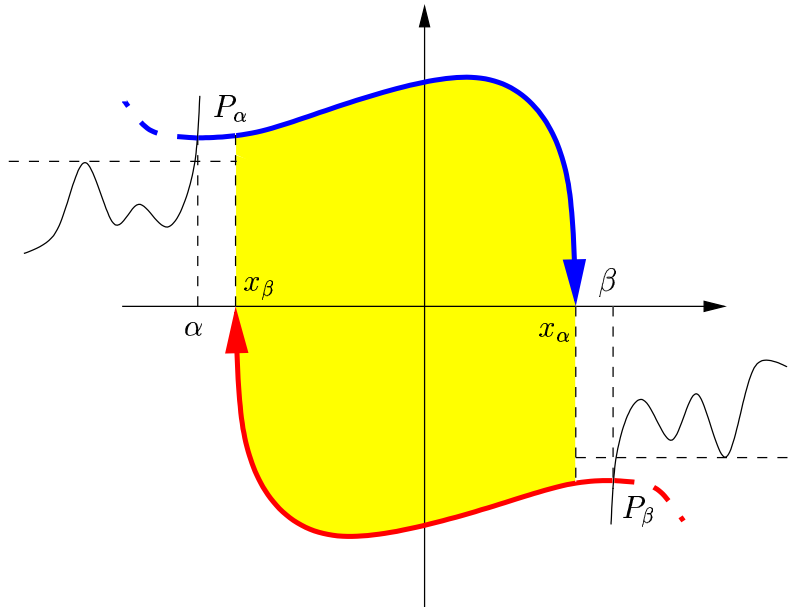


Figura 5.13: *l'enunciato con k pari: costruzione della zona invariante*

ascissa x_α e x_β e, infine dal segmento di retta $x = x_\beta$ compreso tra l'asse x e la traiettoria (x_E, y_E) (vedi figura 5.13). Applichiamo il teorema di Brouwer e otteniamo l'esistenza di almeno una soluzione T -periodica. Pertanto possiamo arricchire il nostro enunciato e riformularlo in modo più generale (si veda anche [29]).

Data l'equazione forzata

$$\ddot{x} + p_k(x) \dot{x} + \gamma x = e(t), \quad \text{con } \gamma > 0,$$

per ogni polinomio non identicamente nullo di grado k qualsiasi (≥ 0), per ogni funzione continua e periodica $e(t)$ di qualsiasi periodo T , esiste almeno una soluzione T -periodica.

Osservazione. Il caso $p(x) \equiv 0$ non è compreso nel campo di applicabilità dell'enunciato, non tanto perché quest'ultimo non è uno strumento adeguato a trattarlo, quanto per il fatto che, come è noto, l'equazione

$$\ddot{x} + \gamma x = e(t)$$

non è detto che ammetta soluzioni periodiche. Un esempio classico in tal senso è dato dall'equazione

$$\ddot{x} + x = \sin t.$$

Per la grande arbitrarietà lasciata a tutti i parametri che identificano il tipo di equazione considerata, il nostro enunciato costituisce un risultato molto elegante, che purtroppo non è nuovo. Infatti può essere dedotto da un teorema presentato in [21], in cui è stato dimostrato che l'equazione di Liénard forzata con g soddisfacente alla condizione sul segno $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} g(s) \operatorname{sgn}(s) = +\infty$ ha almeno una soluzione T -periodica, a condizione che

$$\lim_{s \rightarrow +\infty(-\infty)} g(s)/F(s) = 0. \quad (5.19)$$

In particolare, applicando [21] al modello polinomiale, abbiamo che l'equazione $\ddot{x} + p_{2k+1}(x)\dot{x} + q_{2l+1}(x) = e(t)$ ha almeno una soluzione armonica se $2l < 2k + 1$ (oppure se $2l = 2k + 1$ e T è sufficientemente piccolo, in un senso che viene determinato dai coefficienti dei termini di grado massimo dei polinomi). Nel nostro caso, oltre alla condizione sul segno della g , è verificata anche questa condizione, in quanto $l = 0$. Pertanto l'applicazione di un metodo innovativo ha portato a un risultato non nuovo; ci riferiamo all'enunciato nella sua prima formulazione. Ma neppure nella sua forma più generale, quella del secondo enunciato, si è aggiunto un elemento di novità, poiché anche quest'ultimo può essere dedotto da [21]. Tuttavia è proprio in relazione al lavoro appena citato che emerge un aspetto interessante. L'ipotesi 5.19, su cui questo è basato, presenta un'asimmetria, a cui la dimostrazione analitica di [21] non riesce a dare una motivazione se non in termini di funzionalità al raggiungimento del risultato. La dimostrazione geometrica seguita può essere messa in relazione con tale ipotesi e fornisce l'interpretazione cercata, per lo meno nel modello polinomiale, di cui il caso considerato rappresenta un esempio emblematico. Se vale 5.19, cioè se $2l < 2k + 1$ nel modello polinomiale, allora vale anche la condizione $l < 2k + 1$, che, secondo Filippov, conduce all'esistenza di un ramo di separatrice. Inoltre, vale anche $\limsup g(x)/f(x) < +\infty$, da cui deriva la proprietà per quest'ultimo di essere percorso in tempo infinito. Ora, sappiamo che, per ottenere l'esistenza di soluzioni T -periodiche, è sufficiente un solo ramo di separatrice con tale proprietà e questo requisito è garantito singolarmente da ciascuna delle due possibilità in cui si articola l'ipotesi 5.19. Concludiamo questa parte con un esempio, in cui l'alternativa vale in senso stretto.

Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + x^3\dot{x} + g(x) = e(t)$$

con $g(x)$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \leq 0 \\ x^7 & \text{per } x \geq 0. \end{cases}$$

Si ha

$$\frac{g(x)}{F(x)} = \begin{cases} \frac{4}{x^3} & \text{per } x > 0 \\ 4x^3 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

pertanto $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{F(x)} = 0$, mentre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{F(x)} = +\infty$.

Studiamo il ritratto di fase del sistema equivalente. L'isoclina

$$H(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{per } x < 0 \\ -x^4 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

è compresa nel semipiano $y < 0$. Per $x > 0$ applichiamo il teorema di Filippov e otteniamo l'intersezione indietro nel tempo di tutte le traiettorie che partono da un punto del semiasse $y < 0$, mentre per $x < 0$ consideriamo il comportamento all'infinito dell'isoclina. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} H(x) = 0,$$

da cui l'esistenza di un ramo di separatrice che ha come punto all'infinito Q_1 , uno dei punti all'infinito dell'asse x (vedi figura 5.14).

L'esistenza di un solo ramo di separatrice nel terzo quadrante si allinea perfettamente all'interpretazione della condizione 5.19, che nella fattispecie vale in maniera esclusiva da una parte sola.

Concludiamo questo paragrafo con un approfondimento sulla proprietà della separatrice di essere percorsa in tempo infinito. Ovviamente questa proprietà non sussiste, quando la separatrice è illimitata in y . Ciò è quanto si può verificare nell'esempio seguente.

Esempio. Si consideri l'equazione polinomiale

$$\ddot{x} + 3x\dot{x} + x(x^2 + 1) = e(t),$$

in cui f e g sono dispari e le traiettorie del sistema autonomo associato risultano simmetriche. Continuiamo lo studio di quest'ultimo e determiniamo l'isoclina, data da

$$H(x) = -\frac{x^2 + 1}{3},$$

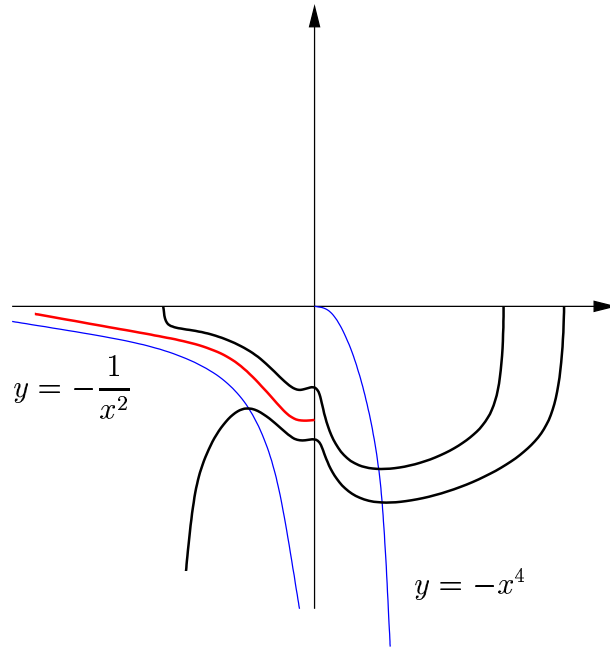


Figura 5.14: *esempio: un sistema con un solo ramo di separatrice*

il segno di \dot{y} e quindi l'andamento di campo. In questo caso le traiettorie che tagliano l'isocline, tagliano anche l'asse x , avanti o indietro nel tempo. Dall'applicazione del teorema di Filippov deduciamo l'esistenza di una separatrice situata nel semipiano $y < 0$, che dovrà necessariamente trovarsi al di sotto dell'isocline. La conoscenza della soluzione illimitata $x = \tan t$ per l'equazione autonoma ci porta alla conoscenza di una traiettoria del sistema, data da

$$y = -x^2 - 1,$$

che, essendo illimitata, costituisce una limitazione inferiore per la separatrice $y = a(x)$. Dunque si ha (vedi figura 5.15)

$$-x^2 - 1 < a(x) < -\frac{x^2 + 1}{3}. \quad (5.20)$$

Il tempo di percorrenza di un'orbita $y = \gamma(x)$ si trova procedendo come nella dimostrazione del teorema 5.3, e cioè tenendo conto che si ha $\dot{x} = \gamma(x)$ e successivamente integrando rispetto al tempo ambo i membri dell'uguaglianza $1 = \frac{\dot{x}}{\gamma(x)}$. Se con T_a e T_o indichiamo rispettivamente il tempo di percorrenza della separatrice e il tempo di percorrenza dell'orbita $y = -x^2 - 1$, da 5.20 abbiamo

$$T_a = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a(x)} < \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{dx}{x^2 + 1} = T_o,$$

e quindi $T_a < 2\pi$.

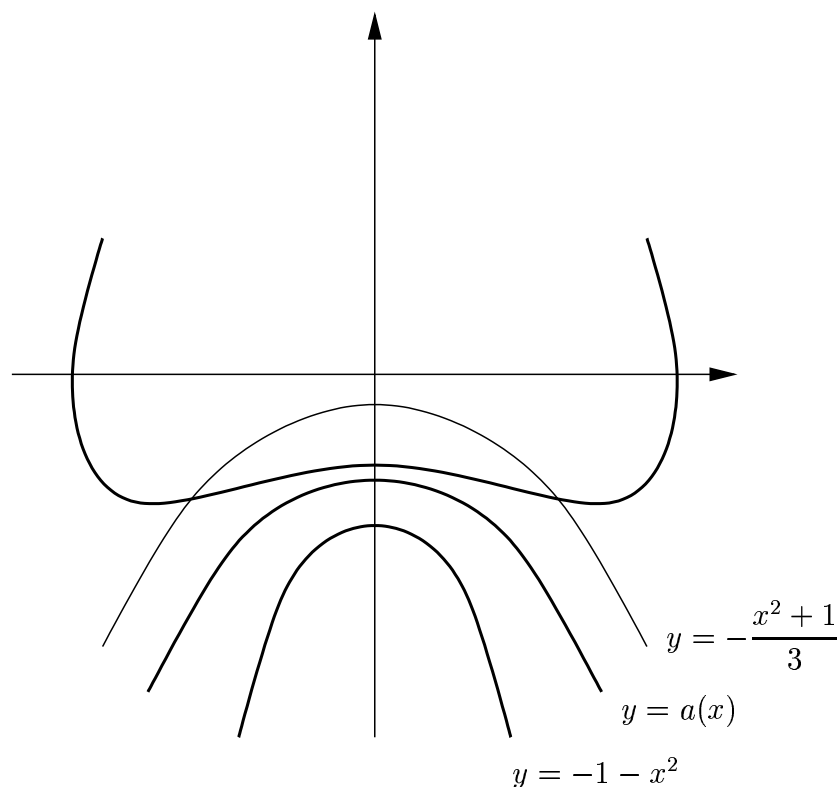


Figura 5.15: *esempio: un sistema con separatrice percorsa in tempo finito*

Quando il sistema autonomo associato ammette una separatrice che viene percorsa in tempo finito non è detto che l'equazione forzata non ammetta soluzioni periodiche, anzi, è proprio il teorema 5.3 stesso che ne stabilisce l'esistenza, purché il periodo del termine forzante sia sufficientemente piccolo, ossia inferiore al tempo di percorrenza della separatrice. Per una trattazione più completa e precisa riguardo alla casistica dell'esempio appena considerato e, più in generale, per una rassegna di risultati sull'equazione di Liénard forzata, applicabili al modello polinomiale, rimandiamo al lavoro [29], che segnaliamo anche per la ricca bibliografia.

5.4 Passaggio a equazioni forzate di tipo più generale

Consideriamo l'**equazione differenziale forzata** 5.11

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = e(t),$$

con termine forzante periodico, che è una generalizzazione dell'equazione di Liénard dello stesso tipo. Come si sa, quest'ultima è stata studiata negli spazi di funzioni con metodi topologici, grazie ai quali sono stati ot-

tenuti i maggiori risultati riguardo all'esistenza di soluzioni T -periodiche. Il caso specifico $F(x, \dot{x}) = f(x)\dot{x} + g(x)$ offre il vantaggio che il termine contenente \dot{x} è la derivata rispetto al tempo di una funzione, solitamente indicata con $F(x)$, cioè

$$\dot{F}(x) = f(x)\dot{x}.$$

Questa proprietà è alla base dell'approccio con i metodi topologici e, venendo meno nel caso della generica $F(x, \dot{x})$, preclude la possibilità di estendere tali metodi al caso dell'equazione 5.11. Al contrario, l'idea che è stata sviluppata nel nostro semplice caso polinomiale e, cioè, quella delle limitazioni a priori, è alla base del lavoro [30] in via di pubblicazione, che, insieme a [31], affronta con successo attraverso metodi geometrici il problema della ricerca di soluzioni T -periodiche per l'equazione 5.11.

Entrando brevemente nel merito, possiamo dire che vengono fornite condizioni per l'applicabilità del teorema 5.3, in particolare condizioni per l'esistenza di una separatrice (o di un ramo di essa) nel semipiano $y < 0$ e condizioni per caratterizzare l'origine come un centro illimitato nella direzione del semiasse $y > 0$ (assenza di separatrice nell'omonimo semipiano), o viceversa.

In realtà tale metodo, ed altri verso i quali si sta attualmente muovendo la ricerca in questo campo, dovrebbero più propriamente essere definiti metodi "misti", in quanto seguono la via geometrica, ma si servono di proprietà topologiche, come ad esempio quelle relative al grado di Brouwer.

Comunque sia, resta il fatto che l'idea che abbiamo seguito per dimostrare il nostro enunciato acquista valore alla luce degli sviluppi successivi e il semplice caso polinomiale di cui ci siamo occupati ha il merito di averla suscitata.

Nel contesto del futuro lavoro della ricerca in questo campo, si possono inserire altri due teoremi, oggetto di attenzione da parte degli studiosi, che vogliamo enunciare a conclusione della discussione intrapresa. Laddove si riuscisse a creare condizioni per l'applicabilità di uno di essi, si verrebbe a espandere la casistica delle equazioni forzate per cui la questione dell'esistenza di soluzioni T -periodiche si è risolta positivamente.

Data l'equazione 5.11, con $e(t)$ funzione continua, limitata e T -periodica, supponiamo che le sue soluzioni siano univocamente determinate dalle condizioni iniziali e che possano essere estese all'intervallo $0 \leq t \leq T$. In

queste ipotesi la mappa di Poincaré è definita su tutto \mathbb{R}^2 . Come sappiamo, il problema dell'esistenza di soluzioni T -periodiche è equivalente al problema dell'esistenza di punti fissi della mappa di Poincaré ϕ .

Sia $z(t) = (x(t), y(t))$ una traiettoria del sistema equivalente nel piano delle fasi. Per mettere in evidenza che $z(t)$ è la soluzione che all'istante iniziale passa per il punto z_0 , scriveremo $z(t, z_0)$. In questo contesto, vale il seguente risultato [34], di cui, rispetto alla fonte, diamo la versione in \mathbb{R}^2 .

Teorema di Poincaré-Bohl. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e limitato contenente l'origine. Dato $z_0 \in \partial\Omega$, consideriamo la semiretta uscente dall'origine passante per z_0 ; sia $l(z_0)$ la semiretta che si ottiene da questa escludendo i punti comuni a $\overline{\Omega}$ (si ha $z_0 \notin l(z_0)$).*

Se vale la condizione

$$\forall z_0 \in \partial\Omega \Rightarrow \phi(z_0) \notin l(z_0),$$

allora

\exists almeno un punto fisso per ϕ nell'insieme $\overline{\Omega}$.

In figura 5.16 (a) è riportata una situazione ammessa e in figura 5.16 (b) una non ammessa all'applicazione del teorema di Poincaré-Bohl. Poiché andremo a cercare una soluzione periodica fra le traiettorie che "girano", quello che si richiede è che non venga fatto un giro completo nel tempo T . Nelle figure 5.16 (c) e 5.16 (d) sono rappresentate le due possibili alternative in questo senso.

Si osservi che il teorema di Poincaré-Bohl generalizza il teorema di Brouwer. Infatti, se ϕ è un'applicazione di Ω in sé, ovviamente non si può avere $\phi(z_0) \in l(z_0)$ perché la semiretta è esterna a Ω , e quindi il teorema di Brouwer verifica le ipotesi del teorema appena enunciato.

Le condizioni di applicabilità di questo teorema sono legate al tempo, come nel caso del lemma 3.2. Qui il concetto del tempo è implicato nel senso che, se riusciamo a individuare una regione sulla quale il moto è abbastanza lento, come potrebbe essere in un intorno del punto critico $(0, 0)$, otteniamo il risultato sperato.

Il teorema di Poincaré-Bohl può essere sfruttato con successo nell'esempio dell'oscillatore armonico, ovvero dell'equazione

$$\ddot{x} + k^2 x = e(t) = e(t + 2\pi),$$

con $k \notin \mathbb{N}$ (il caso $\ddot{x} + k^2 x = e(t) = e(t + 2\pi)$, con $k \in \mathbb{N}^+$, come già osservato, non ha soluzione).

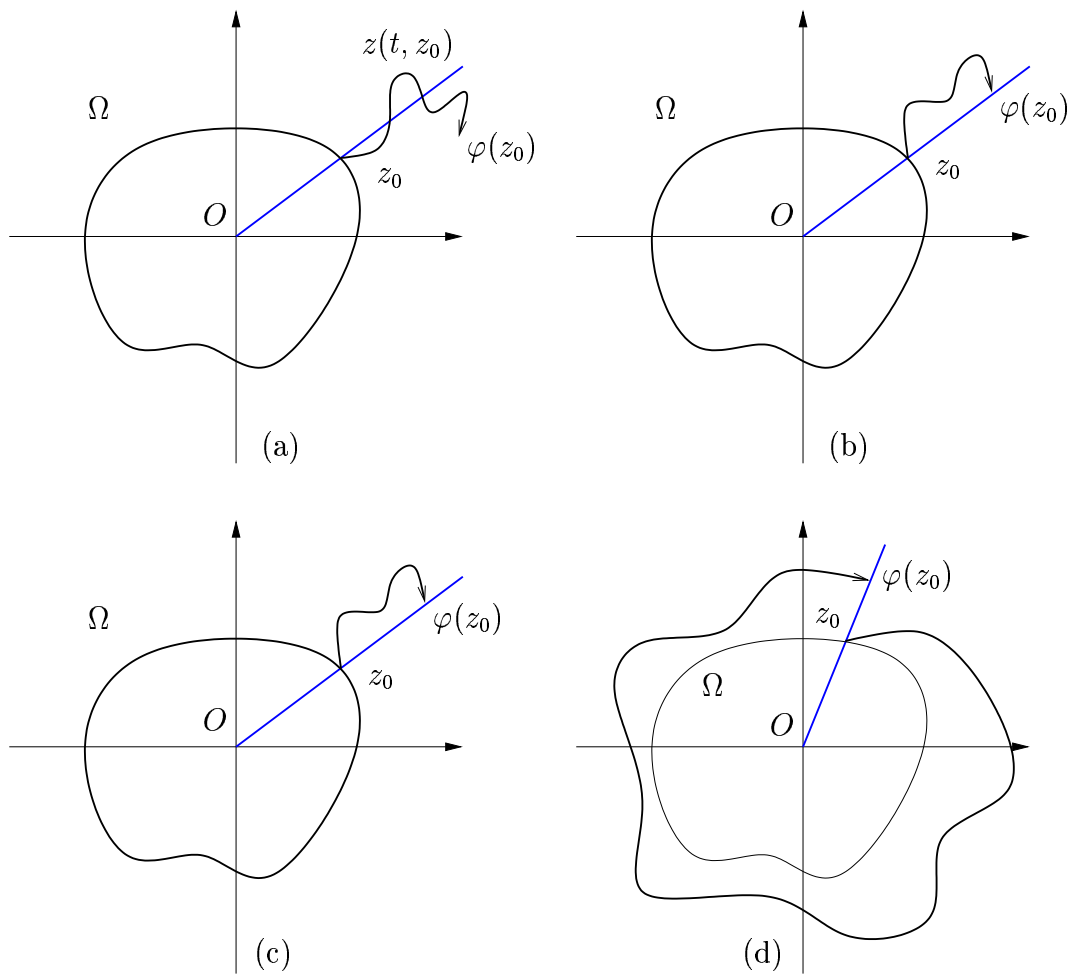


Figura 5.16: teorema di Poincaré-Bohl: costruzione di Ω

Con le stesse premesse fatte al teorema di Poincaré-Bohl, si può arrivare ad enunciare un teorema di continuità di Krasnosel'skiĭ [13] con cui risulta provata l'esistenza di almeno una soluzione T -periodica dell'equazione 5.11 per ogni termine forzante limitato e T -periodico.

Il teorema di Krasnosel'skiĭ, come il precedente, è valido in \mathbb{R}^m , e quindi utilizzabile per dimostrare l'esistenza di soluzioni di equazioni differenziali di grado m , ma viene qui riportato nella versione in \mathbb{R}^2 , alla quale possiamo dare un'interpretazione geometrica.

Teorema di Krasnosel'skiĭ.

Data l'equazione differenziale 5.11, supponiamo che

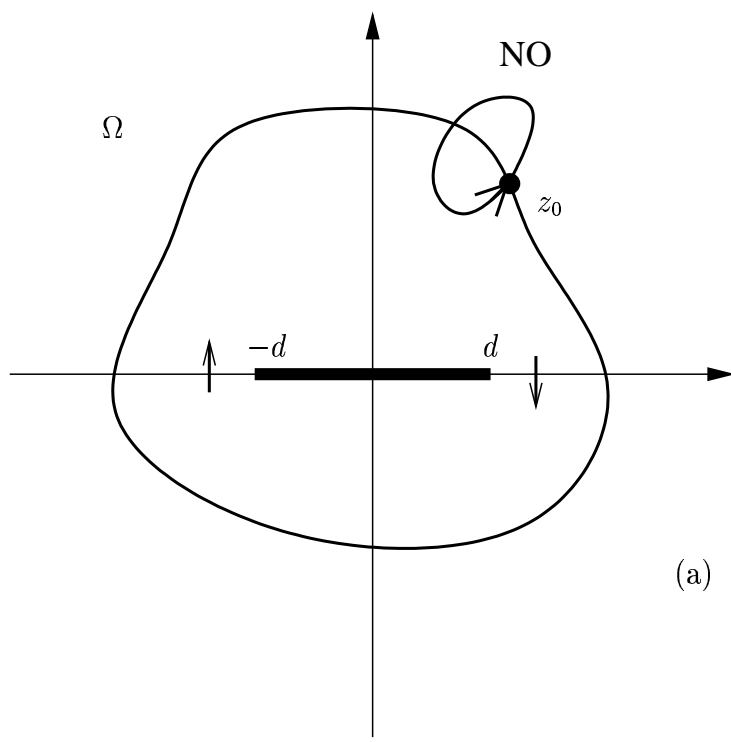
- $\exists d > 0$ tale che $F(x, 0)x > 0$ per $|x| \geq d$ (ipotesi di segno sulla F , che determina il desiderato andamento di campo);

-esista $\Omega \subset E^2$, aperto e limitato, $\Omega \supset [-d, d] \times \{0\}$, con la proprietà che

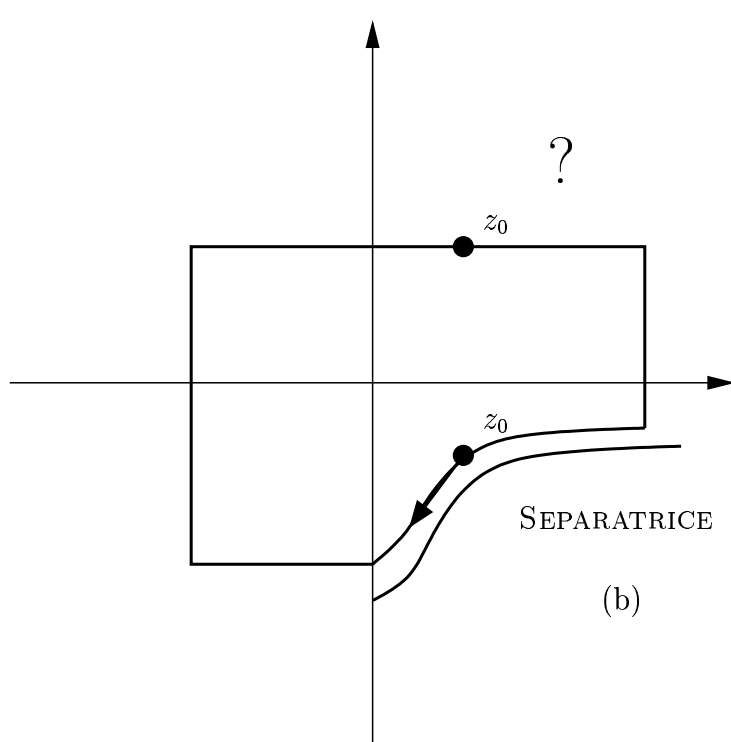
$\forall z_0 \in \delta\Omega$ e $\forall t : 0 < t < T$, sia $z(t, z_0) \neq z_0$ (si vuole escludere che vi siano soluzioni sulla frontiera con periodo più piccolo di T ; a tale proposito si veda una situazione non ammessa in figura 5.17 (a))

allora $\exists z_0 \in \overline{\Omega}$ tale che $\phi(z_0) = z_0$.

Per poter applicare questo teorema è necessario costruire una zona che sia delimitata da un insieme di punti con velocità di percorrenza molto bassa. In presenza di una separatrice, o di un ramo di essa, possiamo scegliere una traiettoria ad essa vicina per delimitarne una porzione; quindi la zona che stiamo cercando potrebbe essere del tipo rappresentato in figura 5.17 (b), ma esistono casi in cui la velocità in alcuni punti di essa, ad esempio nel I quadrante, è elevata e la costruzione di Ω resta al momento un problema aperto.



(a)



(b)

Figura 5.17: *teorema di Krasnosel'skiĭ*

Bibliografia

- [1] F. ALBRECHT e GAB. VILLARI, Periodic orbits of planar polynomial Liénard systems with a small parameter, *Lecture Notes in Mathematics* **1475** (1991) 41-53
- [2] J. BEBERNES e M. MARTELLI, Periodic solutions for Liénard systems, *Boll. Un. Mat. Ital.* (5), **16-A** (1979), 398-405
- [3] T.R. BLOWS, N.G. LLOYD, The number of small-amplitude limit cycles of Liénard equations, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **95** (1984), 359-366
- [4] A. CAPIETTO, J. MAWHIN e F. ZANOLIN, Continuation theorems for periodic perturbation of autonomous systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* **329** (1992), 41-72
- [5] L. CESARI, "Asymptotic behaviour and stability problems in ordinary differential equations", Springer-Verlag, Berlin, 1963
- [6] L. CESARI , R. KANNAN, Periodic solutions in the large of Liénard systems with forcing terms, *Boll. Un. Mat. Ital.* (6), **1-A** (1982), 217-224
- [7] L.A. CHERKAS, Estimation of the number of limit cycles of autonomous system, *Differential Equations* **13** (1977), 529-547
- [8] R. CONTI, Soluzioni periodiche dell'equazione di Liénard generalizzata. Esistenza ed unicità, *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) **7** (1952), 111-118
- [9] R. CONTI e G. SANSONE, "Nonlinear Differential Equations", Pergamon Press, London, 1964
- [10] A.F. FILIPPOV, Sufficient conditions for the existence of stable limit cycles of second order equations, *Mat. Sb.* **30** (1952), 171-180 [in Russian]

- [11] R.E. GOMORY, Critical points at infinity and forced oscillations, in: "Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations III", *Annals of Math. Studies* **46**, Princeton University Press, 1956; pp.85-126
- [12] J.R. GRAEF, On the generalized Liénard equation with negative damping, *J. Differential Equations* **12** (1972), 34-72
- [13] M.A. KRASNOSEL'SKIĬ, "The Operator of Translation along the Trajectories of Differential Equations", Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1968
- [14] S. LEFSCHETZ, "Differential Equations: Geometric Theory", Wiley Interscience, New York, 1963
- [15] A. LINS, W. DE MELO e C.C. PUGH, On Liénard's equation, *Lecture Notes in Mathematics* **597**, Springer-Verlag, New York 1976; pp. 335-357
- [16] J.L. MASSERA, The existence of periodic solutions of systems of differential equations, *Duke Math. J.* **17** (1950), 457-475
- [17] J. MAWHIN, Degré topologique et solutions périodiques des systèmes différentiels nonlineaires, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **38** (1969), 308-398
- [18] J. MAWHIN, An extension of a theorem of A.C. Lazer on forced nonlinear oscillations, *J. Math. Anal. Appl.* **40** (1972), 20-29
- [19] J. MAWHIN, "Topological Degree Methods for Nonlinear Boundary Value Problems" CBMS 40, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1979
- [20] K. ODANI, The limit cycle of the Van der Pol equation is not algebraic, *J. Differential Equations* **115** (1995), 146-152
- [21] P. OMARI, GAB. VILLARI e F. ZANOLIN, Periodic solutions of the Liénard equation with one-sided growth restriction, *J. Differential Equations* **67** (1987), 278-293
- [22] L.M. PERKO, Bifurcation of limit cycles: geometric theory, *Proc. Amer. Math. Soc.* **114** (1992), 225-236
- [23] R. REISSIG, Extension of some results concerning the generalized Liénard equation, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **104** (1975), 269-281

- [24] R. REISSIG, G. SANSONE e R. CONTI, "Qualitative Theorie Nichtlinearer Differentialgleichungen", Cremonese, Roma, 1963
- [25] GAB. VILLARI, On the existence of periodic solutions for Liénard's equation, *Nonlinear Analysis, TMA* **7** (1983), 71-78
- [26] GAB. VILLARI, On the qualitative behaviour of solutions of Liénard equation, *J. Differential Equations* **67** (1987), 269-277
- [27] GAB. VILLARI, Periodic solutions of Liénard's equation, *J. Math. Analysis Appl.* **86** (1982), 379-386
- [28] GAB. VILLARI e M. VILLARINI, Limit cycles and bifurcation from a separatrix for a polynomial Liénard system in the plane, *Differential Equations and Dynamical Systems* **5** (1997), 423-437
- [29] GAB. VILLARI e F. ZANOLIN, A continuation theorem with applications to periodically forced Liénard equations in presence of a separatrix, (in corso di stampa su) *Ann. Mat. Pura Appl.*
- [30] GAB. VILLARI e F. ZANOLIN, A geometric approach with applications to periodically forced dynamical systems in the plane, (in corso di stampa su) *Proceedings of RIMS Symposium on Qualitative Theory of Functional Equations and its Applications to Mathematical Science*
- [31] GAB. VILLARI e F. ZANOLIN, A geometric approach to periodically forced dynamical systems in presence of a separatrix, (in preparazione)
- [32] GAB. VILLARI e F. ZANOLIN, On a dynamical system in the Liénard plane. Necessary and sufficient conditions for the intersection with the vertical isocline and applications, *Funkcial. Ekvac.* **33** (1990) 19-38
- [33] GAB. VILLARI e F. ZANOLIN, On forced nonlinear oscillations of a second order equation with strong restoring term, *Funkcial. Ekvac.* **31** (1988), 383-395
- [34] F. ZANOLIN, Continuation theorems for the periodic problem via the translation operator, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, **54** (1996), 1-23