# I - NOZIONI INTRODUTTIVE

## 1 Insiemi

Il concetto di insieme verrà assunto in forma 'ingenua', e la relativa teoria descritta prescindendo da una formulazione assiomatica della stessa. Si tratta, per quanto attiene ai fini di questo corso, essenzialmente di fissare un linguaggio. I fondamenti della teoria degli insiemi sono in genere oggetto di studio nei corsi superiori di logica. Dunque assumeremo come primitivi i concetti di *oggetto* (o *ente*), *insieme, elemento, appartenenza.*

In genere utilizzeremo lettere maiuscole, come $A, X, S, ...$ per indicare gli insiemi, e lettere minuscole, come $a, a', x, y, \alpha, \ldots$ per gli elementi di un insieme. Alcuni insiemi particolarmente importanti hanno un simbolo in esclusiva. Ad esempio $\mathbb{N}$ indicherà sempre e solo l'insieme di tutti i numeri *naturali*, cioé dei numeri $0, 1, 2, 3, 4 \ldots$.

Altri insiemi per i quali riserviamo un simbolo speciale sono:

- l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri **interi**; cioé l'insieme dei numeri $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$
- l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri **razionali**; cioé l'insieme dei numeri $\frac{m}{n}$ dove $m, n \in Z$ e $n \neq 0$;
- l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri **reali**;
- l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri **complessi**.

La costruzione rigorosa di questi insiemi a partire dall'insieme $\mathbb{N}$ è argomento che per ora non trattiamo; per il momento dovrebbe essere sufficiente la nozione che si ha di essi dalle scuole superiori.

Il simbolo $\in$ indica l'appartenenza di un elemento ad un certo insieme; $a \in X$ significa cioè che $a$ è un elemento dell'insieme $X$. Con $\notin$ si intende la non appartenenza: $a \notin X$ significa che $a$ **non** è un elemento dell'insieme $X$. Ad esempio, $2 \in \mathbb{N}$ mentre $\pi \notin \mathbb{N}$.
Un specifico insieme verrà di solito descritto mediante informazioni delimitate da parentesi graffe $\{....\}$. L'informazione può essere costituita dall'indicazione diretta degli elementi dell'insieme, oppure dalle proprietà che individuano gli elementi. Ad esempio, l'insieme i cui elementi sono i numeri naturali 2, 3, 4 può essere descritto nelle seguenti maniere (e, naturalmente, in molte altre):

$$\{2, 3, 4\}, \quad \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 2 \leq x \leq 4\}.$$

Nella seconda modalità, la barra verticale $|$ segnala che ciò che segue è la proprietà che serve ad individuare gli elementi. A volte, invece della barra, si usano i 'due punti'. Ad esempio $\{\ 2x\ :\ x \in \mathbb{N}\ \}$ è l'insieme dei numeri interi pari.

È opportuno osservare che né l'ordine con cui sono descritti gli elementi di un insieme, né eventuali ripetizioni, modificano l'insieme. Ad esempio, le scritture:

$$\{1, 2\}, \quad \{1, 2, 1\}, \quad \{2, 1\}$$

descrivono tutte il medesimo insieme.
Inoltre, è bene sapere che gli elementi di un insieme possono anche essere di 'natura' diversa; ad esempio, gli *elementi* dell'insieme $X = \{1, \{1\}\}$, sono il *numero intero* 1 e *l'insieme* $\{1\}$ ($X$ contiene quindi due elementi distinti).

È conveniente contemplare anche la possibilità che un insieme sia privo di elementi. In matematica è frequente la possibilità di considerare proprietà che non sono soddisfatte da alcun oggetto (in un certo universo). Tali proprietà definiscono quindi insiemi privi di elementi. Ad esempio, l'insieme dei numeri interi pari che sono potenza di tre non contiene alcun elemento.
L'insieme privo di elementi si denota con $\emptyset$ e si chiama **insieme vuoto**. Ad esempio, è vuoto l'insieme delle soluzioni reali del sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ xy = 1 \end{cases}$$

(questo si puó scrivere così: $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ 2x + 3y = 3 \text{ e } xy = 1\ \} = \emptyset$ ).

Assumeremo, almeno per il momento, come primitivo anche il concetto di numero di elementi di un insieme.
Sia $X$ un insieme; diremo che $X$ è un insieme **finito** se $X$ contiene un numero finito di elementi, e in tal caso, se il numero di elementi di $X$ è $n$, scriviamo $|X| = n$. Ad esempio, $|\{1, 2, 6, 8\}| = 4$ , e $|\emptyset| = 0$. Se invece $X$ contiene un numero infinito di elementi, diremo che $X$ è un insieme **infinito** e scriveremo $|X| = \infty$. Ad esempio $|\mathbb{N}| = \infty$. Il simbolo $|X|$ (che quindi, per quanto riguarda un approccio introduttivo, sarà $\infty$ oppure un numero naturale), lo chiameremo **ordine** (o *cardinalità*) dell'insieme $X$.

### Paradosso di Russell

Anche se si tratta di una insidia che non si presenterà nell'ambito della nostra utilizzazione del linguaggio della teoria degli insiemi, può essere interessante riportare che non tutto ciò che ci si presenta intuitivamente come una "**proprietà**" può essere utilizzato per definire un insieme. L'esempio più famoso ed importante per la nascita di quella che sarà poi la teoria assiomatica degli insiemi è il cosiddetto *Paradosso di Russell*.
Per illustrare il paradosso, diciamo che un insieme è *normale* se non contiene se stesso come elemento (si può pensare ad esempio all'insieme di tutti i concetti astratti: questo è, direi, un concetto astratto esso stesso, quindi contiene se stesso come elemento, non è dunque un insieme normale). Intutivamente, l'essere normale ci appare senz'altro come una proprietà 'sensata'; ma cosa accade quando la utilizziamo per definire un insieme ? Definiamo cioè l'insieme $N$ i cui elementi sono tutti gli insiemi normali. Quindi

$$N = \{X \mid X \text{ è un insieme e } X \notin X\ \}.$$

A questo punto, se $N$ è un insieme, esso è o non è normale. Analizzate le due possibilità: entrambe conducono ad una contraddizione. Quindi $N$ non è un insieme; non ogni proprietà costituisce una definizione.

Il paradosso di Russel mostra che "qualche cosa non si può fare". Il concetto di insieme va quindi specificato in modo più accurato. Il punto del paradosso non è tanto l'immaginarsi come possa avvenire che un insieme contenga se stesso (generando un processo all'infinito), quanto il fatto che una certa relazione tra enti (quella di appartenenza) venga usata in modo "autoreferenziale". Questo è alla base di molti altri 'paradossi logici', come quello del mentitore, del barbiere, etc. che alcuni già conosceranno e nei quali non si fa riferimento a processi all'infinito. Per essere assolutamente moderni vediamo un esempio riferito alla rete Internet.
Come si sa, le varie pagine Internet accessibili in rete contengono diverse connessioni (links) ad altre pagine; tali connessioni sono di norma segnalate da una o più parole sottolineate. Ora, vi sono pagine che contengono un link a se stesse (tipicamente le cosiddette "home pages"), altre (la maggioranza) che non contengono un link a se stesse. Il numero totale di pagine (nel mondo, o possiamo limitarci ad ambiti più ristretti - non cambia nulla) è comunque finito. Supponiamo che io (il Grande Fratello) chieda al mio capo tecnico di allestire una pagina Internet che contenga un link a tutte e sole le pagine che non hanno link a se stesse... Se ci pensate un attimo, vedete che una tale pagina non si può fare, e che tale "paradosso" è molto simile al paradosso di Russell.

### Sottoinsiemi

Un insieme $S$ si dice **sottoinsieme** dell'insieme $A$, e si scrive

$$S \subseteq A$$

se ogni elemento di $S$ appartiene ad $A$.

Se $S \subseteq A$ si dice anche che $S$ è *incluso* in $A$. Ad esempio $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $\{1,6\} \subseteq \{6,3,2,1\}$, mentre $\{1,6\} \not\subseteq \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 2 \text{ divide } x\}$, dove chiaramente $S \not\subseteq A$ significa che $S$ non è sottoinsieme di $A$, ovvero che esiste almeno un elemento $x$ tale che $x \in S$ ma $x \notin A$.

Dalla definizione è immediato che ogni insieme è un sottoinsieme di se stesso, così come che l'insieme vuoto è un sottoinsieme di qualunque insieme. Quindi:

$$\textit{per ogni insieme } A : \quad \emptyset \subseteq A \quad e \quad A \subseteq A.$$

È anche chiaro che l'inclusione tra insiemi è una proprietà *transitiva*; ovvero, se $A, B, C$ sono insiemi con $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, allora $A \subseteq C$.

Due insiemi $A$ e $B$ sono **uguali** (si scrive $A = B$ ) se ogni elemento di $A$ è elemento di $B$ e viceversa. Quindi $A = B$ se è soddisfatta la *doppia inclusione* : $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Spesso, per provare l'uguaglianza di due insiemi si dimostra appunto la doppia inclusione; esempi di questo metodo si trovano nelle dimostrazioni delle Proposizioni delle pagine seguenti. Chiaramente, per provare invece che due insiemi **non sono** uguali è sufficiente trovare un elemento di uno dei due insiemi che non appartiene all'altro.

**Esempi** : - $\{1,2,3\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{10}\}$;

- $\{1,\{1\}\} \neq \{1\}$;
- $\{1\} \not\subseteq \{\{1\},\{2\}\}$;
- $\{\emptyset,\{\emptyset\},\emptyset\} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

Un sottoinsieme $S$ dell'insieme $A$ si dice **proprio** se non coincide con $A$, ovvero $S \subseteq A$ e $S \neq A$. Per indicare che $S$ è un sottoinsieme proprio di $S$ talvolta scriveremo $S \subset A$.

**Insieme delle Parti**

Dato un insieme $A$, allora la collezione di tutti i sottoinsiemi di $A$ costituisce un insieme, detto **insieme della parti** (o insieme potenza) dell'insieme $A$, che si denota con $\mathcal{P}(A)$. Quindi

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

**Esempi** : Se $X = \{1, 2\}$, allora $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$;

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$;

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Osserviamo che, per ogni insieme $X$ : $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ e $X \in \mathcal{P}(X)$.

Più avanti in questi appunti dimostreremo il seguente fatto:

$$\text{Se } A \text{ è un insieme finito e } |A| = n, \text{ allora } |\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

**ESERCIZI**

**1.** Si dica quali fra le seguenti affermazioni sono vere.

- $\emptyset \in \{\emptyset, 2\}$;
- $\emptyset \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $\{1\} \in \{1, 2\}$;
- $\{\{1\}\} \subseteq \{1, 2\}$;
- $\emptyset = \{ x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 < 1 \}$;
- $\emptyset = \{ x \mid \{1, x\} = \{1, 2, 3\} \}$;

**2.** Si descrivano gli insiemi $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

**3.** Siano $A, B$ insiemi. Si dimostri che $A \subseteq B$ se e solo se $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

## 2 Operazioni tra insiemi

**Definizione**. Siano $A$ e $B$ due insiemi. Si chiama **unione** degli insiemi $A$ e $B$, e si denota con $A \cup B$, l'insieme i cui elementi sono gli oggetti che appartengono ad almeno uno tra $A$ e $B$. Quindi

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

**Definizione**. Si chiama **intersezione** degli insiemi $A$ e $B$, e si denota con $A \cap B$, l'insieme i cui elementi sono gli oggetti che appartengono sia ad $A$ che a $B$. Quindi

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Ad esempio, se $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{2x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq x \leq 3\ \}$, allora

$$A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 4, 6\ \} \quad \text{e} \quad A \cap B = \{0\};$$

se $P = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 2 \text{ divide } x\}$ è l'insieme dei numeri naturali pari, e
$D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 2 \text{ non divide } x\}$ è l'insieme dei numeri naturali dispari, allora

$$P \cup D = \mathbb{N} \quad \text{e} \quad P \cap D = \emptyset.$$

Le seguenti osservazioni, che è utile formulare, sono immediate:
Siano $A, B$ insiemi; allora

$A = A \cup \emptyset \quad ; \quad \emptyset \cap A = \emptyset \quad ; \quad A \subseteq A \cup B \quad ; \quad A \cap B \subseteq A;$

$A = A \cup B$ se e solo se $B \subseteq A$; $\qquad A = A \cap B$ se e solo se $A \subseteq B$.

Le operazioni di unione e intersezione di insiemi soddisfano ad alcune importanti proprietà che sono di facile verifica.

**Proposizione 2.1** *Siano $A, B$ e $C$ insiemi. Allora*

**(1)** $A \cup A = A$;

**(2)** $A \cup B = B \cup A$;

**(3)** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

*Dimostrazione.* Le proprietà (1) e (2) si verificano immediatamente.
Vediamo la dimostrazione della proprietà (3); proveremo l'uguaglianza degli insiemi $A \cup (B \cup C)$ e $(A \cup B) \cup C$ mediante la verifica della doppia inclusione.
Sia $x$ un elemento di $A \cup (B \cup C)$; allora $x$ appartiene ad $A$ o $x$ appartiene a $B \cup C$. Ora, se $x \in A$ , allora $x \in A \cup B$ e quindi $x \in (A \cup B) \cup C$; se $x \in B \cup C$, allora $x \in B$ e dunque $x \in A \cup B$, oppure $x \in C$; comunque si ha $x \in (A \cup B) \cup C$. Abbiamo quindi provato che ogni elemento di $A \cup (B \cup C)$ appartiene a $(A \cup B) \cup C$; cioè che

$$A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C.$$

Allo stesso modo si dimostra l'inclusione inversa: $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$; e quindi vale l'uguaglianza.

La proprietà (2) è la proprietá **commutativa** dell'unione; mentre la (3) è la proprietà **associativa** dell'unione.

**Proposizione 2.2** *Siano $A, B$ e $C$ insiemi. Allora*

**(1)** $A \cap A = A$;

**(2)** $A \cap B = B \cap A$;

**(3)** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

*Dimostrazione.* Per esercizio.

Quindi anche l'operazione di intersezione di insiemi gode delle proprietà commutativa (2), e associativa (3).

Due insiemi $A$ e $B$ si dicono *disgiunti* se non hanno elementi in comune, cioè se $A \cap B = \emptyset$.

La prossima proposizione descrive le importanti proprietà **distributive** tra l'unione e l'intersezione di insiemi

**Proposizione 2.3** *Siano $A, B$ e $C$ insiemi. Allora*

**(1)** $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

**(2)** $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

*Dimostrazione.* (1). Sia $x \in A \cap (B \cup C)$. Allora $x \in A$ e $x \in B \cup C$; possiamo scrivere (la parentesi graffa indica, come avviene per i sistemi di equazioni, che entrambe le condizioni devono essere verificate):

$$\begin{cases} x \in A \\ x \in B \ \text{ o } \ x \in C \end{cases}$$

Abbiamo quindi due possibilità:

$$\begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} ; \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases}$$

Dunque $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$; cioè $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Abbiamo provato quindi che

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Viceversa, sia $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Allora

$$\begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases}$$

Nel primo caso $x \in A$ e $x \in B$, allora $x \in A$ e $x \in B \cup C$, e quindi $x \in A \cap (B \cup C)$; allo stesso modo, se $x \in A$ e $x \in C$, allora $x \in A \cap (B \cup C)$. Dunque

$$(A \cap B) \cup (A \cap C \subseteq A \cap (B \cup C)$$

La doppia inclusione è verificata e l'uguaglianza (1) é provata.

La dimostrazione di (2) è simile ed è lasciata per esercizio.

**Definizione**. Siano $A$ e $B$ due insiemi. Si chiama **differenza** di $A$ e $B$, e si denota con $A \setminus B$, l'insieme i cui elementi sono gli oggetti che appartengono ad $A$ ma non appartengono a $B$. Quindi

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \text{ e } \ x \notin B \ \}.$$

Ad esempio, se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$, allora

$$A \setminus B = \{1, 3\} \quad \text{e} \quad B \setminus A = \{2x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \neq 1\}.$$

L'esempio mostra che la differenza tra insiemi non è commutativa; sono immediate le seguenti proprietà:
siano $A, B$ insiemi, allora

$$A \setminus B \subseteq A \quad ; \quad A \setminus A = \emptyset \quad ; \quad A \setminus \emptyset = A.$$

**Proposizione 2.4** (leggi di De Morgan) *Siano $A, B$ e $C$ insiemi. Allora*

**(1)** $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$*;*

**(2)** $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

*Dimostrazione.* (1). Sia $x \in A \setminus (B \cup C)$, allora $x \in A$ e $x \notin B \cup C$. Quindi

$$x \in A \quad , \quad x \notin B \quad \text{e} \quad x \notin C.$$

In particolare, perció:

$$\begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x \in A \\ x \notin C \end{cases}$$

da cui segue, rispettivamente, $x \in A \setminus B$, e $x \in A \setminus C$.
Dunque: $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Abbiamo così provato l'inclusione:

$$A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Viceversa, sia $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; allora $x \in A \setminus B$ e $x \in A \setminus C$. Cioé:

$$x \in A \quad , \quad x \notin B \quad \text{e} \quad x \notin C.$$

Ora, da $\begin{cases} x \notin B \\ x \notin C \end{cases}$, segue $x \notin B \cup C$, e pertanto $x \in A \setminus (B \cup C)$; dimostrando così l'inclusione inversa

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$$

e dunque l'uguaglianza $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.

La dimostrazione di (2) è lasciata per esercizio.

**Definizione**. Siano $A$ e $B$ due insiemi. Si chiama **differenza simmetrica** di $A$ e $B$, e si denota con $A \Delta B$, l'insieme i cui elementi che appartengono ad uno e un solo degli insiemi $A$ e $B$. Quindi

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Ad esempio, se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, allora $A \Delta B = \{1, 2, 4, 5\}$.

La dimostrazione delle principali proprietà della differenza simmetrica è lasciata per esercizio. Si osservino in particolare le proprietà (4), (5), e (6) che, rispettivamente, dicono che la differenza simmetrica è commutativa, che è associativa, e che l'intersezione è distributiva rispetto alla differenza simmetrica.

**Proposizione 2.5** *Siano $A, B$ e $C$ insiemi. Allora*

**(1)** $A\Delta A = \emptyset$;

**(2)** $A\Delta\emptyset = A$;

**(3)** $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

**(4)** $A\Delta B = B\Delta A$;

**(5)** $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$;

**(6)** $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

**Esercizio.** Siano $A, B, C$ insiemi. Si dimostri che:

a) $A\triangle(B \cup C) \subseteq (A\triangle B) \cup C$.

b) $A\triangle(B \cup C) = (A\triangle B) \cup C$ se e solo se $A \cap C = \emptyset$.

*Soluzione.* (a) $(B \cup C) \setminus A \subseteq (B \setminus A) \cup (C \setminus A) \subseteq (B \setminus A) \cup C \subseteq (A\triangle B) \cup C$ . Inoltre, poichè $B \subseteq B \cup C$ si ha $A \setminus (B \cup C) \subseteq A \setminus B \subseteq (A\triangle B)$.

Dunque: $A\triangle(B \cup C) = (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \cup C) \setminus A) \subseteq (A\triangle B) \cup C$.

(b) Sia $A\cap C = \emptyset$ ; per il punto (a) è sufficiente provare l'inclusione $(A\triangle B)\cup C \subseteq A\triangle(B \cup C)$. Sia quindi $x \in (A\triangle B) \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup C$ ; se $x \in A$, allora $x \notin B$ e (per ipotesi) $x \notin C$ , quindi $x \in A \setminus (B \cup C) \subseteq A\triangle(B \cup C)$ ; se invece $x \in (B \setminus A) \cup C$ allora $x \notin A$ (sempre perchè $A \cap C = \emptyset$), e quindi $x \in (B \cup C) \setminus A \subseteq A\triangle(B \cup C)$.

Dunque $(A\triangle B) \cup C \subseteq A\triangle(B \cup C)$.

Viceversa, sia $A \cap C \neq \emptyset$, e sia $x \in A \cap C$. Allora, poichè $x \in C$ si ha $x \in (A\triangle B) \cup C$ ; ma $x \notin A \setminus (B \cup C)$ (perchè $x \in C$ ) e $x \notin (B \cup C) \setminus A$ (perchè $x \in A$); quindi $x \notin (A \setminus (B \cup C)) \cup ((B \cup C) \setminus A) = A\triangle(B \cup C)$.

Dunque $(A\triangle B) \cup C \nsubseteq A\triangle(B \cup C)$.

## Unioni e intersezioni generalizzate

Se $A$, $B$ e $C$ sono insiemi; allora la proprietà associativa della intersezione consente di poter scrivere senza ambiguità $A \cap B \cap C$, intendendo, indifferentemente $(A \cap B) \cap C$ ovvero $A \cap (B \cap C)$. Chiaramente si ha l'uguaglianza:

$$A \cap B \cap C = \{ \ x \mid x \in A, \ x \in B, \ x \in C \ \}.$$

Similmente, per quanto concerne l'unione; avremo:

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = \{ \ x \mid x \in A \ \text{ o } \ x \in B \ \text{ o } \ x \in C \ \}.$$

Questo si estende ad un numero qualunque di insiemi; se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono insiemi; allora

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{ \ x \mid x \in A_i \ \text{ per qualche } \ i = 1, 2, \ldots, n \ \}.$$

e

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{ \ x \mid x \in A_i \ \text{ per ogni } \ i = 1, 2, \ldots, n \ \}.$$

Ora, il passo naturale è passare ad una famiglia infinita di insiemi. Sia $F$ una famiglia di insiemi. Si definisce, rispettivamente, l'unione e l'intersezione degli insiemi della famiglia $F$ nel modo seguente:

$$\bigcup_{A \in F} A = \{x \mid x \in A \ \text{ per qualche } \ A \in F \ \}.$$

$$\bigcap_{A \in F} A = \{x \mid x \in A \ \text{ per ogni } \ A \in F \ \}.$$

Nella pratica, gli insiemi di una famiglia sono in genere *indicizzati*; cioè è dato un insieme $I$ , detto di *indici*, ed una corrispondenza tra gli insiemi della famiglia $F$ e gli elementi di $I$, per cui all'elemento $i \in I$ corrisponde l'insieme $A_i \in F$. Si scrive che $F$ è la famiglia degli insiemi $(A_i)_{i \in I}$ e quindi per unione e intersezione si usa la notazione:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \ \text{ per qualche } \ i \in I \ \}.$$

$$\bigcap_{A_i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \ \text{ per ogni } \ i \in I \ \}.$$

Forse la cosa risulterà più chiara dopo alcuni esempi.

**Esempi.** 1) Per ogni $i \in \mathbb{N}$ sia $M_i = \{x \mid x \in \mathbb{N} \ , \ x \leq i \ \}$. In questo caso, l'insieme degli indici è l'insieme dei numeri naturali e, ad esempio, $M_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Allora:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i = \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i = \{0\}.$$

Infatti, sia $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$ ; allora chiaramente $X \subseteq \mathbb{N}$ (dato che, per ogni $i \in \mathbb{N} \ : \ M_i \subseteq \mathbb{N}$ ); viceversa, se $n \in \mathbb{N}$ allora $n \in M_n$ e quindi $n \in X$ , dunque $\mathbb{N} \subseteq X$.
L'intersezione è chiara, dato che, per ogni $i \in \mathbb{N} : \{0\} \subseteq M_i$ e $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i \subseteq M_0 = \{0\}$.

2) Per ogni $i \in \mathbb{N}$ sia $N_i = \{x \mid x \in \mathbb{N} \ , \ x \geq i \ \}$. Allora:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i = \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i = \emptyset.$$

Infatti, l'unione è chiara dato che $N_0 = \mathbb{N}$; per quanto riguarda l'intersezione, essa è chiaramente contenuta nell'insieme $\mathbb{N}$, ma, per ogni $x \in \mathbb{N}$ abbiamo che $x \notin N_{x+1}$, quindi, a maggior ragione, $x \notin \bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i$.

3) Sia $I = \mathbb{Q}_{>0} = \{a \mid a \in \mathbb{Q} \ , a > 0 \ \}$ l'insieme dei numeri razionali strettamente positivi. Per ogni $a \in I$ sia $X_a = \{x \mid x \in \mathbb{R} \ , \ x^2 \geq a \ \}$. Allora:

$$\bigcup_{a \in I} X_a = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \text{e} \qquad \bigcap_{a \in I} X_a = \emptyset.$$

Infatti, per ogni $a \in I \ : \ X_a \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; viceversa, sia $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , allora $y^2 > 0$ ed è noto che quindi esiste un numero *razionale* $b$ tale che $0 < b \leq y^2$ , quindi $y \in X_b \subseteq \bigcup_{a \in I} X_a$ ; ciò prova che

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq \bigcup_{a \in I} X_a$$

e quindi l'uguaglianza.

Per provare l'affermazione riguardo alla intersezione, dopo aver osservato che ovviamente essa è un sottoinsime di $\mathbb{R}$, notiamo che, se $y$ è un numero reale, certamente esiste un numero razionale positivi $a$ tale che $y^2 < a$ ; ma allora $y \notin X_a$ e quindi $y \notin \bigcap_{a \in I} X_a$. Dunque $\bigcap_{a \in I} X_a = \emptyset$.

## Prodotto cartesiano di insiemi

Siano $A$ e $B$ insiemi; siano $a \in A$ e $b \in B$; il simbolo $(a, b)$ è la **coppia ordinata** la cui prima coordinata (o componente) è l'elemento $a$ e la seconda è l'elemento $b$. Per definizione, due coppie ordinate $(a, b)$ e $(a', b')$ (con $a, a' \in A,\ b, b' \in B$) sono uguali *se e solo se* $a = a'$ e $b = b'$. Questa, come qualcuno avrà sospettato, non è una definizione rigorosa di coppia ordinata. Rimediamo dicendo che, con le notazioni di sopra, se $a \in A$ e $b \in B$, allora $(a, b)$ è, per definizione, $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Il lettore cerchi di capire perché proprio questa definizione (e non altre "più semplici") è quella che esprime correttamente quanto abbiamo in mente quando pensiamo ad una "coppia ordinata", e solo tanto.

La collezione di tutte le coppie ordinate la cui prima componente appartiene all'insieme $A$ e la seconda componente appartiene all'insieme $B$ è un insieme, che si denota con $A \times B$, e si chiama **prodotto cartesiano** di $A$ per $B$. Quindi:

$$A \times B = \{ \ (a, b) \mid a \in A \ , b \in B \ \}.$$

Ad esempio, se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{0, 1, \pi\}$; allora

$$A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (1, \pi), (2, 0), (2, 1), (2, \pi)\}.$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , che si denota anche con $\mathbb{R}^2$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate di numeri reali.

Osservazioni. Siano $A$ , $B$ insiemi.

- $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$;
- se $A \neq \emptyset \neq B$ , allora $A \times B = B \times A$ se e solo se $A = B$;
- se $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$ , allora $A' \times B' \subseteq A \times B$;
- se $|A| = n$ e $|B| = m$, allora $|A \times B| = nm$.

La definizione puó essere estesa da due ad un numero finito arbitrario n di insiemi. Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ insiemi. L'insieme

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{ \ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \ \text{ per ogni } \ i = 1, 2, \ldots, n \ \}$$

è l'insieme delle n-uple ordinate la cui i-esima componenete appartiene all'insieme $A_i$. Se tutti gli insiemi $A_i$ coincidono con l'insieme $A$, allora si parla di insieme delle n-uple ordinate di $A$, e si denota tale insieme con $A^n$. Ad esempio, $\mathbb{R}^n$ è l'insieme di tutte le n-uple ordinate di numeri reali. Chiaramente due n-uple sono uguali se e solo se tutte le componenti sono corrispondentemente uguali; inoltre valgono osservazioni simili a quelle fatte sopra per le coppie, la cui esplicita formulazione lasciamo per esercizio[1].

[1] Notiamo che, da un punto di vista formale, se $A$, $B$ e $C$ sono insiemi, allora $(A \times B) \times C \neq A \times B \times C \neq A \times (B \times C)$.

**ESERCIZI**

**1.** Siano $A$, $B$ e $C$ insiemi. Si provi che $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ se e solo se $A \subseteq C$.

**2.** Siano $A$ e $B$ insiemi. Si provi che

$$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B);$$

e si mostri che, nel caso della unione, in genere non vale l'uguaglianza.

**3.** Siano $A$ e $B$ insiemi. Si provi che $A \setminus B = B \setminus A$ se e solo se $A = B$.

**4.** Siano $A$ e $B$ insiemi. Si provi che $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

**5.** Siano $A$, $B$ e $C$ insiemi. Si provi che $A \setminus B = A \setminus C$ se e solo se $A \cap B = A \cap C$.

**6.** Siano $A$, $B$ e $C$ insiemi. Si provi che $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

**7.** Per ogni intero $n$, sia $D_n = \{d \mid d \in \mathbb{Z} \text{ e } d \text{ divide } n\}$. Si provi che

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\mathbb{Z} \setminus D_n) = \mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}.$$

**8.** Siano $A$, $B$ e $C$ insiemi. Si provi che

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

**9.** Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq nx \}$. Determinare

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n \quad \text{e} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n.$$

# 3 Applicazioni

Siano $A$ e $B$ insiemi. Una **applicazione** (o funzione) di $A$ in $B$ è una legge che ad **ogni** elemento di $A$ associa, o fa corrispondere, **uno ed un solo** elemento dell'insieme $B$. Per dire che $f$ è una applicazione di $A$ in $B$ si scrive

$$f : A \longrightarrow B.$$

e, se all'elemento $a \in A, f$ fa corrispondere l'elemento $b \in B$, si scrive $b = f(a)$; l'elemento $b$ si chiama allora *immagine* di $a$ tramite $f$.

Questa notazione si riferisce ad una generica applicazione di $A$ in $B$. Volendo descrivere invece una specifica applicazione occorre anche enunciare la legge che agli elementi di $A$ associa elementi di $B$. È conveniente illustrare le notazioni in questo caso mediante un esempio. Supponiamo di volere introdurre la applicazione (che vogliamo chiamare $f$)

dall'insieme dei numeri interi nell'insieme dei numeri naturali che ad ogni numero intero associa il suo quadrato. Si usa allora uno dei due schemi seguenti:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & z & \mapsto & z^2 \end{array}$$

oppure

$$f: \ \mathbb{Z} \ \longrightarrow \ \mathbb{N} \quad \text{definita da, per ogni } z \in Z \ : \ f(z) = z^2.$$

Se $f: A \longrightarrow B$ è una applicazione, si dice che $A$ è il **dominio** di $f$ e che $B$ è il **codominio** di $f$.

Due applicazioni, $f: A \longrightarrow B$ e $g: A' \longrightarrow B'$, sono **uguali** se

$$A = A' \ , \ B = B' \ \text{ e per ogni } \ a \in A \ \text{ si ha } \ f(a) = g(a).$$

Il **grafico** $\Gamma(f)$ di una applicazione $f: A \longrightarrow B$ è il sottoinsieme del prodotto $A \times B$:

$$\Gamma(f) = \{ \ (a,b) \mid a \in A \ , b \in B \ \text{ e } \ b = f(a) \ \}.$$

È immediato verificare che due applicazioni con lo stesso dominio e lo stesso codominio sono uguali se e solo se hanno lo stesso grafico. In effetti possiamo identificare concettualmente una applicazione con il suo grafico; cosa che consente di dare una definizione di applicazione che eviti la vaghezza dei termini "legge, associa" che abbiamo usato sopra; precisamente

**Definizione**. Siano $A$ e $B$ due insiemi. Una **applicazione** di $A$ in $B$ è un sottoinsieme $f$ del prodotto cartesiano $A \times B$ che soddisfa alla seguente proprietá:

$$\text{per ogni } \ a \in A \ \text{ esiste uno ed un unico } \ b \in B \ \text{ tale che } \ (a,b) \in f.$$

Quindi, se $f \subseteq A \times B$ è una applicazione si scriverà $f: A \longrightarrow B$, e per una coppia $(a,b)$, invece di $(a,b) \in f$, si scriverà $b = f(a)$.

**Definizione**. Sia $A$ un insieme. L'applicazione che ad ogni elemento di $A$ associa se stesso si chiama **identità** (o applicazione identica) di $A$, e si denota con $\iota_A$ o con $1_A$. Quindi:

$$\begin{array}{rccc} \iota_A: & A & \longrightarrow & A \\ & a & \mapsto & a \end{array}$$

Detto altrimenti, $\Gamma(\iota_A) = \{ \ (a,a) \mid a \in A \ \}$.

Più in generale, se $S \subseteq A$ l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} f: & S & \longrightarrow & A \\ & s & \mapsto & s \end{array}$$

si chiama **immersione** di $S$ in $A$.

**Definizione**. Sia $f : A \longrightarrow B$ una applicazione, e sia $S \subseteq A$. Si chiama **immagine di S** tramite $f$ , e si denota con $f(S)$ , il sottoinsime di $B$ i cui elementi sono le immagini degli elementi di $S$; quindi

$$f(S) = \{ f(a) \mid a \in S \}.$$

L'immagine $f(A)$ dell'intero dominio di $f$, si chiama semplicemente **immagine di** $f$ , e si denota con $Im(f)$.

*Esempio.* Sia $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'applicazione definita da, per ogni $x \in \mathbb{Z}$ : $f(x) = x^2 + 1$ ; e sia $S = \{0, 1, -1\}$. Allora

$$f(S) = \{f(0), f(1), f(-1)\} = \{1, 2, 2\} = \{1, 2\} ,$$

$$Im(f) = \{ x^2 + 1 \mid x \in Z \} = \{1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, \ldots\}.$$

Si tenga sempre ben presente che, per ogni sottoinsime non vuoto $S$ di $A$, $f(S)$ è un **sottoinsime non vuoto** di $B$ ; ad esempio, se $a \in A$ e $S = \{a\}$, allora $f(S) = \{f(a)\}$.

**Definizione**. Sia $f : A \longrightarrow B$ una applicazione, e sia $Y \subseteq B$. Si chiama **immagine inversa** di $Y$ (o controimmagine, o retroimmagine di $Y$) tramite $f$ , e si denota con $f^{-1}(Y)$, il sottoinsime di $A$ costituito dagli elementi di $A$ la cui immagine tramite $f$ appartiene a $Y$; quindi

$$f^{-1}(Y) = \{ a \mid a \in A , f(a) \in Y \}.$$

Chiaramente: $f^{-1}(B) = A$ ; più precisamente, per ogni $Im(f) \subseteq Y \subseteq B$ : $f^{-1}(Y) = A$.

*Esempio.* Sia $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'applicazione definita da, per ogni $x \in \mathbb{Z}$ : $f(x) = x^2$;

- sia $Y = \{4\}$ ; allora $f^{-1}(Y) = \{2, -2\}$ ;
- sia $Y = \{3, 5, 8\}$ ; allora $f^{-1}(Y) = \emptyset$ ;
- sia $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ ; allora $f^{-1}(Y) = \{0, 1, -1\}$ ;
- sia $Y$ l'insieme dei numeri primi; allora $f^{-1}(Y) = \emptyset$.

Si tenga ben presente che, per ogni sottoinsime $Y$ di $B$, $f^{-1}(Y)$ é sempre un **sottoinsime** di $A$ che, come si vede anche da alcuni degli esempi forniti, può essere vuoto.

Osserviamo, lasciandone la facile verifica come esercizio, che data una applicazione $f : A \longrightarrow B$ e $S \subseteq A$, $Y \subseteq B$ , allora:

$$S \subseteq f^{-1}(f(S)) \qquad \text{e} \qquad f(f^{-1}(Y) \subseteq Y.$$

**Definizione**. Una applicazione $f : A \longrightarrow B$ si dice **suriettiva** se

per ogni $b \in B$ esiste un $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Quindi $f : A \longrightarrow B$ è suriettiva se e solo se $Im(f) = B$ (ovvero se e solo se $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$ per ogni $b \in B$).

*Esempi.* 1) L'applicazione dell'esempio di sopra non è suriettiva: infatti $2 \notin Im(f)$ (naturalmente, in questo caso, molti altri elementi del codominio $\mathbb{N}$ non sono immagine di alcun elemento del dominio tramite $f$ $(3, 5, 6$, etc.); per provare che $f$ non è suriettiva basta evidenziarne uno).

2) L'applicazione $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ definita da, per ogni $x \in \mathbb{Z}$ : $f(x) = |x|$, è suriettiva.

3) Sia $X$ un insieme non vuoto e sia $Y$ un sottoinsime fissato di $X$. Definiamo una applicazione $\delta : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ponendo, per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$ : $\delta(A) = A\Delta Y$. Allora $\delta$ è suriettiva (lo si dimostri per esercizio).

Data un'applicazione $f : A \longrightarrow B$, è possibile definire in modo naturale, a partire da $f$, un'applicazione suriettiva $\overline{f} : A \longrightarrow f(A)$ ponendo, per ogni $x \in A$, $\overline{f}(x) = f(x)$.

**Definizione**. Una applicazione $f : A \longrightarrow B$ si dice **iniettiva** se

$$\text{per ogni } x, y \in A : \quad \text{se } x \neq y \text{ allora } f(x) \neq f(y).$$

Equivalentemente (ed è questo ciò che usualmente si adotta in pratica) $f : A \longrightarrow B$ è iniettiva se e solo se

$$\text{per ogni } x, y \in A : \quad \text{se } f(x) = f(y) \text{ allora } x = y.$$

*Esempi.* 1) L'applicazione $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ definita da, per ogni $x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$; non è iniettiva: infatti, ad esempio, $f(-1) = 1 = f(1)$.

2) L'applicazione $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da, per ogni $x \in \mathbb{Z}$ : $f(x) = x^2$, è iniettiva: infatti, se $x, y$ sono numeri naturali tali che $x^2 = y^2$ , allora $x = y$.

3) L'applicazione $\delta : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definita di sopra è iniettiva.

**Definizione**. Una applicazione $f : A \longrightarrow B$ si dice **biettiva** se è iniettiva e suriettiva.

Ad esempio, è biettiva la applicazione $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da, per ogni $x \in \mathbb{Z}$ : $f(x) = x+2$; ed è biettiva la applicazione $\delta : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ considerata in precedenti esempi.

> **Esercizio 1.** Siano $X, Y$ insiemi non vuoti, e sia $f : X \longrightarrow Y$ una applicazione. Si dimostri che $f$ è iniettiva se e solo se per ogni $T \subseteq X$, $f(X \setminus T) \subseteq Y \setminus f(T)$.
>
> *Soluzione.* Supponiamo che $f$ soddisfi le ipotesi dell'esercizio, e siano $a, b \in X$ con $a \neq b$. Posto $T = \{b\}$ si ha allora $a \in X \setminus T$ e quindi, per ipotesi, $f(a) \in f(X \setminus T) \subseteq Y \setminus f(T)$. Dunque $f(a) \notin f(T) = f(\{b\}) = \{f(b)\}$ e quindi $f(a) \neq f(b)$ provando così che $f$ è iniettiva.
>
> **Esercizio 2.** Siano $X, Y$ insiemi non vuoti, e sia $f : X \longrightarrow Y$ una applicazione. Si dimostri che $f$ è suriettiva se e solo se per ogni $T \subseteq X$, $Y \setminus f(T) \subseteq f(X \setminus T)$.

## Composizione di applicazioni

**Definizione.** Siano $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$, due applicazioni (si osservi che si assume che il domino di $g$ coincida col codominio di $f$). L'**applicazione composta** $g \circ f$ (si legge "$f$ composta $g$" ) è l'applicazione

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

definita da, per ogni $a \in A$ :

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Siano, ad esempio,

$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ definita da $f(z) = |z|$; $\quad g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da $f(x) = -x$; allora

$g \circ f :\ \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ è tale che, per ogni $z \in \mathbb{Z}$ : $g \circ f(z) = g(f(z)) = g(|z|) = -|z|$;

$f \circ g :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ è tale che, per ogni $x \in \mathbb{N}$ : $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(-x) = |-x| = x$;

(l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che, poichè $x \in \mathbb{N}$, $x$ è positivo. Si osservi che $f \circ g = \iota_{\mathbb{N}}$).

L'esempio precedente mostra anche che, in generale, $g \circ f \neq f \circ g$. Questo è il caso anche quando, ed è la situazione più interessante, $A = B = C$. Ad esempio, sia $A = \{1, 2, 3\}$ , e consideriamo le due applicazioni $\gamma, \tau :\ A \longrightarrow A$ , definite da:

$$\gamma(1) = 2\ ;\ \gamma(2) = 3\ ;\ \gamma(3) = 1\ ; \qquad \text{e} \qquad \tau(1) = 1\ ;\ \tau(2) = 3\ ;\ \tau(3) = 2$$

(si osservi che sia $\gamma$ che $\tau$ sono biezioni di $A$ in se stesso.). Allora $\gamma \circ \tau \neq \tau \circ \gamma$ ; infatti:

$$\gamma \circ \tau(1) = \gamma(\tau(1)) = \gamma(1) = 2 \quad \text{mentre} \quad \tau \circ \gamma(1) = \tau(\gamma(1)) = \tau(2) = 3.$$

**Proposizione 3.1** *Siano $A, B$ insiemi; $f : A \longrightarrow B$ una applicazione; $\iota_A$, $\iota_B$ le applicazioni identiche su $A$ e su $B$ rispettivamente. Allora*

**(1)** $\quad \iota_B \circ f = f$ ;

**(2)** $\quad f \circ \iota_A = f$.

*Dimostrazione.* È ovvia.

**Proposizione 3.2** . *(Associatività della composizione) Siano $A, B, C$ e $D$ insiemi; $f :\ A \longrightarrow B$, $\quad g :\ B \longrightarrow C$, $\quad h :\ C \longrightarrow D$ applicazioni. Allora*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f\ .$$

*Dimostrazione.* Innanzitutto osserviamo che sia $h \circ (g \circ f)$ che $(h \circ g) \circ f$ sono applicazioni con dominio $A$ e codominio $D$. Ora, per ogni $a \in A$ :

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))) = (h \circ g)(f(a)) = ((h \circ g) \circ f)(a)\ ;$$

Quindi $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

**Proposizione 3.3** *Siano $f :\ A \longrightarrow B$ e $g :\ B \longrightarrow C$ due applicazioni. Allora*

**(1)** *se $f$ e $g$ sono iniettive, allora $g \circ f$ è iniettiva ;*

**(2)** *se $f$ e $g$ sono suriettive, allora $g \circ f$ è suriettiva ;*

**(3)** *se $f$ e $g$ sono biettive, allora $g \circ f$ è biettiva.*

*Dimostrazione.* (1) Siano $f$ e $g$ iniettive, e siano $a, a' \in A$ tali che

$$(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') \ ,$$

ciò significa : $g(f(a)) = g(f(a'))$. Quindi, poichè $g$ è iniettiva:

$$f(a) = f(a')$$

da cui, poichè $f$ è iniettiva :

$$a = a'$$

provando pertanto che $g \circ f$ è iniettiva.

(2) Siano $f$ e $g$ suriettive, e sia $c \in C$. Poichè $g$ è suriettiva, esiste $b \in B$ tale che $c = g(b)$ , e, poichè $f$ è suriettiva, esiste $a \in A$ tale che $b = f(a)$. Ma allora:

$$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

provando pertanto che $g \circ f$ è suriettiva.

(3) Segue immediatamente dai punti (1) e (2).

La Proposizione 3.3 può solo parzialmente esssere invertita. Si veda l'esercizio 6 al termine del capitolo.

Il concetto di applicazione biettiva è fondamentale; le applicazioni biettive sono quelle che, nel senso che specificheremo tra poco, si possono 'invertire'.

**Definizione** Una applicazione $f : A \longrightarrow B$ si dice **invertibile** se esiste una applicazione $g : B \longrightarrow A$ tale che

$$g \circ f = \iota_A \quad \text{e} \quad f \circ g = \iota_B.$$

**Proposizione 3.4** . *Sia $f : A \longrightarrow B$ una applicazione; supponiamo che esistano applicazioni $g, h : B \longrightarrow A$ tali che $g \circ f = \iota_A$ e $f \circ h = \iota_B$. Allora $g = h$.*

*Dimostrazione.* Siano $f, g$ e $h$ come nelle ipotesi. Allora,

$$h = \iota_A \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ \iota_B = g.$$

Dalla Proposizione precedente segue l'importante osservazione che

> se $f$ è invertibile allora esiste una **unica** applicazione $g : B \longrightarrow A$ tale che $g \circ f = \iota_A$ e $f \circ g = \iota_B$. Tale applicazione $g$ si chiama l'applicazione **inversa** di $f$ , e si denota con $f^{-1}$.

**Teorema 3.5** *Una applicazione è invertibile se e soltanto se è biettiva.*

*Dimostrazione.* Sia $f : A \longrightarrow B$ una applicazione.
1) Supponiamo che $f$ sia invertibile, e sia $f^{-1} : B \longrightarrow A$ la sua inversa. Allora, se $b \in B$, posto $a = f^{-1}(b)$, si ha

$$f(a) = f(f^{-1}(b)) = (f \circ f^{-1})(b) = \iota_B(b) = b.$$

Quindi $f$ è suriettiva. Siano ora $a, a' \in A$ tali che $f(a) = f(a')$. Allora

$$a = \iota_A(a) = (f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(a')) = (f^{-1} \circ f)(a') = \iota_A(a') = a'$$

che dimostra che $f$ è iniettiva. Dunque $f$ è biettiva.
2) Supponiamo ora che $f$ sia biettiva e proviamo che allora ha una inversa. Sia $b$ un qualunque elemento di $B$; allora, poiché $f$ è suriettiva, esiste un elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$. D'altra parte, poiché $f$ è iniettiva, tale elemento è unico (per ciascun $b$), e lo denotiamo quindi con $g(b)$. Per costruzione, l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \\ b & \mapsto & g(b) \end{array}$$

è l'inversa di $f$.

Di fatto, il Teorema precedente può essere reso più preciso mediante la seguente proposizione, che lasciamo ai lettori più interessati.

**Proposizione 3.6** *Sia* $f : A \longrightarrow B$ *un'applicazione. Allora*

**(1)** $f$ *è iniettiva se e solo se esiste* $g : B \longrightarrow A$ *tale che* $g \circ f = \iota_A$*;*

**(2)** $f$ *è suriettiva se e solo se esiste* $h : B \longrightarrow A$ *tale che* $f \circ h = \iota_B$*.*

*Dimostrazione.* (1) Supponiamo che $f$ sia iniettiva. Fissiamo un elemento $a \in A$, e definiamo una applicazione $g : B \longrightarrow A$ , ponendo, per ogni $y \in B$,

$$g(y) = \begin{cases} a \quad \text{se} \quad y \in B \setminus f(A) \\ \\ \text{l'unico} \ \ x \in A \text{ tale che } f(x) = y \text{ se } \ y \in f(A) \end{cases}$$

Allora, per ogni $x \in A$ : $g \circ f(x) = g(f(x)) = x$ ; e quindi $g \circ f = \iota_A$.
Viceversa, si provi per esercizio che se esiste $g : B \longrightarrow A$ tale che $g \circ f = \iota_A$, allora $f$ è iniettiva.

(2) Supponiamo che $f$ sia suriettiva. Allora per ogni $y \in B$ esiste almeno un elemento $a_y \in A$ tale che $f(a_y) = y$. Definiamo quindi $h : B \longrightarrow A$, ponendo, per ogni $y \in B$, $h(y) = a_y$. Abbiamo allora che $f \circ h(y) = f(h(y)) = f(a_y) = y$ per ogni $y \in B$, e quindi $f \circ h = \iota_B$.
Viceversa, si provi per esercizio che se esiste $h : B \longrightarrow A$ tale che $f \circ h = \iota_B$ allora $f$ è suriettiva.

**Corollario.** *Siano A e B insiemi. Allora esiste una applicazione iniettiva da A in B se e solo se esiste una applicazione suriettiva da B in A.*

Vediamo ora alcuni esempi.

**1.** Sia $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definita da, per ogni $x \in \mathbb{Q}$ : $f(x) = 2x - 1$. Si verifica senza difficoltà che $f$ è biettiva. Determiniamo la sua inversa $f^{-1} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$. Poichè $f \circ f^{-1}$ deve essere la applicazione identica su $\mathbb{Q}$ , si dovrá avere, per ogni $y \in \mathbb{Q}$ :

$$y = f(f^{-1}(y)) = 2 \cdot f^{-1}(y) - 1$$

da cui, risolvendo una elementare equazione, si ricava:

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2} \ , \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{Q}$$

che è la regola che definisce la applicazione inversa $f^{-1} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$.

**2.** Sia $A = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ e sia $f : A \longrightarrow A$ definita da, per ogni $x \in A$ : $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Allora $f$ è invertibile e coincide con la propria inversa. Infatti, per ogni $x \in A$ si ha :

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\frac{x+1}{x-1}) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{x+1+x-1}{x+1-x+1} = \frac{2x}{2} = x$$

quindi $f \circ f = \iota_A$ e dunque $f^{-1} = f$.

**Esercizio 3.** Siano $A, B$ e $C$ insiemi non vuoti, e $f : A \longrightarrow B$ una applicazione fissata. Sia $C^B$ l'insieme di tutte le applicazioni da $B$ in $C$, e $C^A$ quello di tutte le applicazioni da $A$ in $C$. Sia $\phi : C^B \longrightarrow C^A$ l'applicazione definita da $\phi(g) = g \circ f$ per ogni $g \in C^B$. Si provi che se $f$ è suriettiva, allora $\phi$ è iniettiva.

*Soluzione.* Supponiamo che $f$ sia suriettiva, e proviamo che $\phi$ è iniettiva. Siano quindi $g_1, g_2 \in C^B$ tali che $\phi(g_1) = \phi(g_2)$ (cioè $g_1 \circ f = g_2 \circ f$). Proviamo che $g_1 = g_2$.

$1^o$ metodo). Sia $b \in B$. Poichè $f$ è suriettiva, esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Da ciò segue

$g_1(b) = g_1(f(a)) = g_1 \circ f(a) = g_2 \circ f(a) = g_2(f(a)) = g_2(b)$.

Poichè ciò vale per ogni $b \in B$ si ricava $g_1 = g_2$.

$2^o$ metodo). Poichè $f$ è suriettiva, esiste una applicazione $h : B \longrightarrow A$ tale che $f \circ h = \iota_B$. Allora

$g_1 = g_1 \circ \iota_B = g_1 \circ (f \circ h) = (g_1 \circ f) \circ h = (g_2 \circ f) \circ h = g_2 \circ (f \circ h) = g_2 \circ \iota_B = g_2$

provando che $\phi$ è iniettiva.

**Esercizio 4.** Nelle stesse ipotesi dell'esercizio 3, provare che se $f$ è iniettiva allora $\phi$ è suriettiva.

**Proposizione 3.7** *Siano* $f : A \longrightarrow B$ *e* $g : B \longrightarrow C$ *due applicazioni invertibili. Allora:*

**(1)** $f^{-1}$ *è invertibile e* $(f^{-1})^{-1} = f$ *;*

**(2)** $g \circ f$ *è invertibile e* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

*Dimostrazione.* (1) è ovvia. Dimostriamo (2).
Poichè $f$ e $g$ sono invertibili, esse sono biettive per il Teorema 3.5, quindi, per la Proposizione 8, $g \circ f : A \longrightarrow C$ è biettiva e dunque, ancora per il Teorema 3.5, è invertibile. Ora, osserviamo che:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = (g \circ (f \circ f^{-1})) \circ g^{-1} = (g \circ \iota_B) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \iota_C$$

ed allo stesso modo :

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (\iota_B \circ f) = f^{-1} \circ f = \iota_A$$

Dunque, per la unicità della applicazione inversa:

$$f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}.$$

Esercizi

**1.** Sia $f : A \longrightarrow B$ una applicazione, e siano $S, T \subseteq A$. Si provi che

$$\begin{array}{ll} (1) & f(S \cup T) = f(S) \cup f(T); \\ (2) & f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T); \\ (3) & f(S) \setminus f(T) \subseteq f(S \setminus T); \end{array}$$

e si mostri, mediante opportuni esempi che le inclusioni ai punti $(2), (3)$ possono essere proprie.

**2.** Sia $f : A \longrightarrow B$ una applicazione, e siano $X, Y \subseteq B$. Si provi che

$$\begin{array}{ll} (1) & f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y); \\ (2) & f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y); \\ (3) & f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(S) \setminus f^{-1}(T). \end{array}$$

**3.** Sia $f : A \longrightarrow B$ una applicazione. Si dimostri che:
(i) $f$ è iniettiva , se e solo se $f^{-1}(f(S)) = S$ per ogni $S \subseteq A$;
(i) $f$ è suriettiva , se e solo se $f(f^{-1}(Y)) = Y$ per ogni $Y \subseteq B$.

**4.** Si dica quali fra le seguenti applicazioni sono suriettive.

$(a)$ $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definita da : $f(x) = 3x$, per ogni $x \in \mathbb{N}$.

$(b)$ $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definita da : $g(x) = \frac{x-2}{2}$, per ogni $x \in \mathbb{Q}$.

$(c)$ $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ definita da : $h(x) = \frac{n}{n+1}$, per ogni $x \in \mathbb{N}$.
( dove $\mathbb{Q}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{Q}\ 0 < x\ \}$ ).

$(d)$ $\eta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definita da :

$$\eta(n) = \begin{cases} 2n & \text{se } n \text{ é pari} \\ 3n & \text{se } n \text{ é dispari} \end{cases}$$

**5.** Si dica quali fra le applicazioni dell'esercizio precedente sono iniettive.

**6.** Siano $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ due applicazioni. Si dimostri che:
(i) se $g \circ f$ è iniettiva , allora $f$ è iniettiva;
(ii) se $g \circ f$ è suriettiva , allora $g$ è suriettiva.

Si completi poi la analisi, trovando degli esempi in cui $g$ non è iniettiva ma $g \circ f$ è iniettiva, e in cui $f$ non è suriettiva ma $g \circ f$ è suriettiva.

**7.** Si dimostri che la applicazione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da :

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

è biettiva.

**8.** Si dimostri che la applicazione

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \\ & (x,y) & \mapsto & (3x+4y, x+2y) \end{array}$$

è iniettiva ma non suriettiva

**9.** Si dimostri che la applicazione

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \\ & (x,y) & \mapsto & (3x+4y, x+2y) \end{array}$$

è biettiva, e si determini la sua inversa.

**10.** Sia $A = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ; si provi che l'applicazione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^2 - y$ per ogni $(x,y) \in A$ è suriettiva ma non iniettiva; per ogni $b \in \mathbb{R}$ si descriva $f^{-1}(\{b\})$. Si definisca quindi una applicazione $g : \mathbb{R} \longrightarrow A$ tale che $f \circ g = \iota_{\mathbb{R}}$, e si provi che tale $g$ non è unica.

**11.** Si dimostri che la applicazione $h : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definita da : $h(x) = 3x - |x|$, per ogni $x \in \mathbb{Q}$ è biettiva, e si determini la sua inversa.

**12.** Siano $f : \mathbb{Q}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ e $g : \mathbb{Q}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{Q}\setminus\{1\}$ applicazioni definite da:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x+1 , \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\} .$$

Si provi che la applicazione composta $g \circ f$ è biettiva e si determini la sua inversa.