Esercizi per *Mathematica*

Corso di Laurea in Matematica - Facoltà di Scienze

Corso di Geometria III – dott. Fabio Vlacci

A.A. 2008/2009 - aprile2009

ESERCIZIO 1: Sia dato il toro di equazioni parametriche

$$(u, v) \mapsto ((3 + \cos u) \cos v, (3 + \cos u) \sin v, \sin u).$$

Verificare che il punto P di coordinate $(3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}, 1)$ appartiene al toro e determinare i parametri (u, v) che lo individuano.

Rappresentare graficamente il piano σ per P parallelo al piano $\varrho ... \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + z = 0$ assieme ad una porzione del toro.

Determinare i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale del toro nel punto P.

Determinare l'equazione del piano tangente al toro nel punto P.

Calcolare la curvatura normale della curva intersezione tra il piano σ e il toro nel punto P.

ESERCIZIO 2: Verificare che i coefficienti della seconda forma fondamentale dell'ellissoide di equazioni parametriche

$$(u, v) \mapsto (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u)$$

non sono invarianti per cambi di parametrizzazione, Come definire i simboli (di Riemann–Christoffel) Γ^i_{jk}??

Consideriamo una superficie regolare S parametrizzata da

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

ove le tre functioni x, y, z sono C^∞ in un dominio U del piano u, v. La supposta regolarità di S garantisce che è ben definito il campo di versori normale a S

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}$$

e che $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ è un sistema di riferimento (o base) mobile di $\mathbb{R}^3$. È possibile esprimere le derivate parziali seconde di $\mathbf{x}$ rispetto a questa base come segue

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}_{uu} & = & \Gamma^1_{11}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{r}_v + e\mathbf{N} \\ \mathbf{x}_{uv} & = & \Gamma^1_{12}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{r}_v + f\mathbf{N} \\ \mathbf{x}_{vv} & = & \Gamma^1_{22}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{r}_v + g\mathbf{N} \end{array}$$

Notate che i coefficienti e, f, g sono proprio quelli della seconda forma fondamentale.

Il Teorema di Schwarz assicura che

$$(\mathbf{x}_{uu})_v = (\mathbf{x}_{uv})_u\,.$$

Derivando quindi le espressioni sopra si ricava

$$\left(\Gamma^1_{11}\right)_v \mathbf{x}_u + \Gamma^1_{11}\mathbf{x}_{uv} + \left(\Gamma^2_{11}\right)_v \mathbf{x}_v + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_{vv} + e_v\mathbf{N} + e\mathbf{N}_v = \left(\Gamma^1_{12}\right)_u \mathbf{x}_u + \Gamma^1_{12}\mathbf{x}_{uu} + \left(\Gamma^2_{12}\right)_u \mathbf{x}_v + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_{uv} + f_u\mathbf{N} + f\mathbf{N}_u$$

Consideriamo la componente rispetto a $\mathbf{N}$; essa si scrive

$$f\Gamma^1_{11} + g\Gamma^2_{11} + e_v = e\Gamma^1_{12} + f\Gamma^2_{12} + f_u.$$

Osserviamo ancora che

$$\langle \mathbf{x}_{uu} | \mathbf{x}_u \rangle = \frac{1}{2}E_u;$$

d'altro canto

$$\langle \mathbf{x}_{uu} | \mathbf{x}_u \rangle = \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F.$$

In questo modo, con un po' di calcoli, si esprimono tutti i coefficienti Γ^i_{jk} in funzione dei coefficienti della sola prima forma fondamentale e, mettendo insieme tutte queste relazioni, si ricavano le equazioni (dette di Codazzi-Mainardi) proposte in verifica nell'ultimo esercizio.