

## **Programma di Geometria I modulo 2005/06**

**Prof. Vincenzo Ancona, Laurea in Matematica, Università di Firenze**

### **Le matrici ed i sistemi lineari.**

Le matrici. Operazioni tra matrici e loro proprietà. Lo spazio vettoriale delle matrici. Trasposta di una matrice. Traccia di una matrice. Matrici invertibili. Matrici triangolari, ortogonali, simmetriche, antisimmetriche. Sistemi lineari omogenei e non omogenei.

### **L'algoritmo di Gauss.**

Matrici a scalini. Operazioni elementari. Algoritmo di Gauss, riduzione di una matrice a scalini. Soluzione di sistemi lineari con l'algoritmo di Gauss.

### **Spazi vettoriali e applicazioni lineari. Dimensione e rango.**

Spazi vettoriali. Sottospazi vettoriali. Combinazioni lineari. Applicazioni lineari. Applicazioni lineari associate a matrici. Matrice associata ad una applicazione lineare tra spazi vettoriali con basi fissate. Matrice di cambiamento di base. Coordinate rispetto ad una base e cambiamento di coordinate.

Composizione di applicazioni lineari e prodotto tra matrici. Matrice invertibile equivale ad applicazione lineare invertibile. Dipendenza ed indipendenza lineare. Basi. Teorema fondamentale della teoria della dimensione e definizione di dimensione. Completamento di vettori indipendenti ad una base. Estrazione di una base da vettori generatori. Nucleo ed immagine. Teorema della dimensione. Prodotto cartesiano di due spazi vettoriali, Formula di Grassmann.

Prodotto scalare standard in  $\mathbb{R}^n$ , norma, disuguaglianza di Cauchy-Schwartz e disuguaglianza triangolare.

### **I vettori geometrici.**

Relazione di equipollenza fra segmenti orientati. Vettori geometrici nello spazio euclideo tridimensionale. Struttura di spazio vettoriale sui vettori geometrici: somma di vettori e prodotto per uno scalare. Basi. Equivalenza fra dipendenza lineare e complanarità di vettori.

Tre vettori costituiscono una base se e solo se non sono complanari. Prodotto scalare di vettori. Basi ortonormali.

### **Determinanti.**

Esistenza e unicità di una funzione dalle matrici  $n$  per  $n$  a  $\mathbb{R}$  funzione multilineare alternante delle righe delle matrici quadrate che vale 1 sulla matrice identità (sviluppo per colonne). Sviluppo del determinante di una matrice quadrata per una riga (senza dimostrazione). Proprietà: linearità sulle righe, alternanza sulle righe... Comportamento del determinante attraverso l'algoritmo di Gauss. Calcolo del determinante con l'algoritmo di Gauss. Determinante di matrici diagonali e triangolari. Determinante della trasposta. Una matrice quadrata ha righe e colonne indipendenti se e solo se ha determinante diverso da zero. Formula di Cauchy-Binet (senza dimostrazione). Calcolo dell'inversa di una matrice invertibile.

Rango di una matrice e di un'applicazione lineare. Il teorema di Kronecker (rango per righe e rango per colonne coincidono). Calcolo del rango con i determinanti dei minori della matrice, e con l'algoritmo di Gauss.

Il teorema di Rouche'-Capelli.

### **Autovalori ed autovettori.**

Autovalori e autovettori di un' applicazione lineare di uno spazio vettoriale in sé (endomorfismo). Autovalori e autovettori di una matrice quadrata. Polinomio caratteristico. Diagonalizzabilità di un endomorfismo equivale all'esistenza di una base di autovettori. Autospazi corrispondenti a un autovalore. Se un endomorfismo ammette  $n$  (=dimensione dello spazio) autovalori distinti e' diagonalizzabile. Diagonalizzabilità, equivale all'esistenza di un autovalore e alla eguaglianza tra la dimensione dello spazio vettoriale e la somma delle dimensioni degli autospazi distinti.

Testi consigliati.

**G. Ottaviani** Appunti del corso di Geometria 1, consultabili in rete al sito [www.math.unifi.it/~ottavian](http://www.math.unifi.it/~ottavian)

**M.Abate** Geometria

**F. Gherardelli, L.A. Rosati, G.Tomassini** Lezioni di geometria vol I.