Prove di esame per il corso di Laboratorio di Matematica

1 Compito del 3 giugno 2005, versione 1

Esercizio 1: Dato un triangolo T, indichiamo con $M(T)$ il triangolo che ha come vertici i punti medi dei lati di T. Scrivere un programma di tipo funzione che, dati tre punti P, Q, R che individuano i vertici di un triangolo $T = PQR$ e un naturale $n \geq 1$, disegni gli $n+1$ triangoli

$$T, \quad M(T), \quad M^2(T) = M(M(T)), \quad \ldots, \quad M^n(T).$$

Esercizio 2: Scrivere un programma di tipo funzione che calcola il numero di fattori primi che dividono un numero intero positivo n. Ad esempio, se $n = 12$ il programma deve restituire 2.

Esercizio 3: La funzione

$$f(x) = x^x$$

è ben definita e invertibile come applicazione da $(1, +\infty)$ in $(1, +\infty)$. Scrivere un programma di tipo funzione che, dato $x \in (1, +\infty)$, calcoli $f^{-1}(x)$ usando il metodo di bisezione con una precisione di 10^{-3}. Con tale programma, calcolare il valore di $f^{-1}(3)$. Scrivere il valore ottenuto.

Esercizio 4: Sia $I(a, b)$ il numero

$$I(a, b) = \int_a^b \sin(x^2) dx$$

(1) Scrivere un programma di tipo funzione che dati a, b e N calcoli il valore di $I(a, b)$ usando la formula di quadratura dei trapezi con una partizione di N intervalli.

(2) Calcolare il valore di $I(100, 150)$ usando una partizione di 500 000 intervalli e dare una stima dell'errore che si commette. Scrivere i valori ottenuti.

(3) È possibile stabilire se $I(100, 150)$ è positivo o negativo con il calcolo appena fatto?

2 compito del 3 giugno 2005, versione 2

Esercizio 1: Scrivere un programma di tipo funzione che, dati tre numeri $h \in [0, 24[$, $m \in [0, 60[$ e $s \in [0, 60[$, disegni un orologio analogico che segna le ore h:m:s (ore:minuti:secondi), cioè tre segmenti con un estremo nell'origine di lunghezza $\frac{2}{3}$, $4/5$ e 1 che rappresentino rispettivamente la lancetta delle ore, dei minuti e dei secondi.

Esercizio 2: Scrivere un programma di tipo funzione che, dato $N \geq 0$, restituisca la somma dei numeri primi minori o uguali di n che hanno la cifra delle unità uguale a 3 (ad esempio, per $N = 15$ il programma deve rispondere con 16 dato da $3 + 13$). Scrivere il risultato per $N = 200$.

Esercizio 3: Ogni funzione continua $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ ammette almeno un punto fisso, cioè un valore $x_0 \in [0, 1]$ per il quale si ha

$$f(x_0) = x_0.$$

(1) Scrivere un programma di tipo funzione che, data una applicazione f come sopra, trovi un punto fisso di f applicando opportunamente l'algoritmo di bisezione, con un errore di 10^{-3}.

(2) Calcolare e scrivere il valore di un punto fisso della funzione

$$f(x) = e^{x-1} - x^2.$$

Esercizio 4:

(1) Scrivere un programma di tipo funzione che, dati due interi positivi n e k, calcoli l'integrale

$$\int_2^5 \sin(kx^2)dx$$

usando la formula dei punti medi usando n intervalli.

(2) Calcolare l'integrale del punto precedente per $k = 3$ con un errore minore di 10^{-3}. Scrivere il risultato trovato e il numero di intervalli usato (motivando).

3 Compito del 3 giugno 2005, versione 3

Esercizio 1: Scrivere un programma di tipo funzione che, dati un numero intero N maggiore o uguale a 3 e due punti P e Q del piano, disegni il poligono regolare di n lati di centro P e con un vertice in Q.

Esercizio 2: Scrivere un programma di tipo funzione che, dato un numero naturale $N \geq 1$, scriva le prime N righe del triangolo di tartaglia. Ad esempio, per $N = 4$ il programma deve scrivere le righe

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

(Suggerimento: un modo semplice per stampare una riga di numeri è quello di preparare un vettore `X` contenente i valori da stampare e usare il comando `disp(X)`.)

Esercizio 3: La funzione

$$f(x) = e^x - \log(x) - 3$$

definita e continua in $(0, +\infty)$, convessa (perché è la somma di due funzioni convesse), tende a $+\infty$ agli estremi del suo dominio ed è negativa in $x = 1$. Quindi la funzione f si annulla esattamente in due punti x_1, x_2 nel suo dominio. Calcolare i valori di x_1 e x_2 con la precisione di 10^{-4}.

Esercizio 4:

(1) Scrivere un programma di tipo funzione che, dati due interi positivi k e n calcoli, usando la formula dei punti medi con una partizione di n intervalli,

$$\int_2^{10} \cos(x^k)dx.$$

(2) Calcolare l'integrale precedente per $k = 5$ con un errore inferiore a 10^{-3}. Scrivere il risultato trovato e il numero di intervalli usato (motivando).

4 Prova di esame del 12 maggio 2004 (versione 1)

Esercizio 1: Scrivere un programma di tipo funzione che, dato un numero naturale n, calcoli la sommatoria

$$S(n) = \sum_{p \text{ primo},\ p \leq n} \frac{1}{p},$$

e disegni l'istogramma della serie corrispondente (cioè l'istogramma in cui le colonne hanno altezza $S(i), i = 1, 2, \ldots, n$).

Esercizio 2: Scrivere un programma di tipo funzione che, dato un numero naturale n, generi n punti a caso distribuiti uniformemente nel quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$ e disegni la poligonale che li unisce.

Esercizio 3: La funzione

$$f(x) = \log(\sin(x)) + x, \qquad 0 < x < \pi,$$

tende a $-\infty$ sia in 0^+ che in π^-; vale $\pi/2$ per $x = \pi/2$ ed è concava in $(0, \pi)$. Per questo motivo esistono esattamente due valori di x_1 e x_2, appartenenti a $(0, \pi)$, tali che

$$f(x_1) = f(x_2) = 0.$$

Scrivere un programma che abbia lo scopo di determinare x_1 e x_2, utilizzando l'algoritmo di Newton, con errore inferiore a 10^{-6}. Il programma può essere una funzione, dipendente dai punti iniziali dell'algoritmo di Newton. Scrivere i valori delle radici trovate.

5 Prova di esame del 12 maggio 2004 (versione 2)

Esercizio 1: Scrivere un programma di tipo funzione che, dato $k > 0$, disegni la curva parametrica

$$\begin{cases} x(t) = t^k \cos(t) \\ y(t) = t^k \sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, 10\pi],$$

Utilizzando una partizione (equispaziata) dell'intervallo $[0, 10\pi]$ in 10^4 sottointervalli.

Esercizio 2: Scrivere un programma di tipo funzione che, dato un numero naturale n, dica se è vero o falso che n si scompone nel modo seguente

$$n = p^m - 1,$$

dove p è un numero primo e m è un numero naturale; nel caso in cui ciò sia vero, il programma deve visualizzare p e m.

Esercizio 3: Scrivere un programma di tipo funzione che, dato un numero naturale n, calcoli l'integrale definitio

$$\int_{1/n}^{1} \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt,$$

utilizzando la formula di quadratura dei trapezi, su una partizione equispaziata dell'intervallo di integrazione in n^2 sottointervalli. Scrivere il valore trovato per $n = 60$.

6 Prova di esame del 12 maggio 2004 (versione 3)

Esercizio 1: Scrivere un programma di tipo funzione che, dato un naturale k, disegni la curva di equazioni parametriche

$$x(t) = (1 + 1/k)\cos(t) + 1/k\cos((k + 1)t),$$

$$y(t) = (1 + 1/k)\sin(t) + 1/k\sin((k + 1)t),$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

utilizzando una partizione equispaziata dell'intervallo $[0, 2\pi]$ di 10^3 sottointervalli.

Esercizio 2: La funzione

$$f(x) = x - \log(x), \quad x > 0,$$

tende a $+\infty$ sia in 0^+ che in a $+\infty$; vale 1 per $x = 1$ ed è convessa in $(0, +\infty)$. Per questo motivo esistono esattamente due valori x_1 e x_2 in $(0, +\infty)$, tali che

$$f(x_1) = f(x_2) = 2.$$

Scrivere un programma di tipo funzione che abbia lo scopo di determinare x_1 e x_2, utilizzando l'algoritmo di Newton, con errore inferiore a 10^{-6}. Il programma può essere una funzione, dipendente dai punti iniziali dell'algoritmo di Newton. Scrivere i valori trovati.

Esercizio 3: Scrivere un programma che calcoli l'integrale

$$\int_1^2 \log(1 + x + e^x)dx,$$

utilizzando la formula di quadratura dei punti sinistri, con errore a 10^{-3}. Scrivere il valore trovato.

7 Prova di esame del 30 giugno 2003 (versione A)

Esercizio 1: Scrivere un programma (di tipo comando), che determini una soluzione negativa dell'equazione

$$x^2 - 20x^2 + 1 = 0,$$

utilizzando l'algoritmo di bisezione, con errore inferiore a 10^{-6}.

Esercizio 2: Scrivere un programma che disegni un quadrato di lato 20 e 100 circonferenze di raggio 1 contenute nel quadrato, trangenti tra loro.

Esercizio 3: Scrivete un programma di tipo funzione che, dato un numero naturale n scriva il divisore primo di n che lo divide con potenza massima (se ne esiste più di uno, devono essere scritti tutti). Esempi:

$$12 = 2^3 \cdot 3 \mapsto 2, \qquad 300 = 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \mapsto (2, 5).$$

Esercizio 4: Considerate la funzione

$$F(x) = \int_0^x e^{\sin t} dt.$$

(1) Calcolate il valore di F sui punti di una partizione equispaziata di $I = [0, 2\pi]$ di passo $1/50$, con errore inferiore a $1/1000$, utilizzando una qualsiasi delle formule di quadratura viste;

(2) utilizzando il risultato del punto precedente, disegnare il grafico di F in I.

8 Prova di esame del 30 giugno 2003 (versione B)

Esercizio 1: La funzione

$$f(x) = e^{x^4} + x, \qquad x \in [0,1],$$

ha come immagine l'intervallo $I = [1, 1+e]$ ed è invertibile. Scrivere un programma che disegni il grafico della funzione inversa f^{-1} di f in I:

1. utilizzando un griglia di 100 punti equispaziati in I;
2. calcolando il valore di f^{-1} nei punti della griglia con errore inferiore a 10^{-3}.

Esercizio 2: Scrivete un programma che dati 4 punti nel piano (tramite le loro coordinate cartesiane), disegni i punti ed il più piccolo rettangolo con lati paralleli agli assi coordinati contenente tutti i punti.

Esercizio 3: Scrivete un programma di tipo funzione che dato un numero naturale n verifichi se la sua fattorizzazione è della forma

$$n = a^a \cdot b^b \cdot c^c,$$

dove a, b e c sono numeri primi distinti.

Esercizio 4: Scrivete un programma che calcoli l'integrale

$$\int_0^1 \sin(x^2+1)dx$$

con errore inferiore a 10^3, utilizzando la formula di quadratura dei trapezi.

9 Prova di esame del 17 luglio 2003

Esercizio 1: Scrivete un programma di tipo funzione che, dato $y > 0$ determini $x > 0$ tale che $xe^x = y$ con errore inferiore a 10^{-4}, utilizzando il metodo di bisezione.

Esercizio 2: Scrivere un programma di tipo funzione che, dato un numero naturale n, scriva tutti i numeri della forma $p \cdot q$ dove p e q sono divisori primi distinti di n.

Esercizio 3: Utilizzando una delle formule di quadratura viste, calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin^4 x} dx$$

con errore inferiore a 10^{-2}.

Esercizio 4: Scrivete un programma di tipo funzione che dati n punti nel piano $P_1, \ldots, P_n$ e un numero i compreso tra 1 e n, disegni il poligono di vertici $P_1, \ldots, P_n$ e tutte le diagonali del poligono uscenti da P_i.

10 Prova di esame del 18 settembre 2003

Esercizio 1: Scrivete un programma di tipo funzione che calcoli la funzione inversa di

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad x \in [-1, 1]$$

con precisione di 10^-3, utilizzando il metodo di bisezione. Più precisamente, dato

$$y \in \left[\frac{1}{2}(e^{-1} - e), \frac{1}{2}(e - e^{-1})\right]$$

il programma deve trovare l'unico valore $x \in [0, 1]$ tale che

$$f(x) = y$$

.

Esercizio 2: Scrivere un programma, di tipo comando, che disegni il grafico della funzione

$$f(x) = x^2 \sin(x),$$

nell'intervallo $[-30, 30]$, utilizzando un campionamento della funzione con passo $h = 0,001$.

Esercizio 3: Scrivete un programma di tipo funzione che, dati n numeri naturali, vi dica se tra questi ne esistono almeno due che hanno gli stessi fattori primi, nella decomposizione in fattori primi. Ad esempio, se i numeri dati sono $2, 5, 6 = 2 \cdot 3, 18 = 2 \cdot 3^2$, la risposta deve essere sì, mentre se i numeri sono $2, 5, 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5, 45 = 3^2 \cdot 5$, la risposta deve essere no.

Esercizio 4: Scrivere un programma di tipo funzione che, dato un numero intero k, calcoli l'integrale

$$\int_k^{2k} \frac{1}{1 + x^4} dx,$$

utilizzando una delle formule di quadratura viste, con errore inferiore a 10^{-3}.

11 Prova di esame del 25 luglio 2003

Esercizio 1: Utilizzando il metodo di Newton, determinare $x > 0$ tale che

$$x^6 + x^2 + x = 7.$$

Adottate il seguente criterio di arresto: il programma deve terminare quando la distanza tra due iterate successive è minore o uguale a 10^{-4}.

Esercizio 2: Scrivete un programma di tipo funzione dipendente da due parametri $R > 0$ e $n \in \mathbf{N}$, che disegni una circonferenza di raggio R e n raggi, di cui uno parallelo all'asse delle x, tale che due consecutivi di essi formino angoli uguali.

Esercizio 3: Scrivete un programma di tipo comando che determini il minimo delle quantità

$$|p - q|$$

dove p e q sono numeri primi, distinti, consecutivi, minori di 500.

Esercizio 4: Scrivete un programma di tipo funzione che, dato $x \in [0, 1]$ calcoli

$$\int_0^x (2 - t^3)^{\frac{1}{3}} dt$$

con errore inferiore a 10^{-3}, utilizzando una delle formule di quadratura viste.

12 Prova di esame del 19 settembre 2002

Esercizio 1: Scrivere un programma di tipo funzione, dipendente da un numero naturale n, che:

1 calcoli i valori della funzione

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{2} = \sinh(x^2)$$

su una partizione equispaziata di $[-1, 1]$ fatta di n intervalli;

2 disegni il grafico di f in $[-1, 1]$.

Esercizio 2: Scrivete un programma che, dati tre punti nel piano (individuati tramite le loro coordinate cartesiane), disegni il triangolo T avente per vertici tali punti e le mediane di T.

Esercizio 3: Scrivete un programma che verifichi se il numero 1992002 ammette come fattore un numero della forma p^2 dove p è un numero primo.

Esercizio 4: Scrivete un programma che, dati due punti P e Q nel piano cartesiano e un numero positivo r, disegni la retta per P e Q e una circonferenza di raggio r e tangente alla retta in P.

Esercizio 5: La funzione

$$f(x) = \sin^5(x) + x$$

è strettamente crescente, e quindi invertibile, nell'intervallo $I = [0, \pi/2]$. L'immagine di I tramite f è $J = [0, 2]$. Scrivete un programma di tipo funzione che dato $y \in J$ determini

$$f^{-1}(y).$$

Esercizio 6: Scrivete un programma che, utilizzando una delle formule di quadratura viste, calcoli

$$\int_1^2 \sin(\log(x))dx$$

con errore inferiore a 0,001.

13 Prova di esame dell'8 luglio 2002

Esercizio 1: Scrivere un programma di tipo funzione che dato un numero naturale N, disegni la poligonale nel piano che unisce i punti di coordinate

$$\left(x_i, \frac{\log(x_i) - \log(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, N,$$

dove $x_0, x_1, \ldots, x_N$ sono i punti di una partizione equispaziata dell'intervallo $[1, 2]$ in N sottointervalli.

Esercizio 2: Scrivere un programma di tipo funzione che dati due numeri naturali m e n scriva tutti i numeri primi che dividono sia m che n.

Esercizio 3: Scrivere un programma di tipo funzione che, dato un numero naturale n ($n \geq 1$), calcoli l'integrale

$$\int_n^{n+1} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

con errore inferiore a $1/10$, utilizzando la formula di quadratura dei punti destri o sinistri.