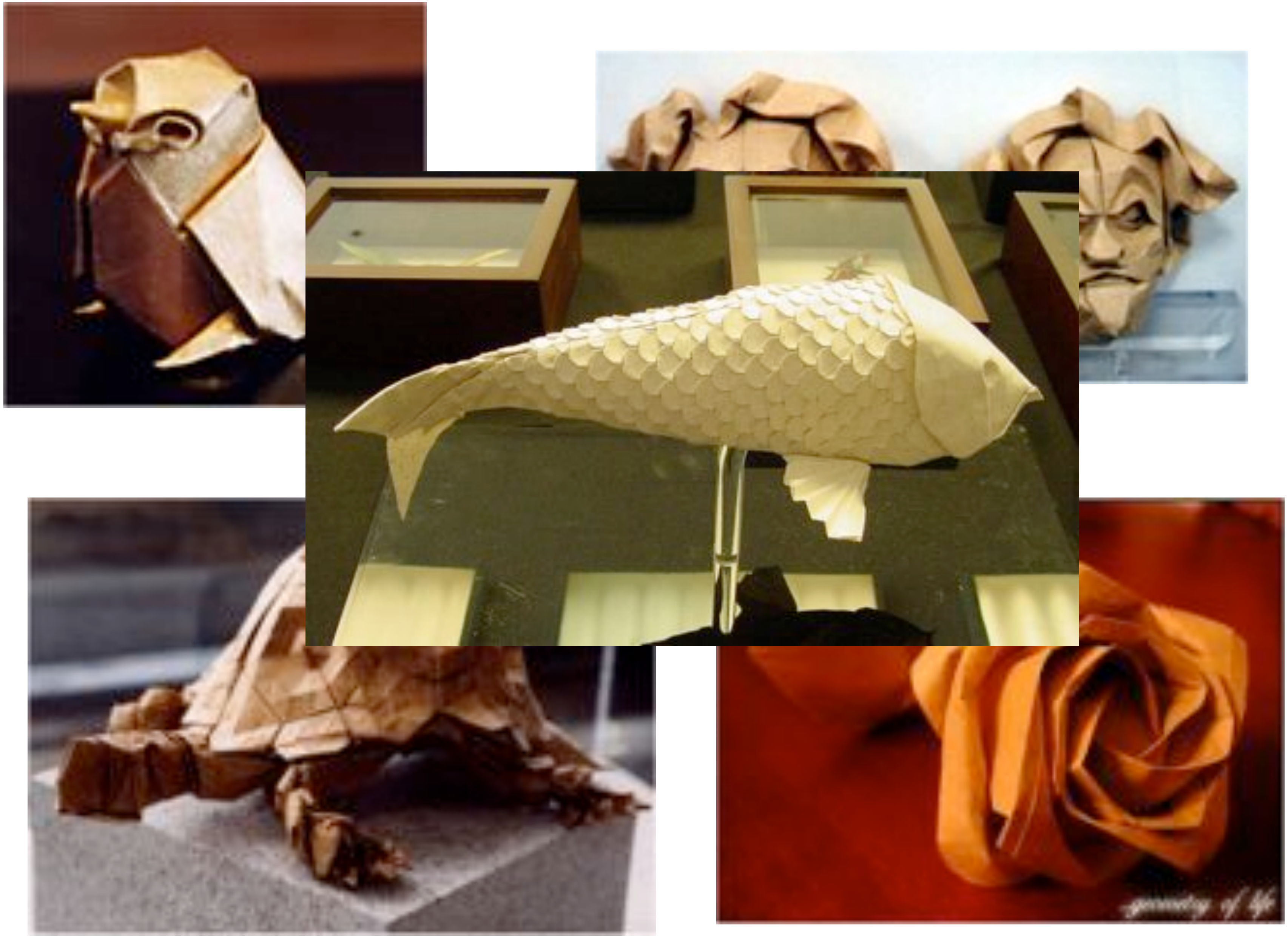
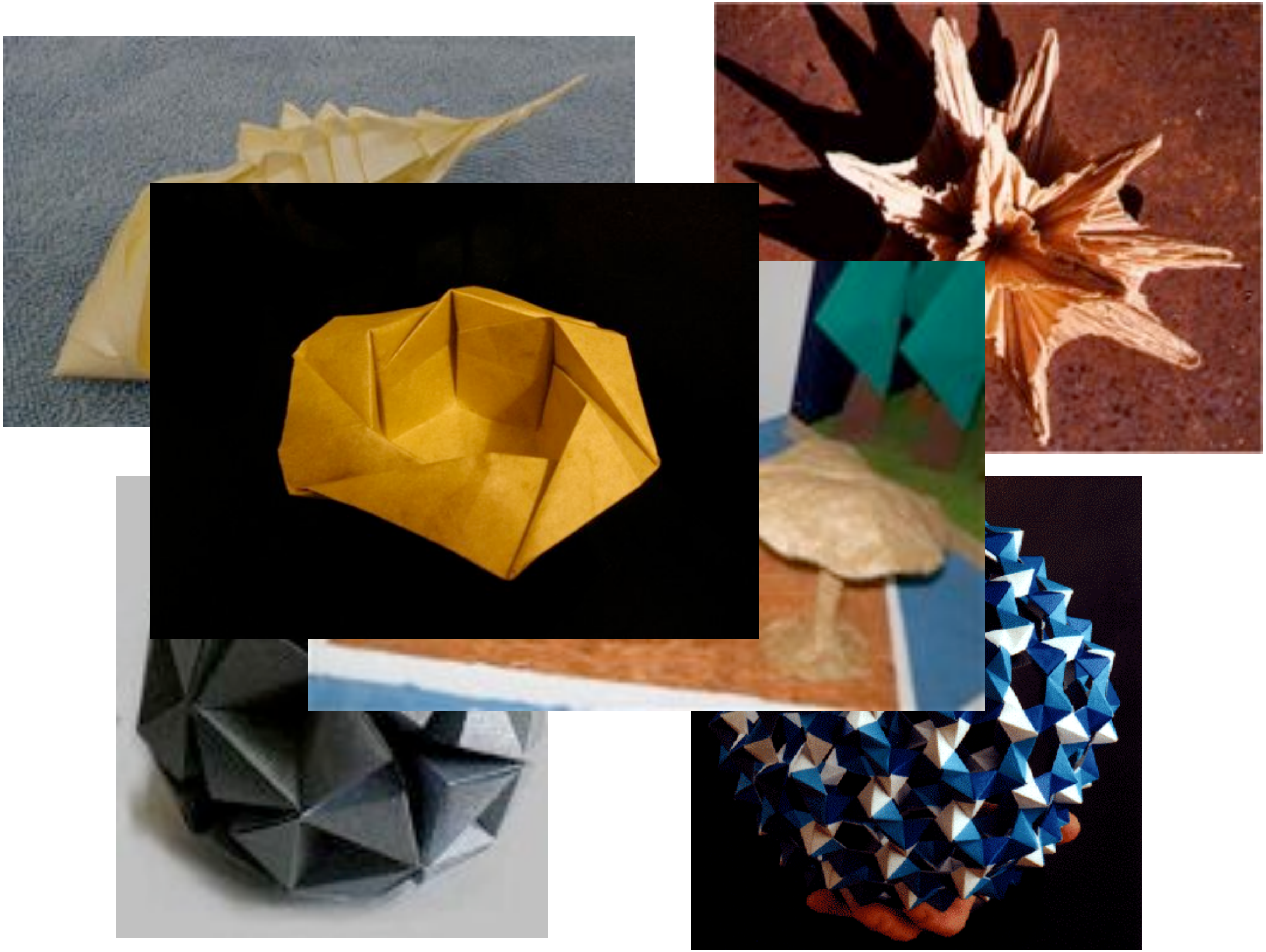
Risoluzione di problemi matematici con l’origami.

Relatore : Antonio Caserta



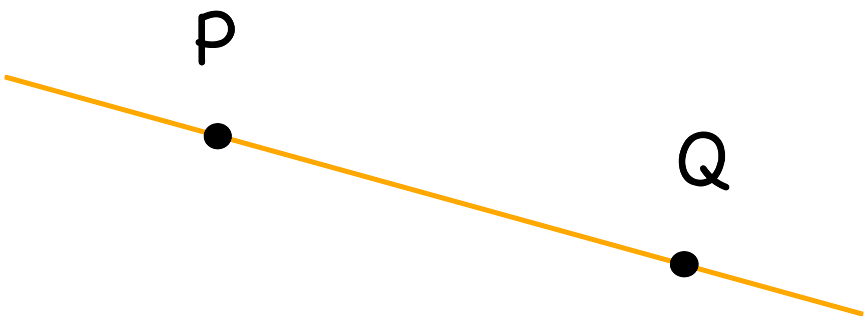


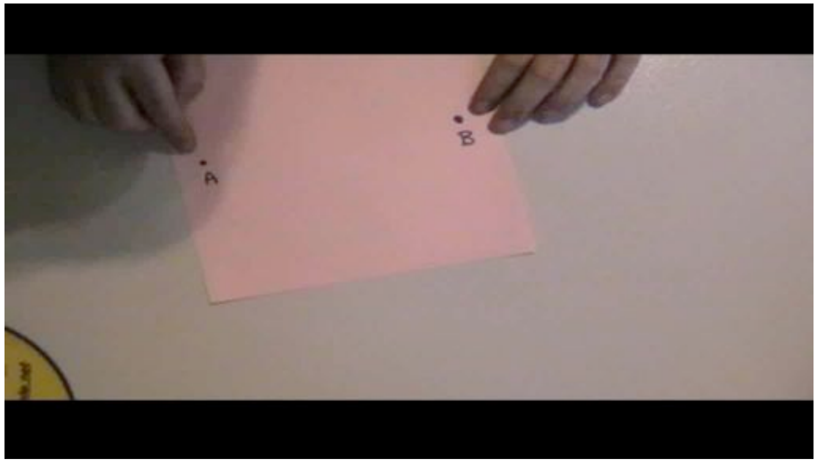
Quali problemi matematici..........?

- Risolvere un’equazione di secondo grado.
- Risolvere un’equazione di terzo grado.
- Costruzione di Poligoni regolari.
- Quali poligoni regolari sono costruibili con gli origami?

Assiomi della geometria degli origami.

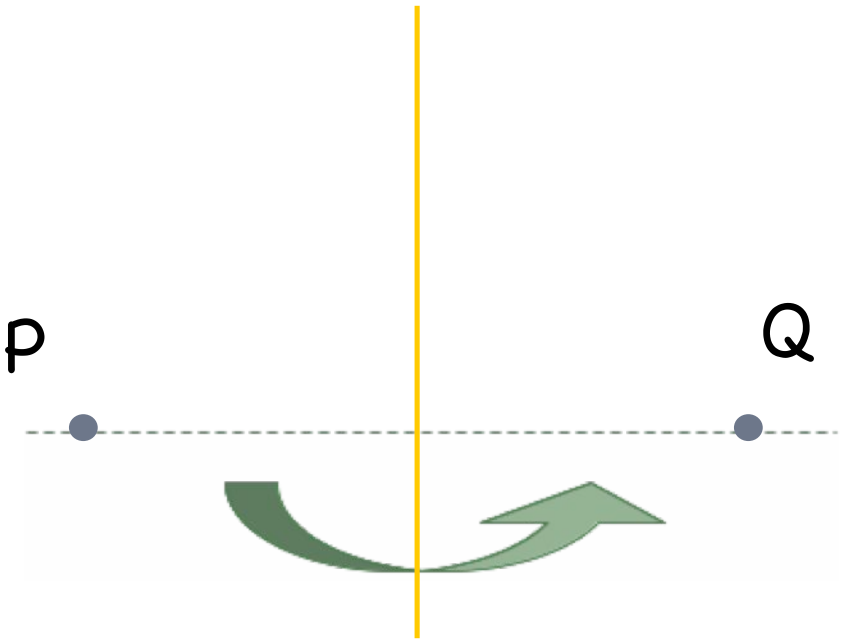
- *O1 :* Dati due punti P e Q è possibile piegare la retta passante per tali punti.

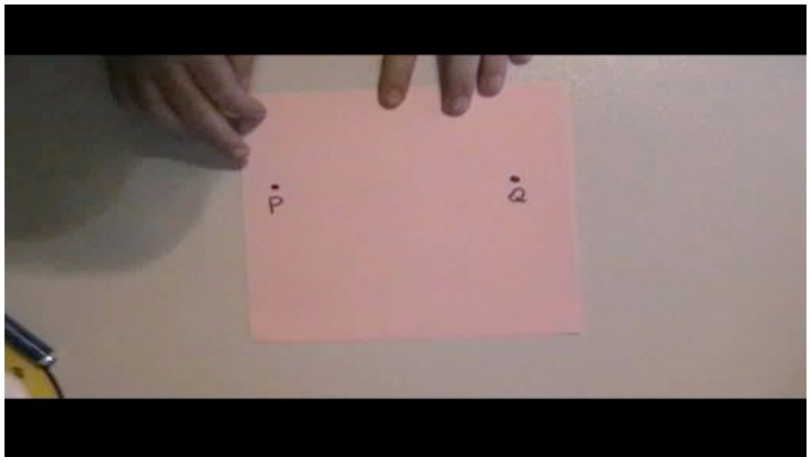




Assiomi della geometria degli origami.

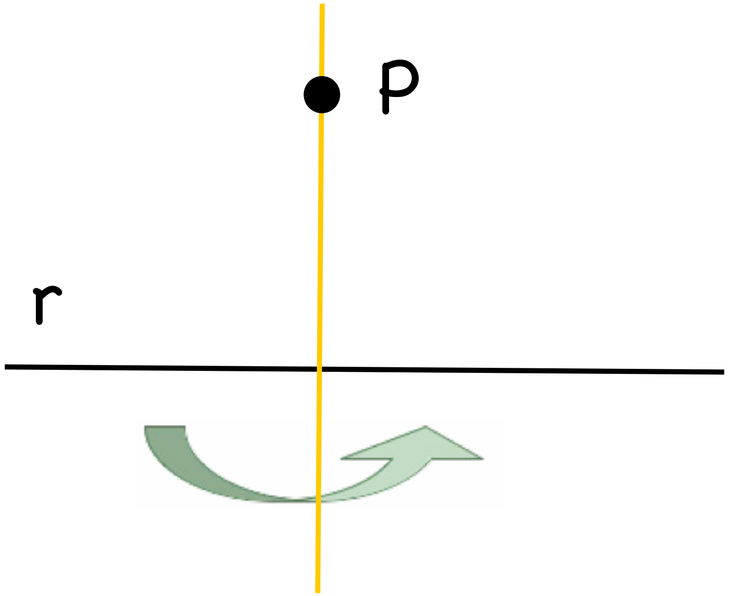
- *O2 :* Dati due punti P e Q è possibile piegare uno sull'altro (*asse del segmento* PQ)

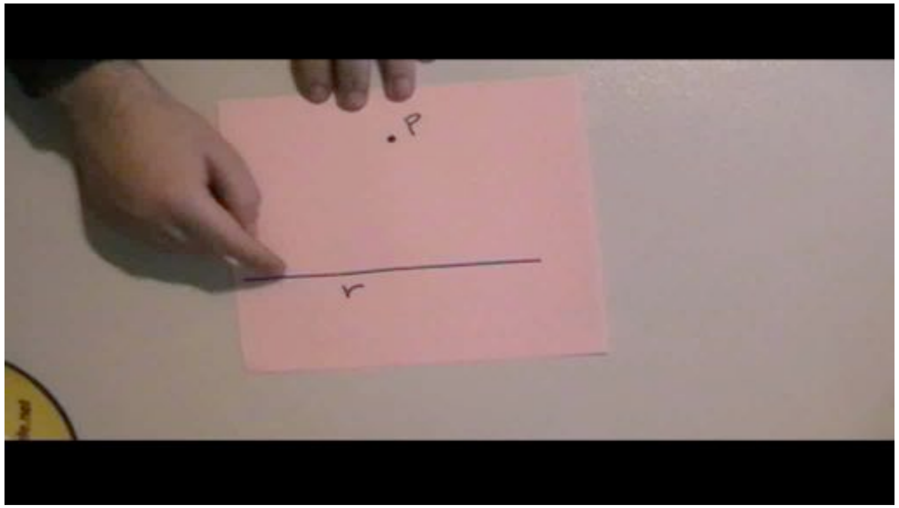




Assiomi della geometria degli origami.

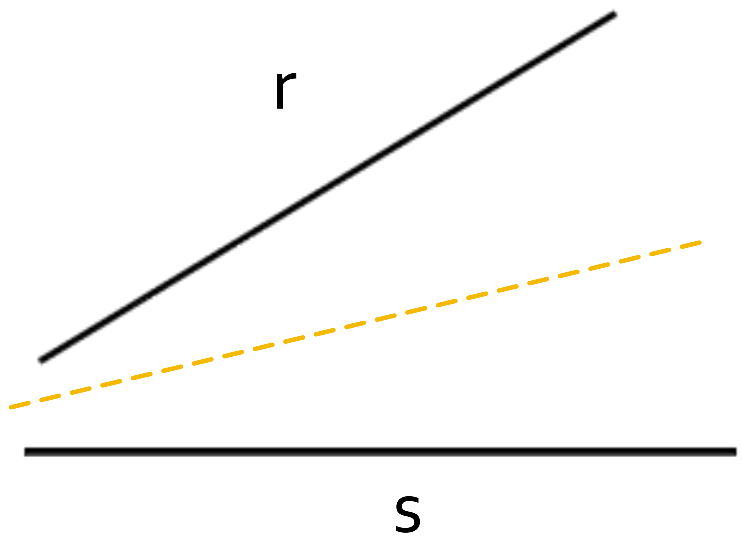
- *O3 :* Dati un punto P e una retta r è possibile piegare la perpendicolare alla retta passante per il punto.

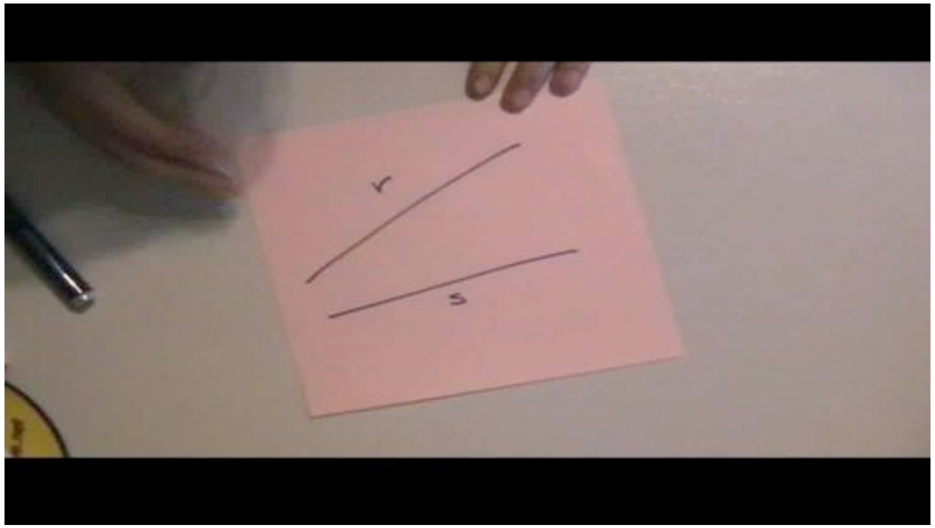




Assiomi della geometria degli origami.

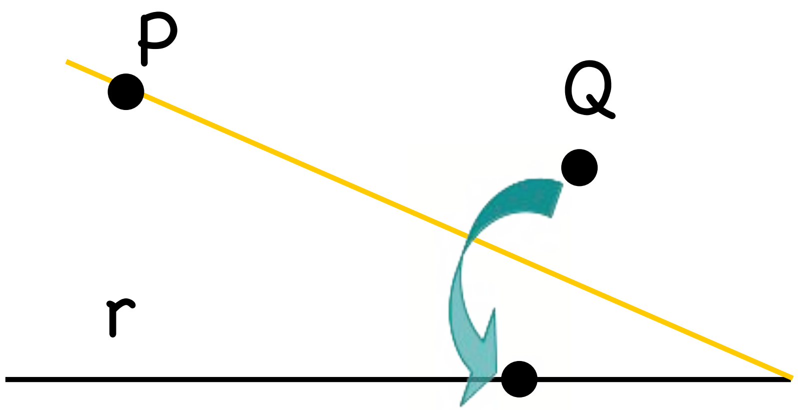
- *O4 :* Date due rette è possibile piegarne una sull’altra (bisettrice dell’angolo).

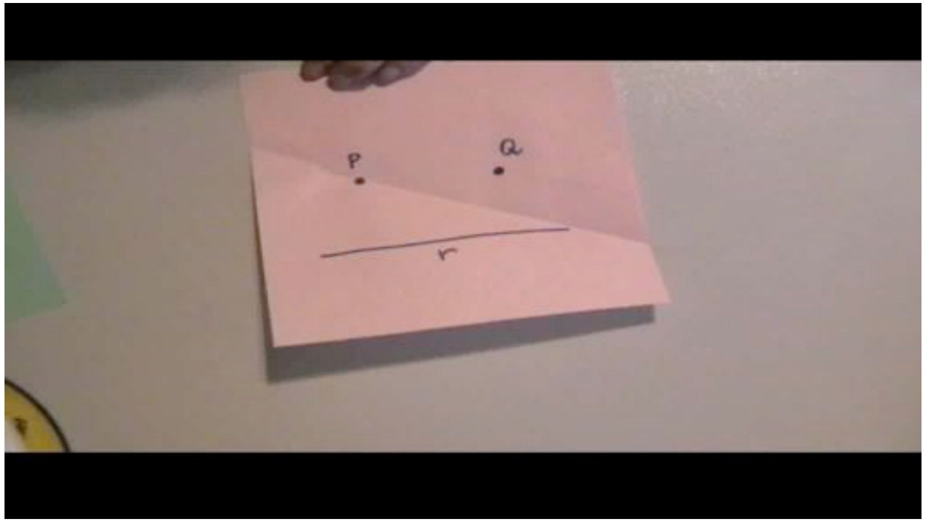




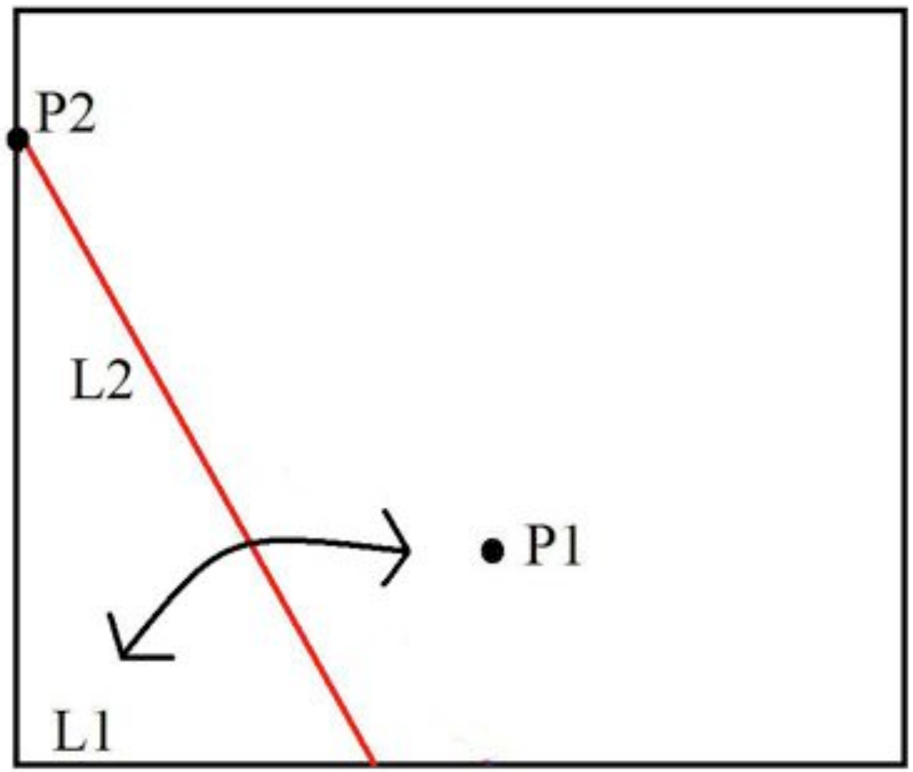
Assiomi della geometria degli origami.

- *O5:* Dati due punti P,Q e una retta r è possibile piegare una linea per P che porti il punto Q su r.

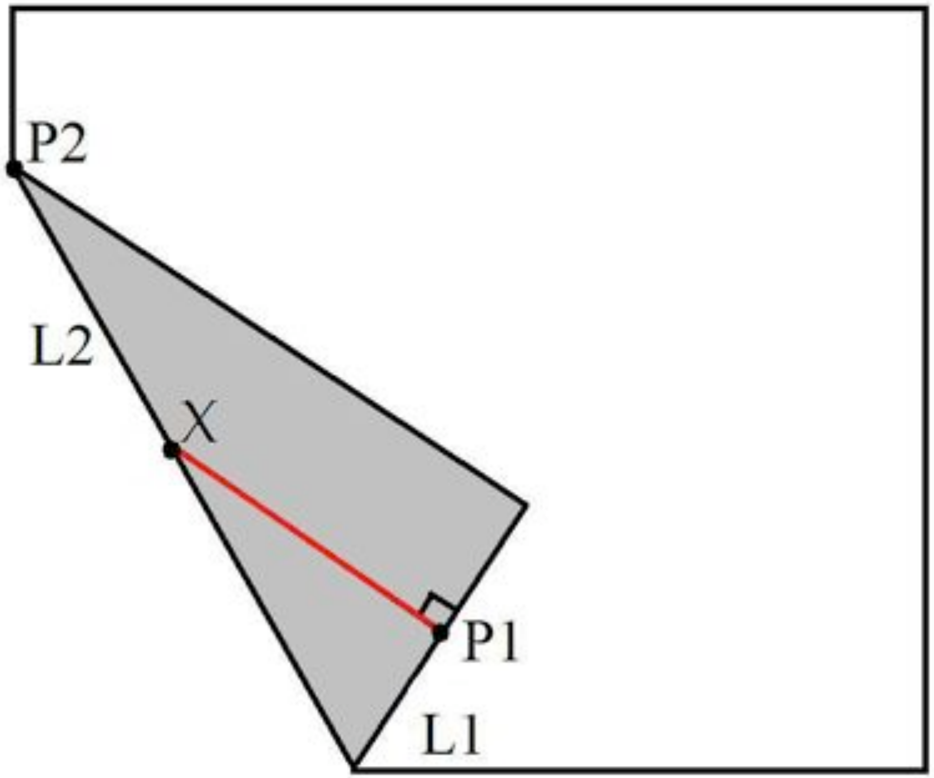




Risolvere un'equazione di secondo grado.

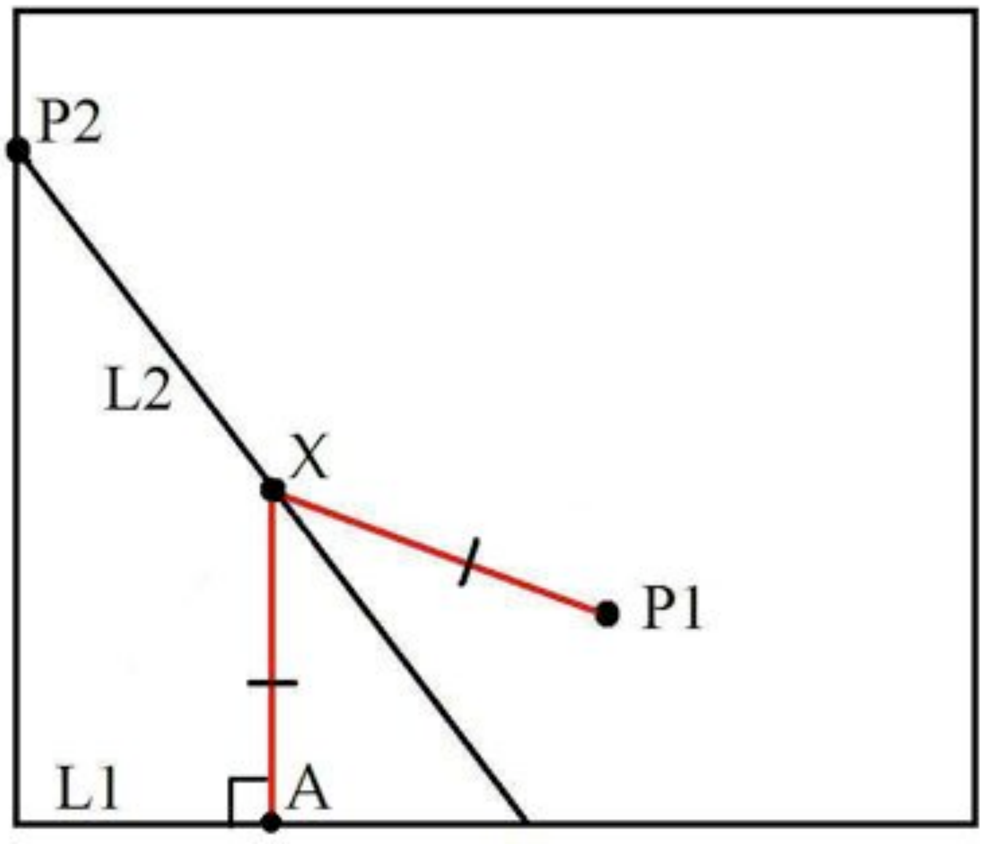


Risolvere un'equazione di secondo grado.



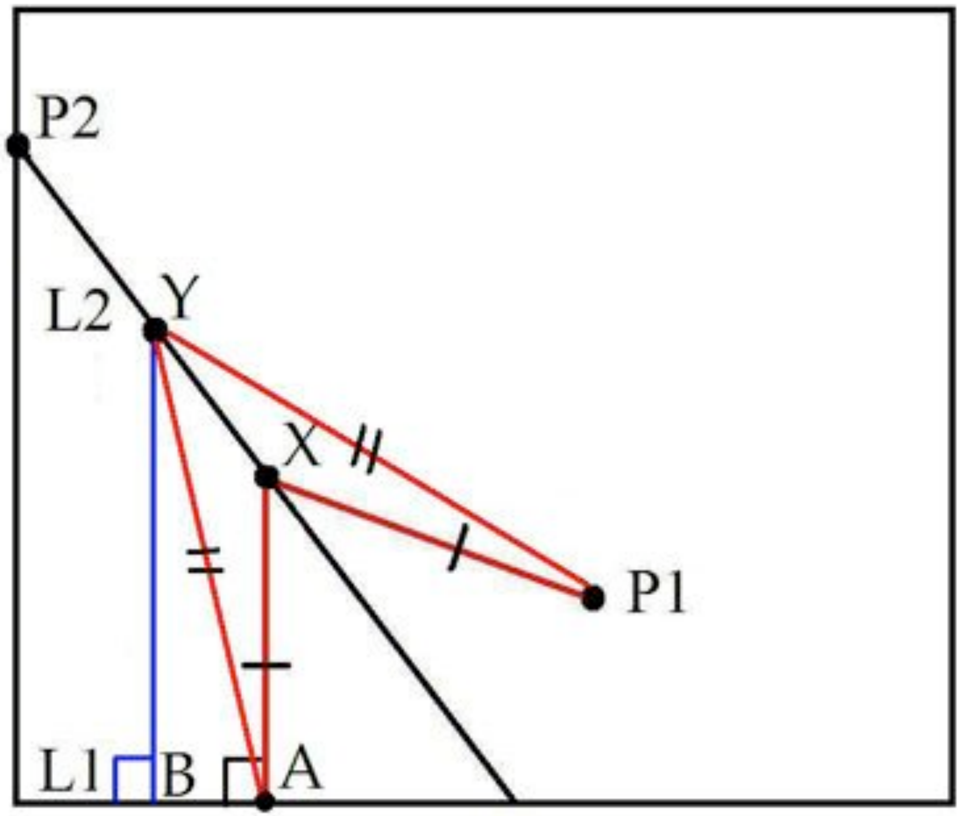
Dal punto P1 costruiamo una linea ortogonale a L1 (O4)

Risolvere un'equazione di secondo grado.



XP1 e XA hanno la stessa lunghezza . L2 è l'asse del seg. AP1

Risolvere un'equazione di secondo grado.



Costruire l'ortogonale a L1 per Y (O4) . L2 è la tangente alla parabola di fuoco P1 e direttrice L1

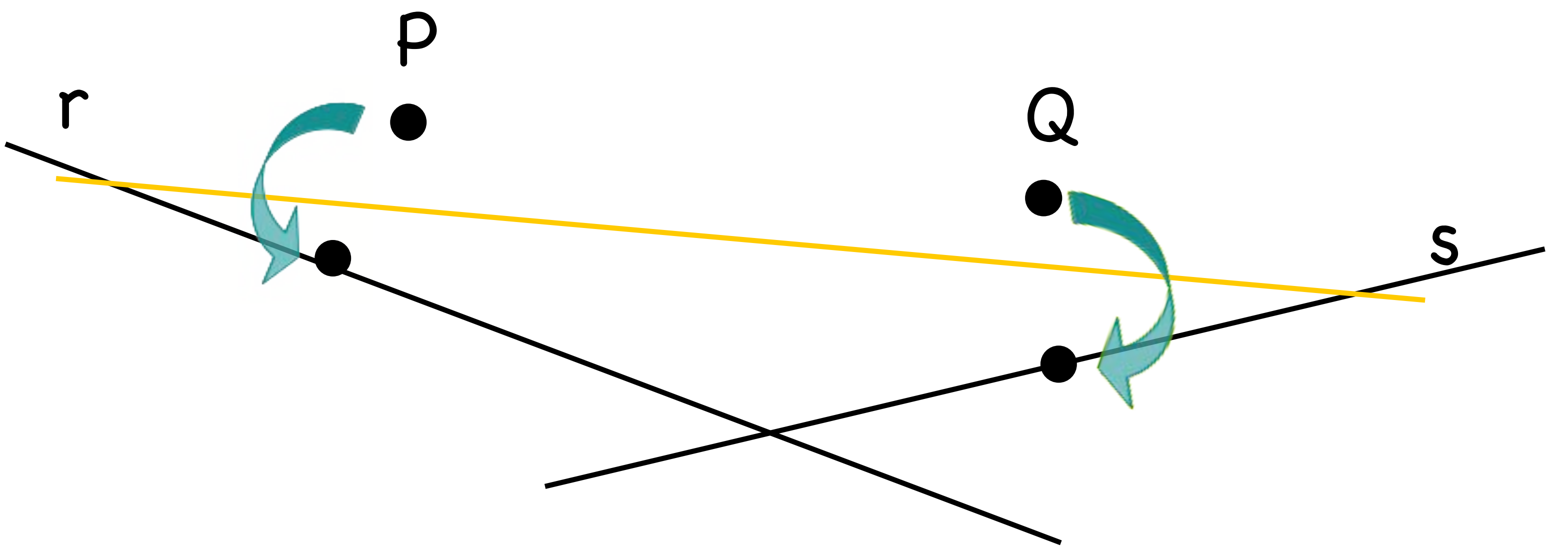
Risolvere un'equazione di secondo grado.

- *Abbiamo ottenuto la parabola come inviluppo di rette tangenti.*

- *Il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola risolve un'equazione di secondo grado.*

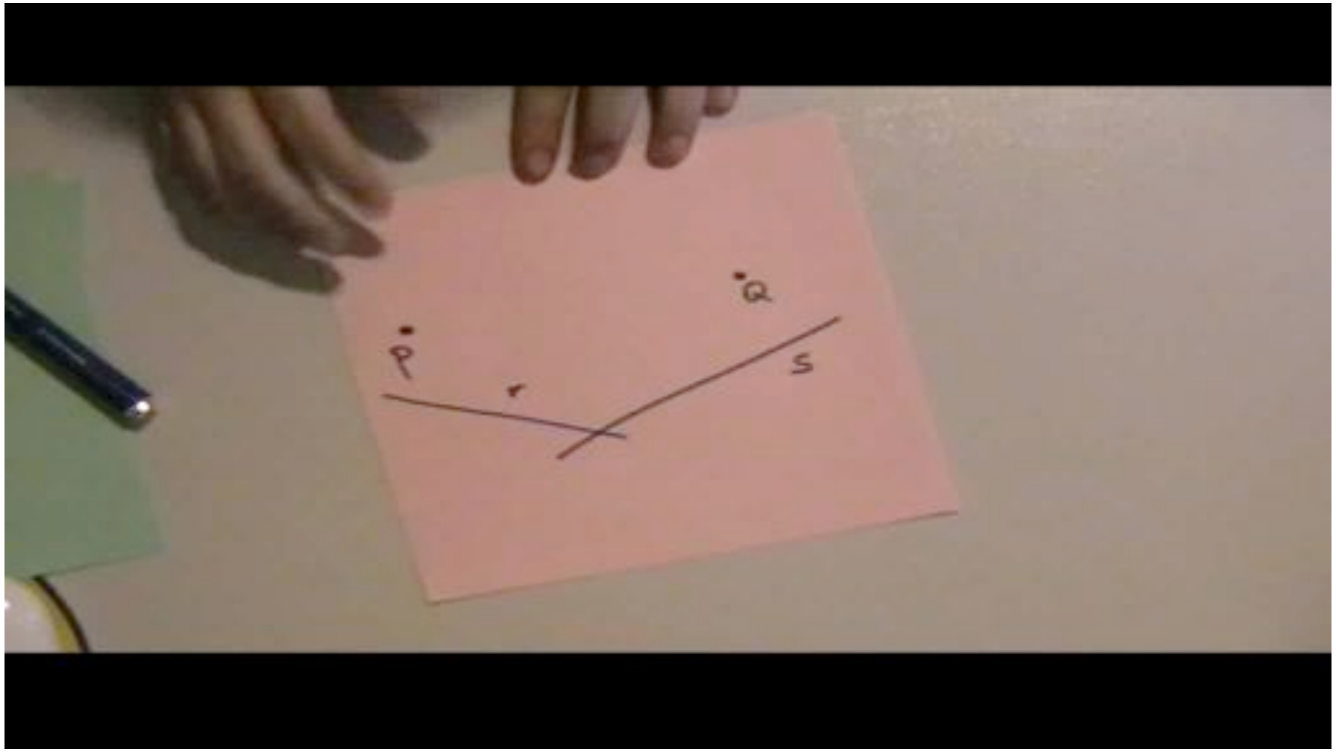
Assiomi della geometria degli origami.

- *O6*: Dati due punti P,Q e due rette r,s è possibile piegare una linea che porti contemporaneamente P su r e Q su s.



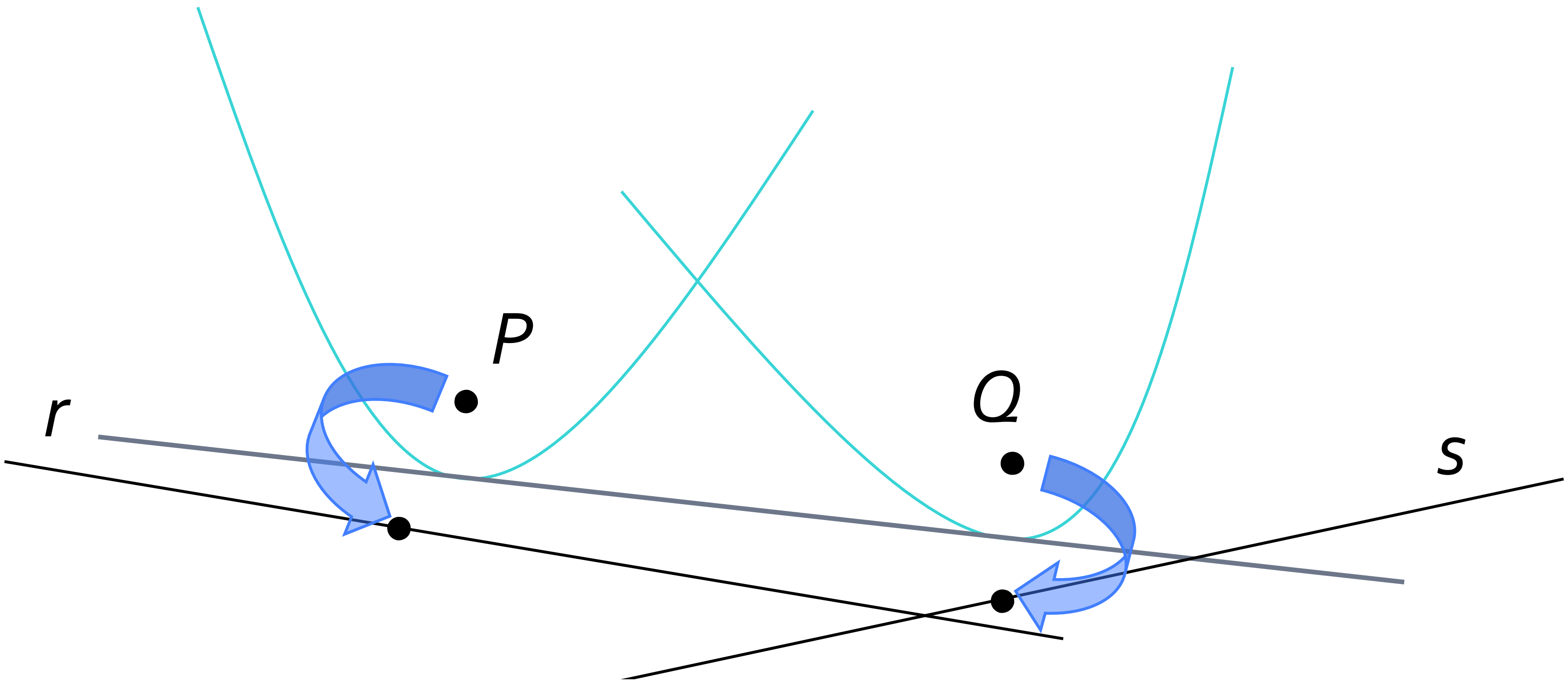
Assiomi della geometria degli origami.

- *O6*



Risolvere un'equazione di terzo grado.

- Il problema di risolvere un'equazione di terzo grado si riconduce (analiticamente) in generale a cercare le tangenti comuni a due parabole.



Risolvere un'equazione di terzo grado.

Margherita Beloch Piazzola (1930)

SULLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI DI TERZO E QUARTO GRADO COL METODO DEL RIPIEGAMENTO DELLA CARTA

di MARGHERITA PIAZZOLLA BELOCH, a Ferrara.

Costruire un quadrato di cui due lati opposti passino rispettivamente per due punti dati, e i due vertici situati su uno dei rimanenti lati stiano rispettivamente su due rette date (¹).

Siano A, B i due punti dati, r, s le due rette date. Indichiamo con X, Y i vertici del quadrato da costruirsi, giacenti rispettivamente sulle rette r, s.

Un lato del quadrato sarà allora XY. Supponiamo che il secondo lato del quadrato uscente da X passi per A e il secondo lato uscente da Y passi per B.

Si consideri la parabola avente per fuoco il punto A, e per tangente nel vertice la retta r, di cui per proprietà nota la retta (incognita) XY è tangente. Similmente si consideri la parabola avente per fuoco il punto B, e per tangente nel vertice la retta s, di cui per la stessa proprietà la retta XY è tangente. Questa retta si può quindi costruire come una delle tangenti comuni alle due parabole, e determinare quindi i punti X, Y e in conseguenza il quadrato richiesto.

Siccome due parabole hanno tre tangenti comuni (oltre la retta all'infinito), il problema ammette tre soluzioni (tra cui certo una reale).

Risolvere un'equazione di terzo grado.

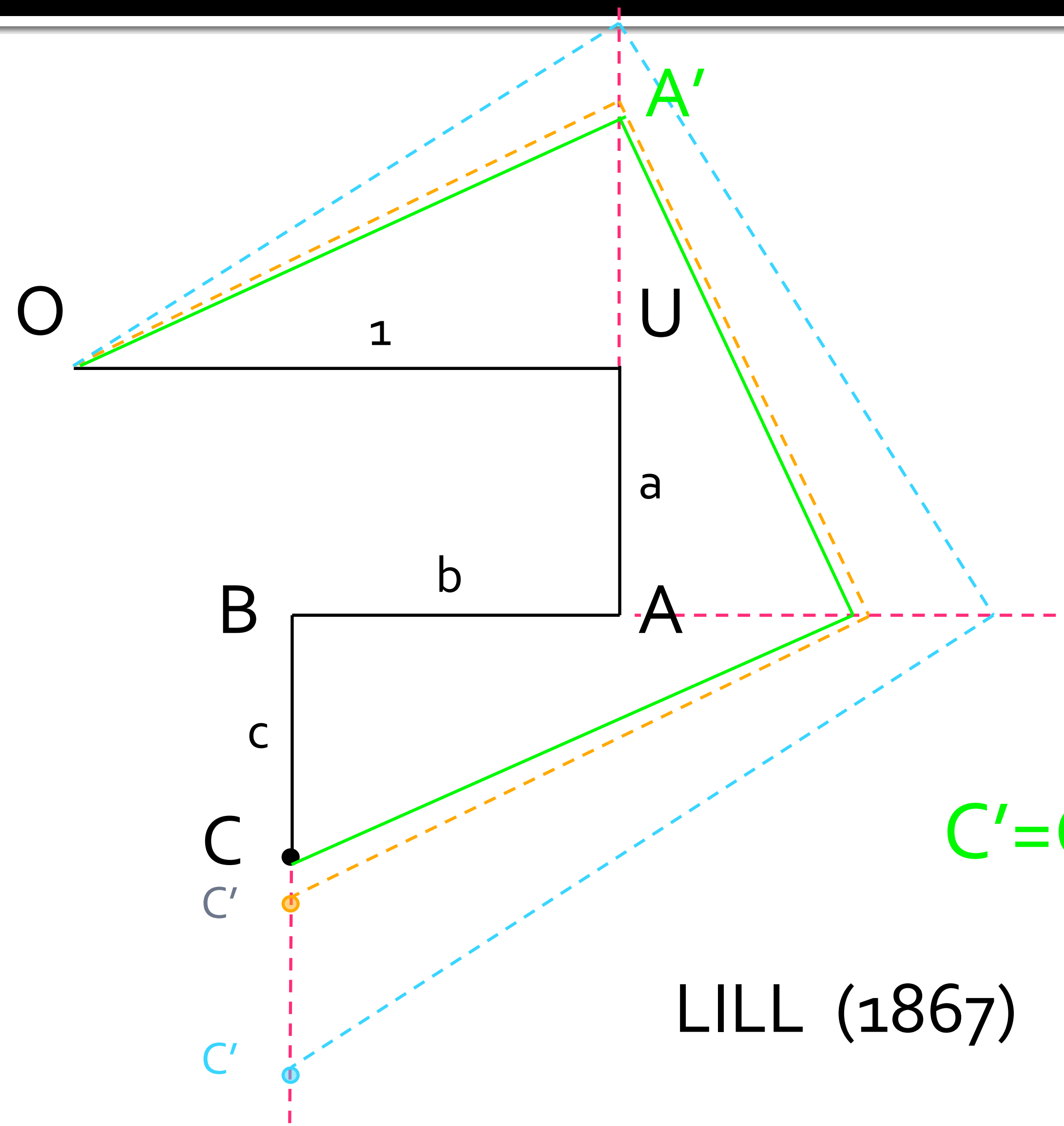
Come applicare il MP ?

Consideriamo un'equazione di III grado nella forma

$$X^3 + aX^2 + b\,X = c$$

interpretiamola geometricamente.

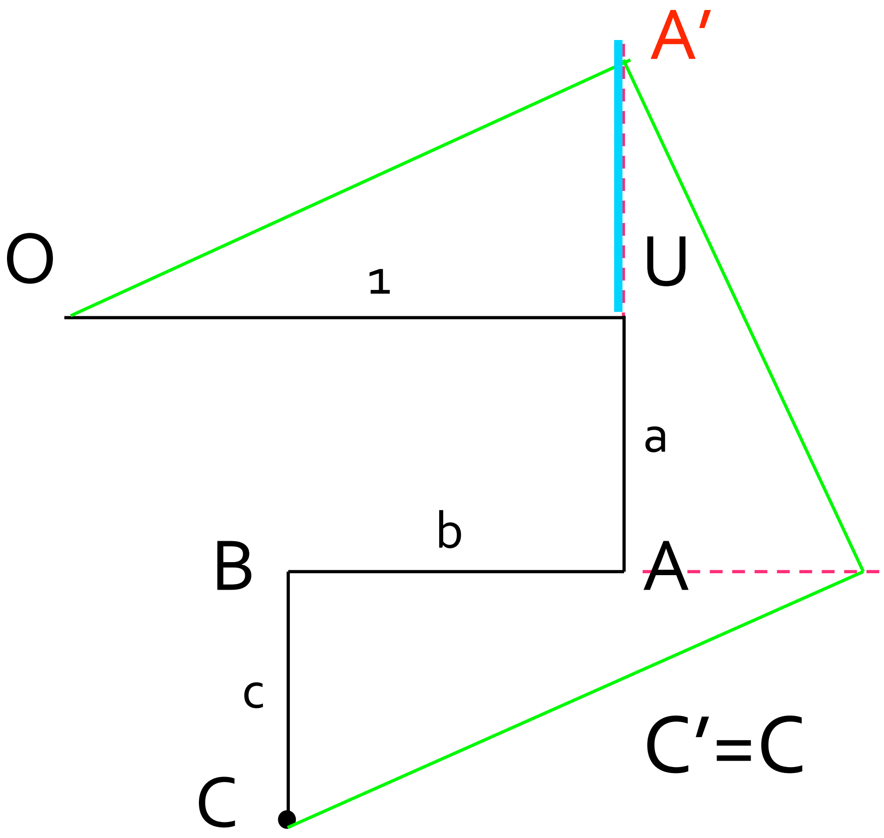
$X^3 + aX^2 + bX = c$



COSA SUCCEDE QUANDO

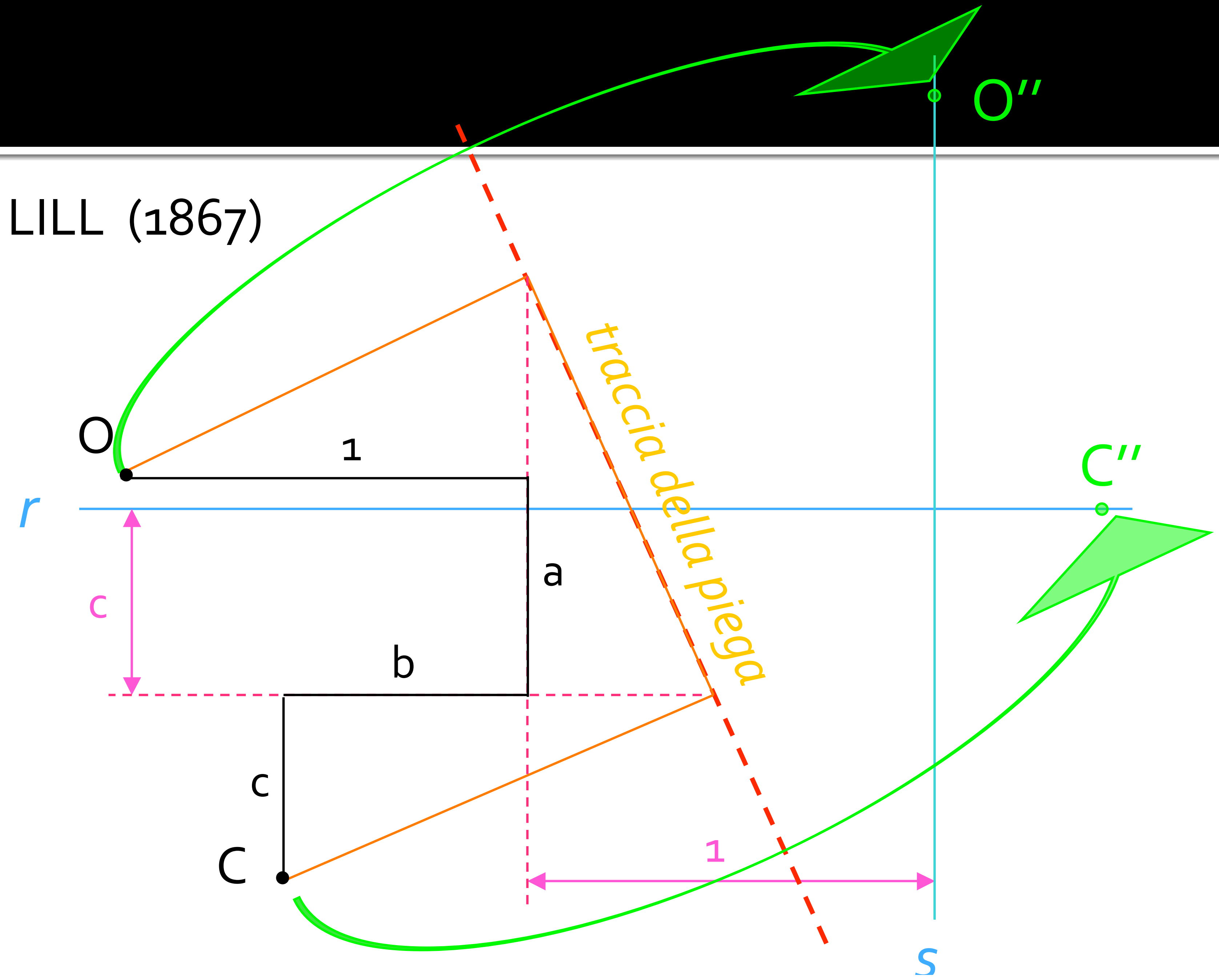
C' = C ?

$X^3 + aX^2 + b\,X = c$



Quando C’=C allora la misura UA’ è una soluzione dell’equazione.

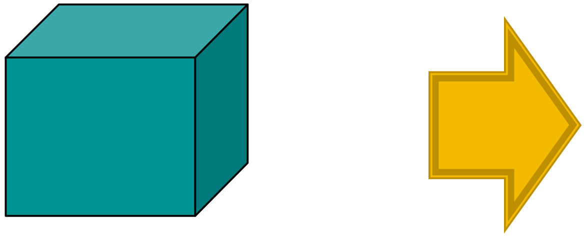
Utilizzando l'assioma O6 si porta O su s e C e r



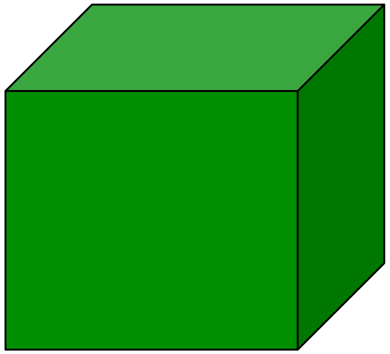
Risoluzione di un'equazione di terzo grado

- Duplicazione del cubo $(\sqrt[3]{2})$ – Grecia Eratostene (600-300 a.C)

Dato un cubo di lato l

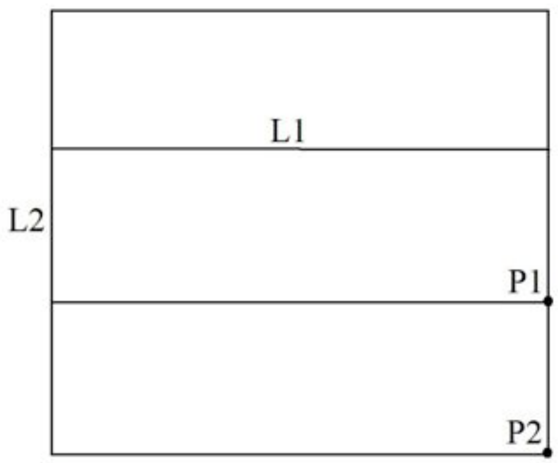


trovare il lato L del cubo di volume doppio.

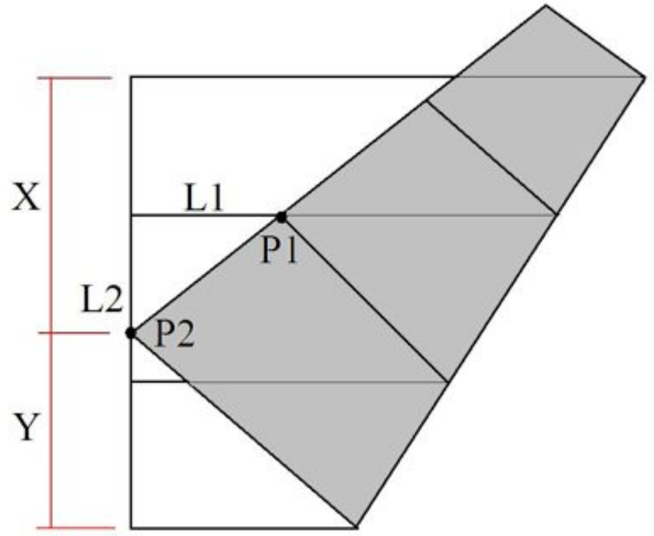


Risolvere un'equazione di terzo grado.

Soluzione di Peter Messner

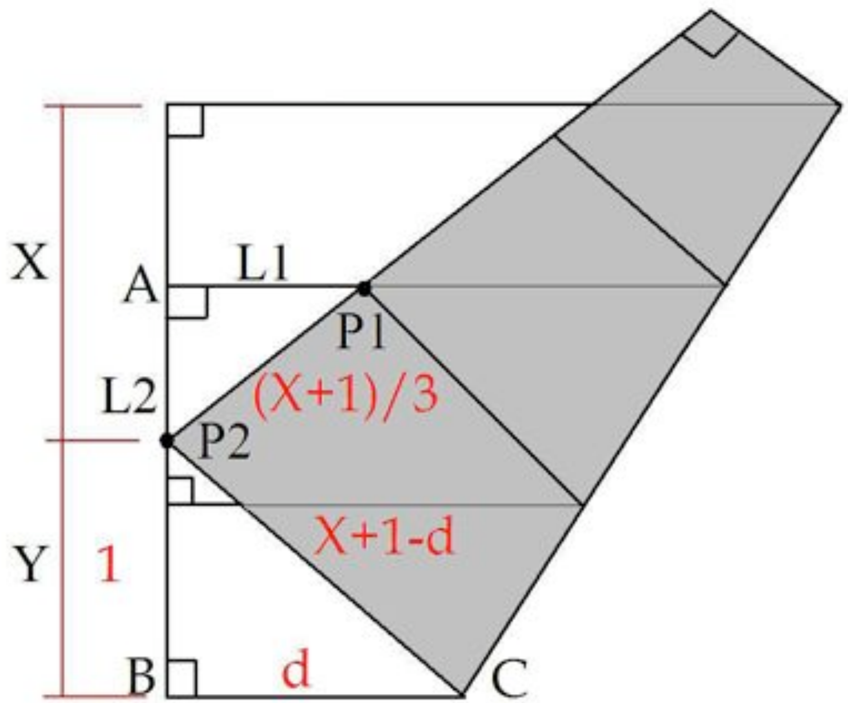


Dividere il lato del foglio in 3 parti uguali



Applicare l'assioma O6 portando P1 su L1 e P2 su L2

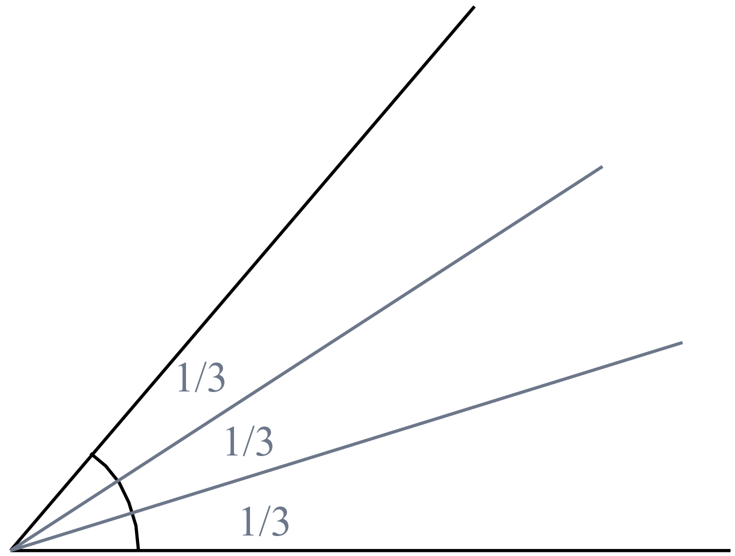
Risolvere un'equazione di terzo grado.



Si ottiene che X^3 =2

Risoluzione di un'equazione di terzo grado

- Trisezione di un angolo



Risoluzione di un'equazione di terzo grado

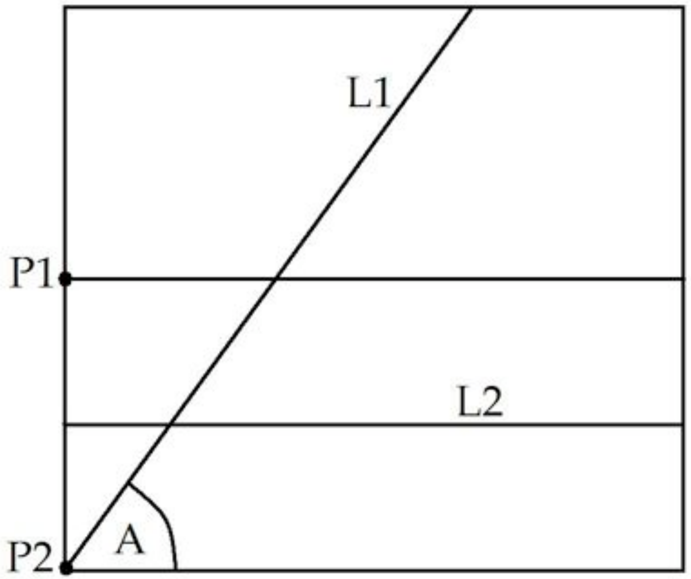
- Per risolvere il problema analiticamente possiamo impostare l'equazione

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$$

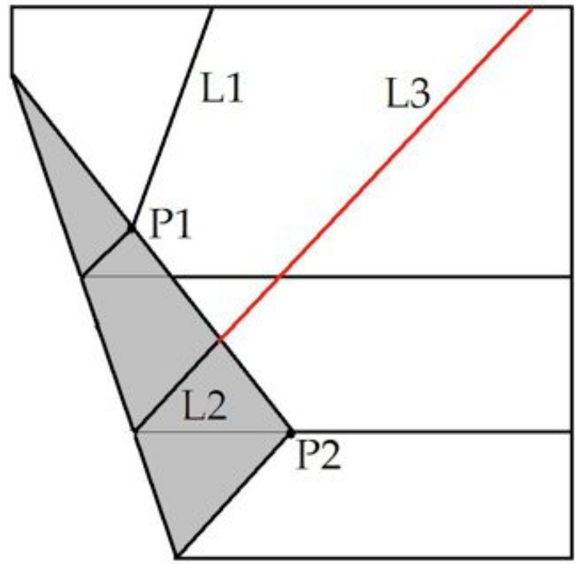
La nostra incognita è cos (α)

$$X^3 - (3/4)X - (1/4)\cos(3\alpha) = 0$$

Risoluzione di un'equazione di terzo grado

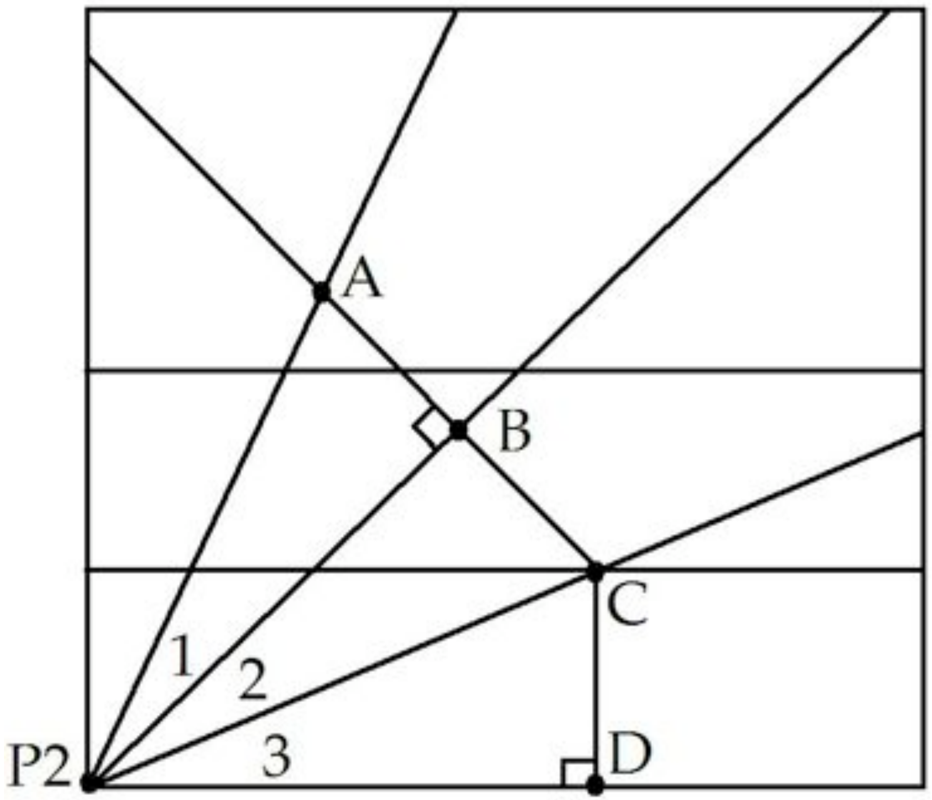


Dividere in 4 parti uguali



Si porta P2 su L2 e P1 su L1 (Assioma O6)

Risoluzione di un'equazione di terzo grado



I Triangoli P2AB, P2BC e P2CD sono congruenti

Terzo grado e geometria di riga e compasso.

- *Definizione:* *Un numero reale α, è costruibile se con riga e compasso e l'unità di misura fissata, si riesce a costruire un segmento di lunghezza |α|*

- *Quindi :* *Un punto P è costruibile se e solo se lo sono le sue coordinate rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano*

Risolvere un'equazione di terzo grado.

- *In generale un angolo Ω non può essere trisecato con la geometria di riga e compasso.*

- *Quali angoli sono trisecabili con gli assiomi di euclide?*

Terzo grado e geometria di riga e compasso.

INFATTI

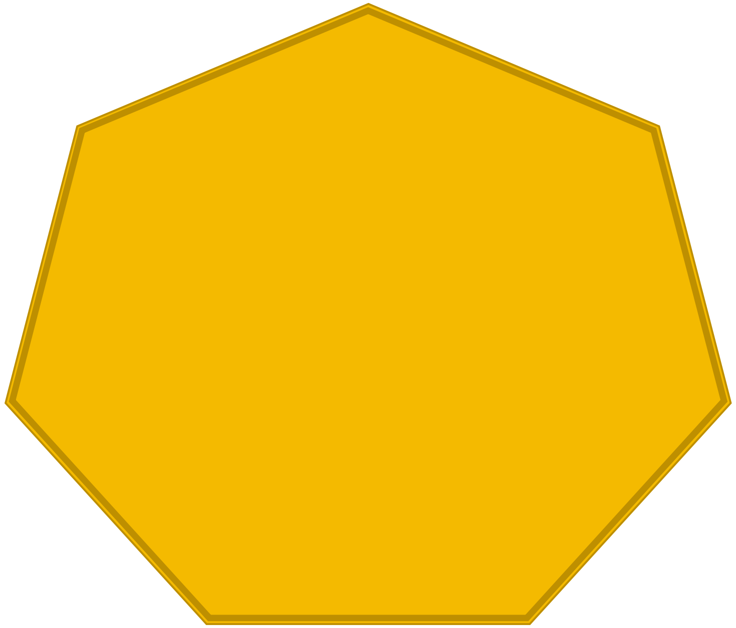
- *Lemma: Se Un numero reale α soddisfa un polinomio irriducibile (in Q[x]) di grado n che non è una potenza di 2,allora il numero non è costruibile (con riga e compasso).*

Ma alcuni angoli sono costruibili……
Quali?

Ad esempio : $\pi/2$

Costruzione di poligoni regolari……

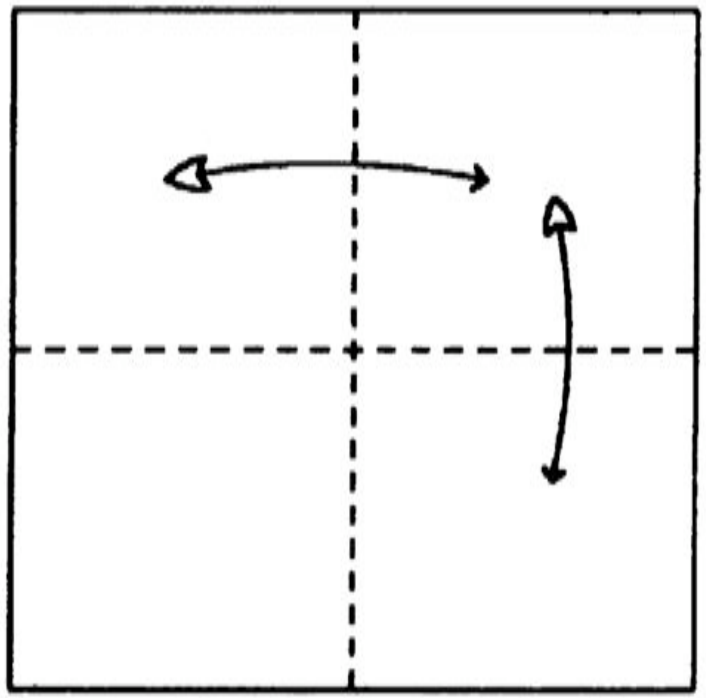
- Costruire un eptagono regolare

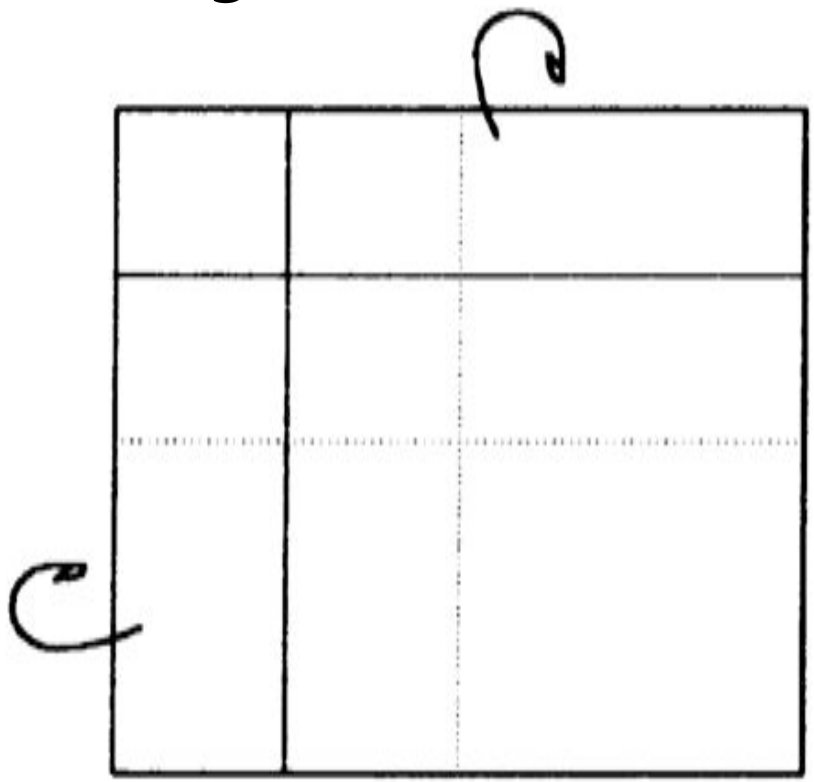


$$X^3 + X^2 - 2X - 1 = 0$$

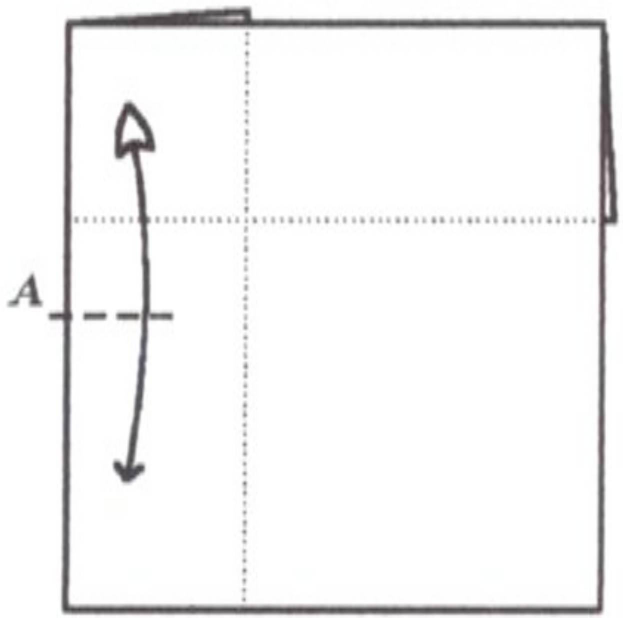
Costruzione di poligoni regolari……

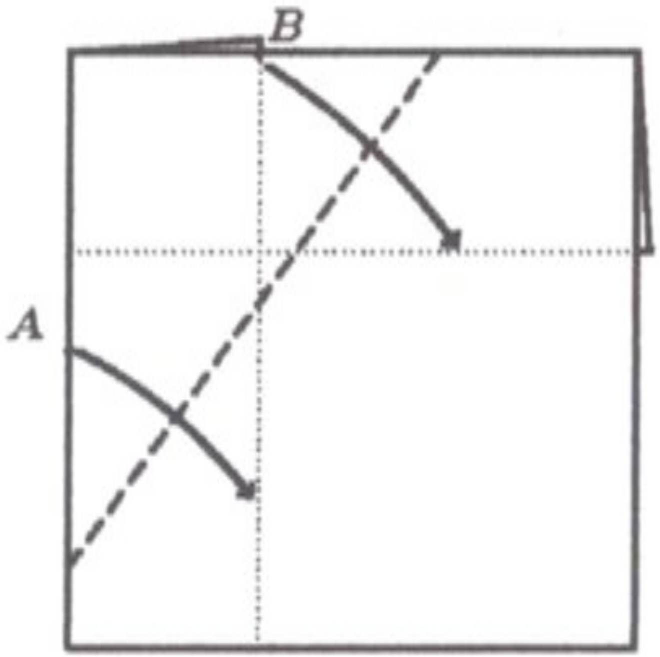
- Costruire un eptagono regolare



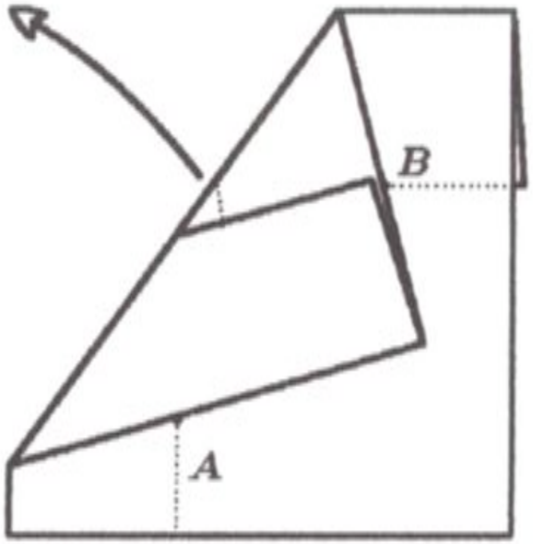


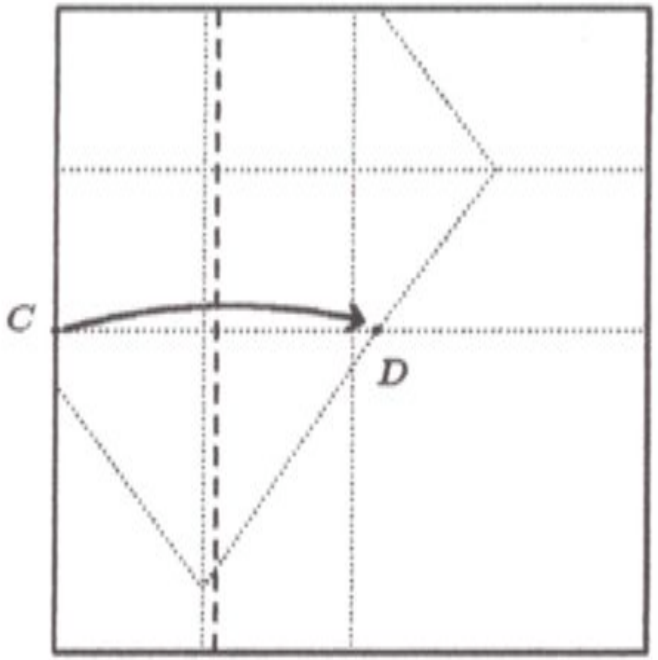
Costruzione di poligoni regolari……



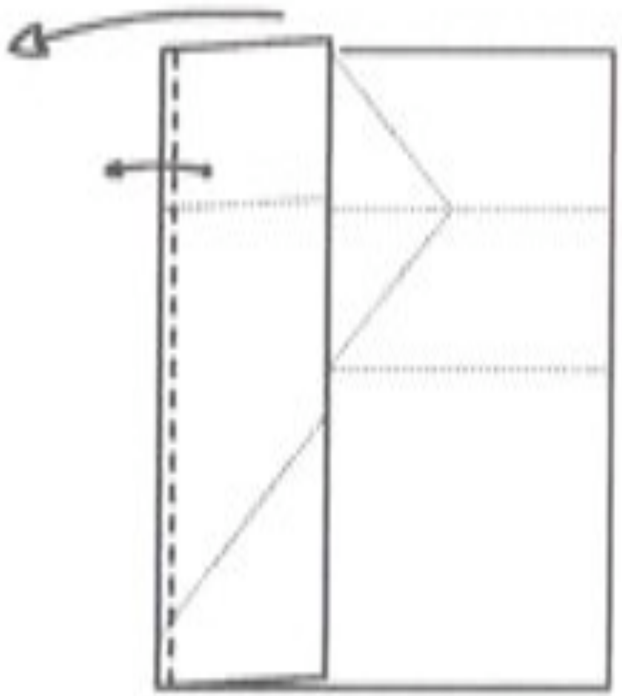


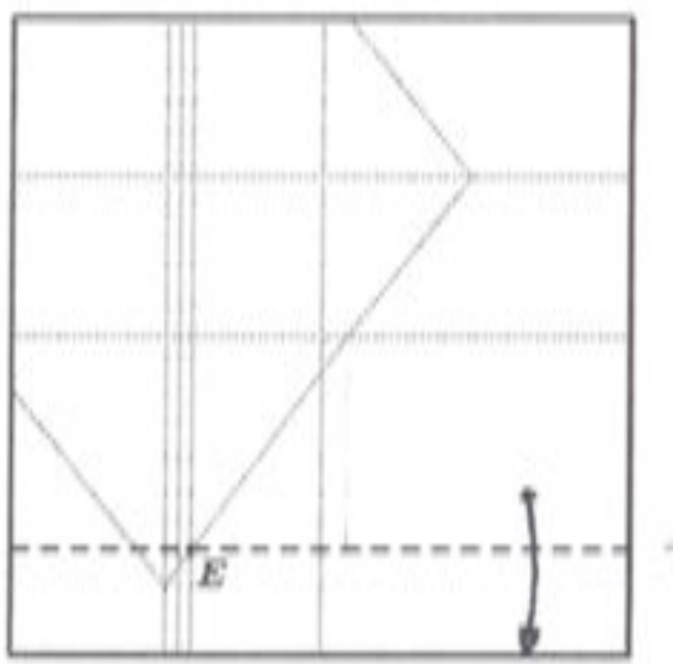
Costruzione di poligoni regolari……



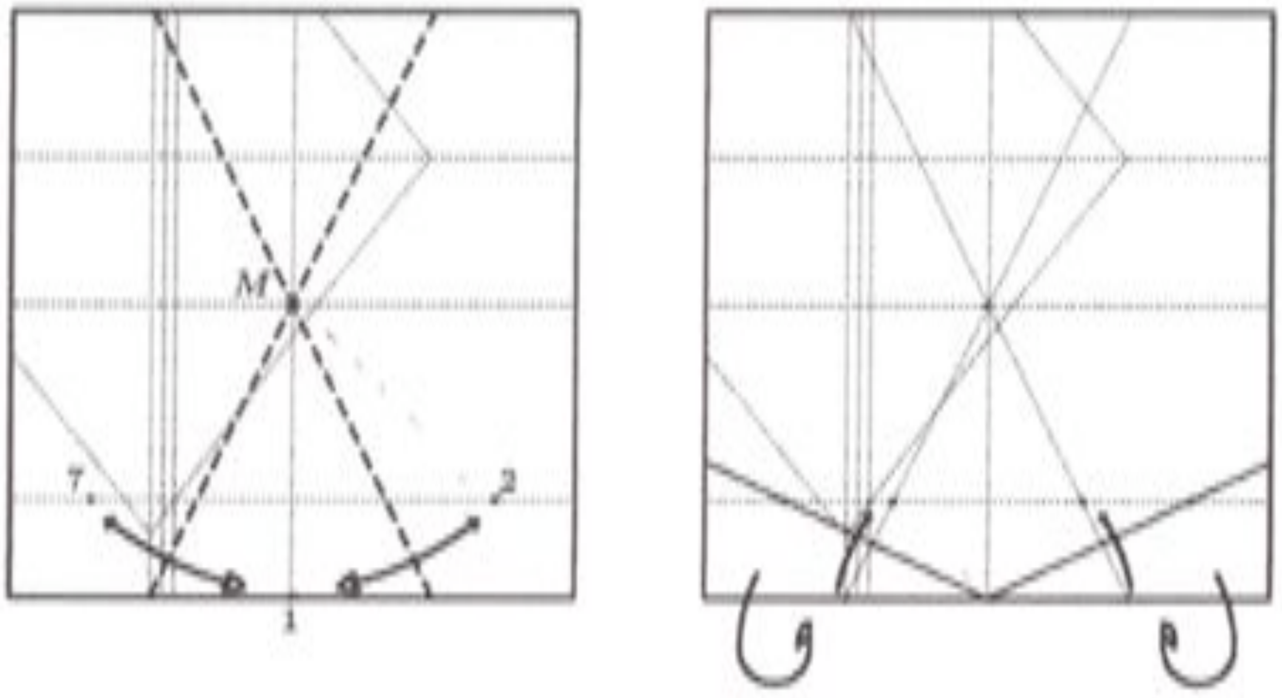


Costruzione di poligoni regolari……

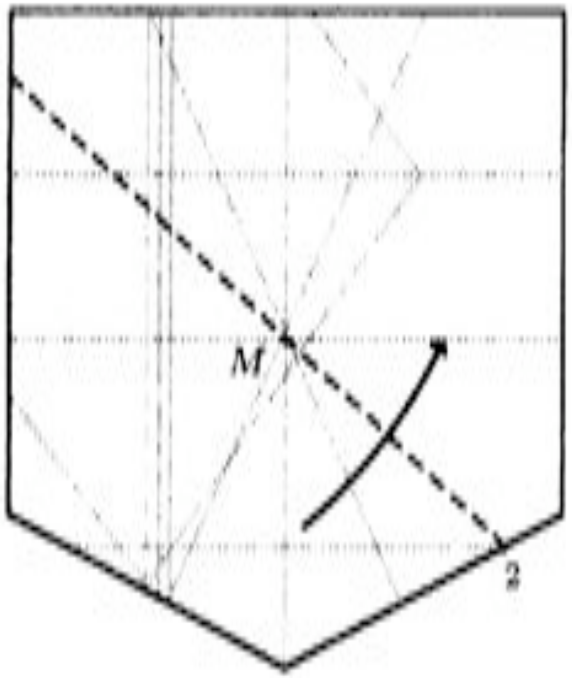


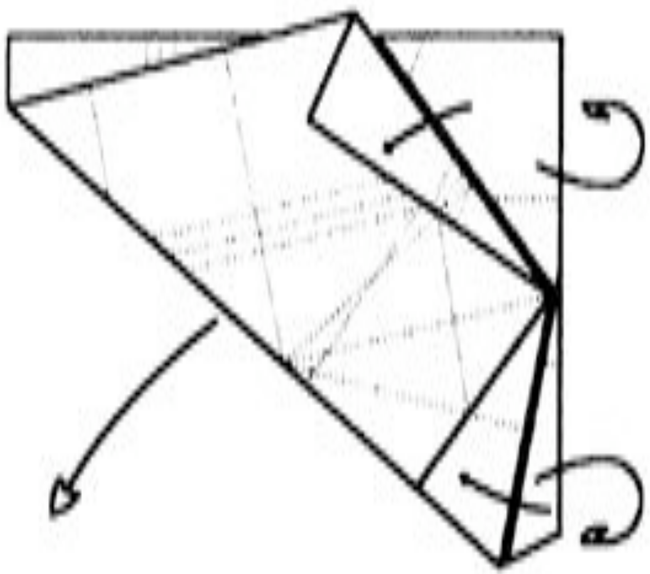


Costruzione di poligoni regolari……

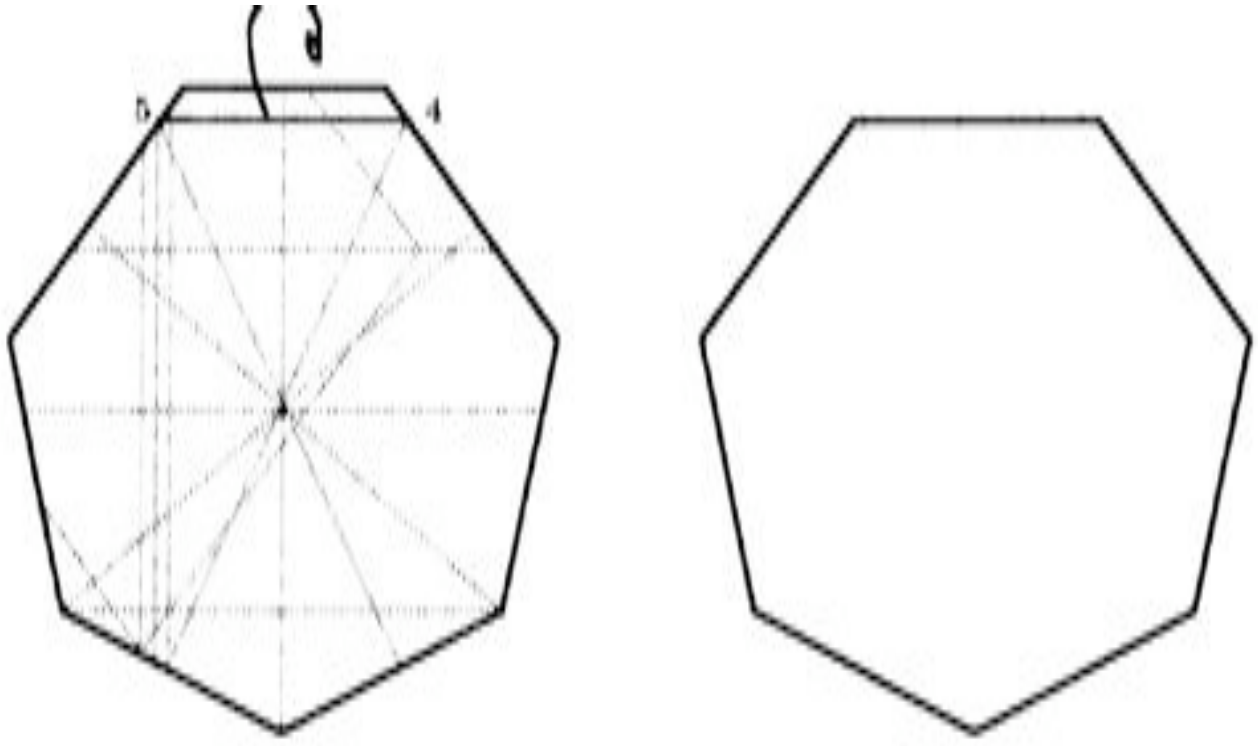


Costruzione di poligoni regolari……





Costruzione di poligoni regolari……



Quali poligoni si possono costruire con gli origami ?

- Si può dimostrare che i poligoni costruibili con Riga e Compasso devono avere un numero di lati pari a

$$n = 2^a p_1 p_2 \dots p_k$$

ove $p_1, p_2, \dots p_k$ sono numeri primi distinti di Fermat cioè della forma $2^r + 1$.

Quali poligoni si possono costruire con gli origami ?

Gli unici numeri primi di Fermat finora noti sono

3, 5, 17, 257, 65537

Quali poligoni si possono costruire con gli origami ?

I poligoni regolari costruibili con gli Origami devono necessariamente avere un numero di lati uguali a

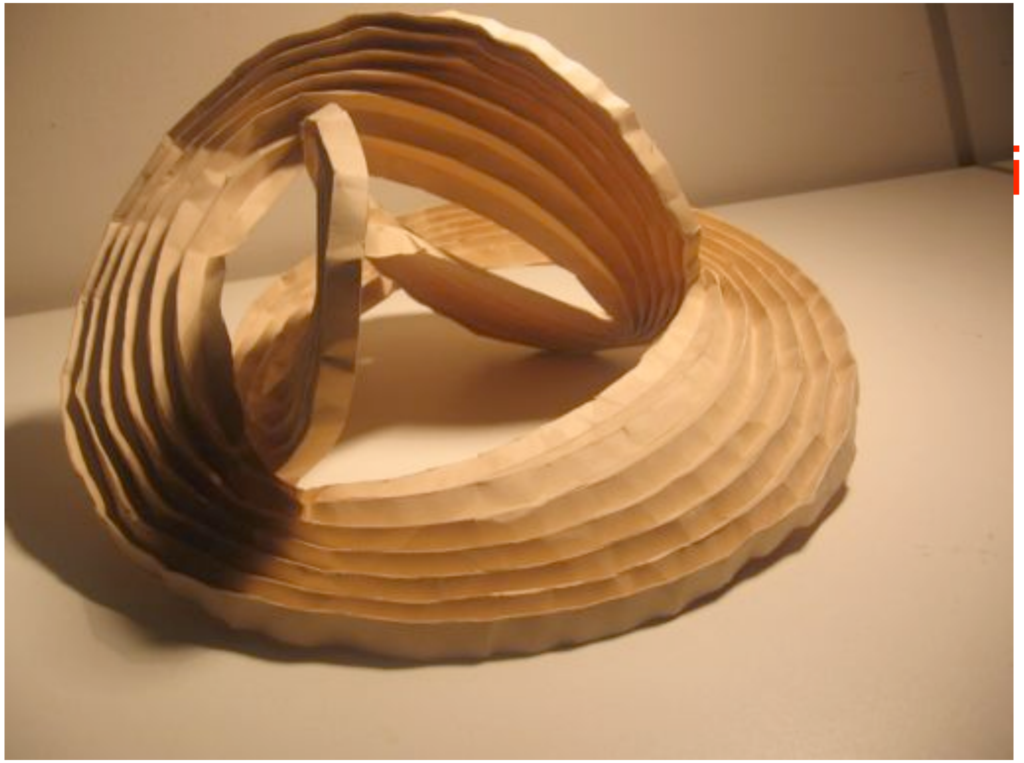
$$n = 2^a 3^b p_1 p_2 \dots p_k$$

ove $p_1, p_2, \dots p_k$ sono numeri primi distinti della forma $2^r 3^s + 1$.

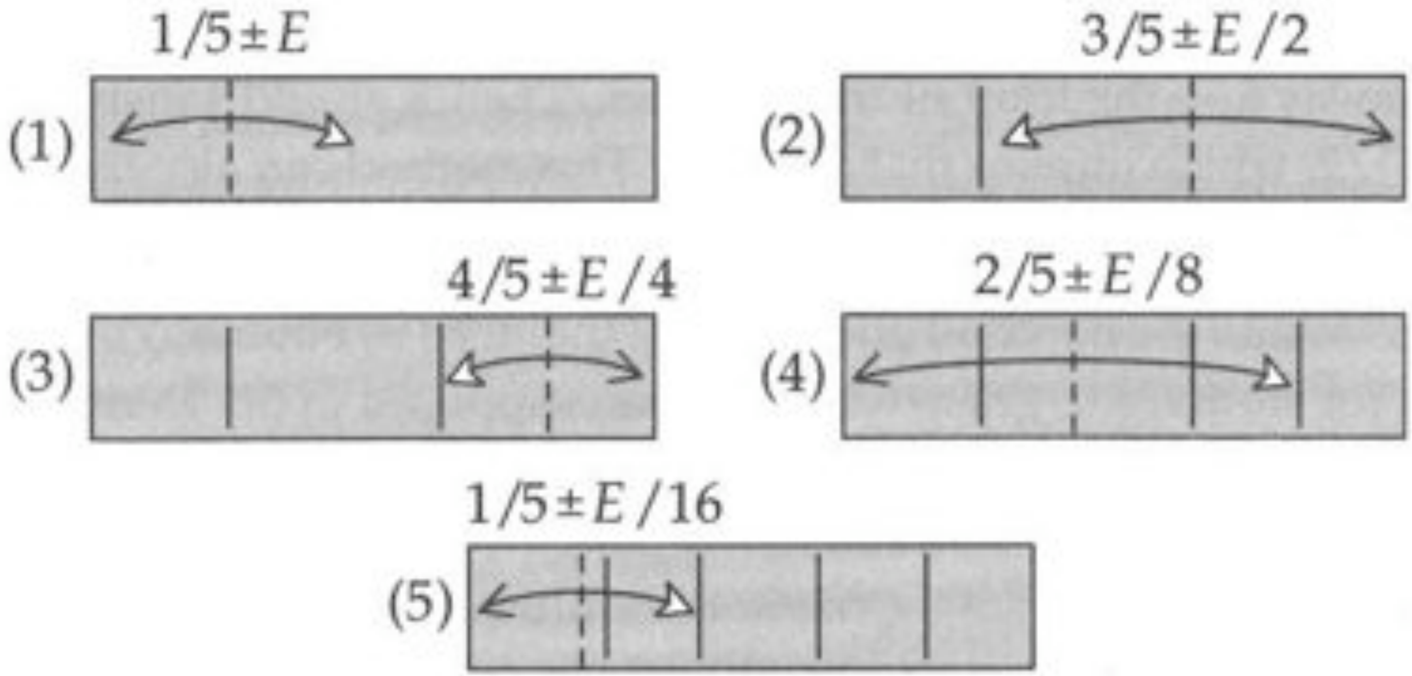
Computational origami

- Utilizzare la matematica per risolvere problemi “tipo origami”

- Come si … i uguali?

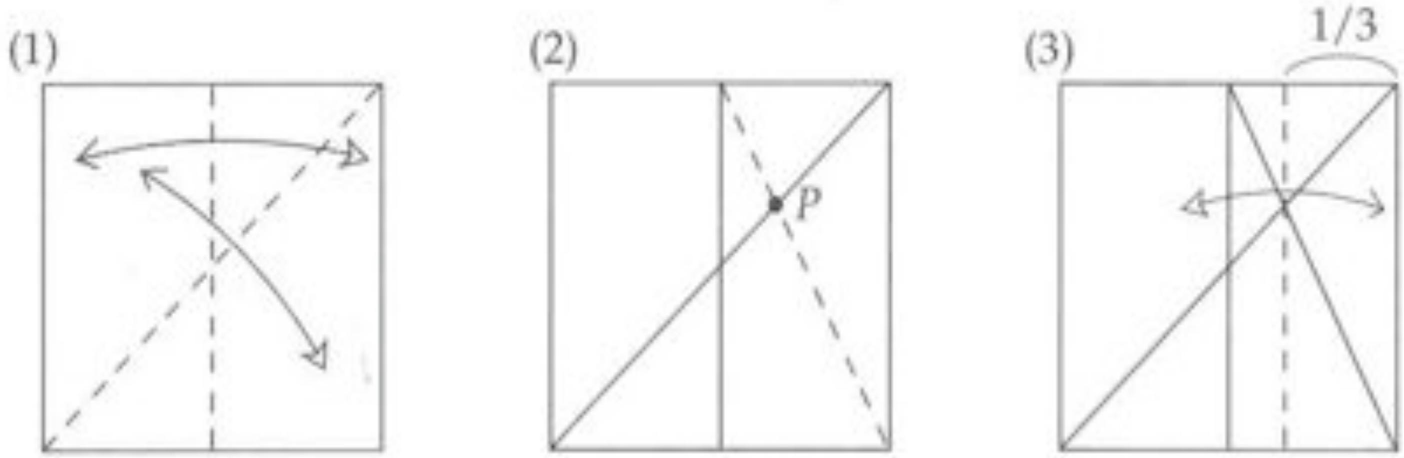


Approssimazione di Fujimoto



In una scuola superiore si può introdurre il concetto di limite di una successione.

Divisione esatta di un foglio in 3, n parti



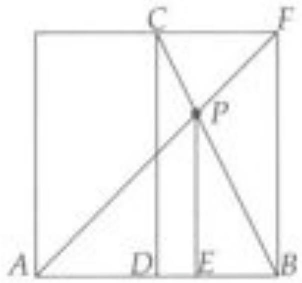
Perché tale metodo funziona?

Gioca un ruolo determinante la similitudine tra triangoli

Infatti ....

Question 1: Synthetic approach

Assume that the square has side length one and consider the labeling in the figure below. Denote the coordinates of P with (x, x). Then AE has length x, so EB has length $1 - x$. Also, EP has length x.



Then $\triangle BDC$ and $\triangle BEP$ are similar. Thus $|CD|/|PE| = |BD|/|BE|$, which becomes

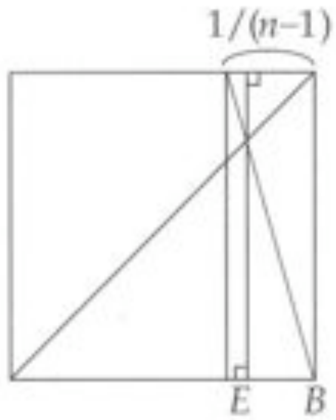
$$\frac{1}{x} = \frac{1/2}{1-x} \Rightarrow 2 - 2x = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

This could also be proven by using the similar triangles $\triangle ABP$ and $\triangle CPF$.

Possiamo generalizzare tale metodo?

Divisione in n parti uguali (n dispari)

The picture below shows how to generalize this method to fold the side of a square into n equal divisions, where n is odd. Instead of using the 1/2 vertical line, make a vertical line at $x = (n-2)/(n-1)$ (or $1/(n-1)$ away from the right side).

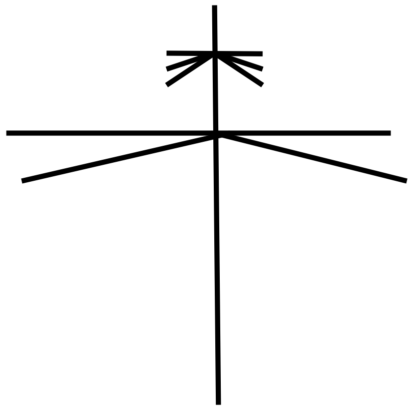


COSTRUZIONE GEOMETRICA MEDIANTE CALCOLO DI PIEGA: CREASE PATTERN

Soggetto: Libellula

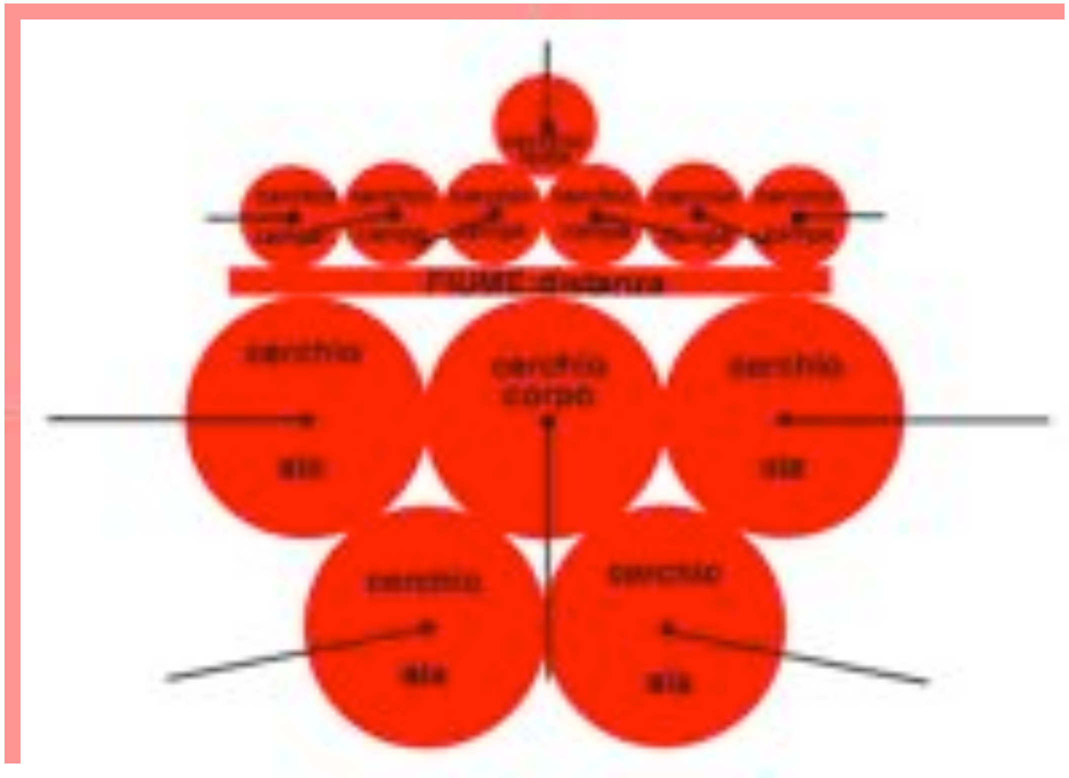
Inventare ….. pensare

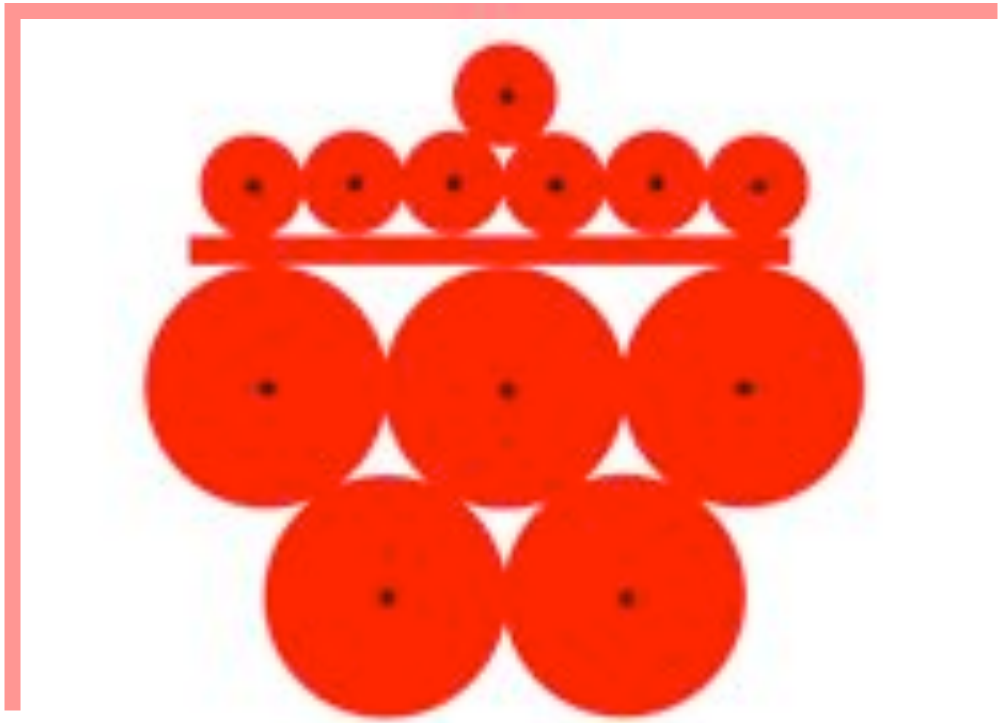
1)Soggetto in considerazione



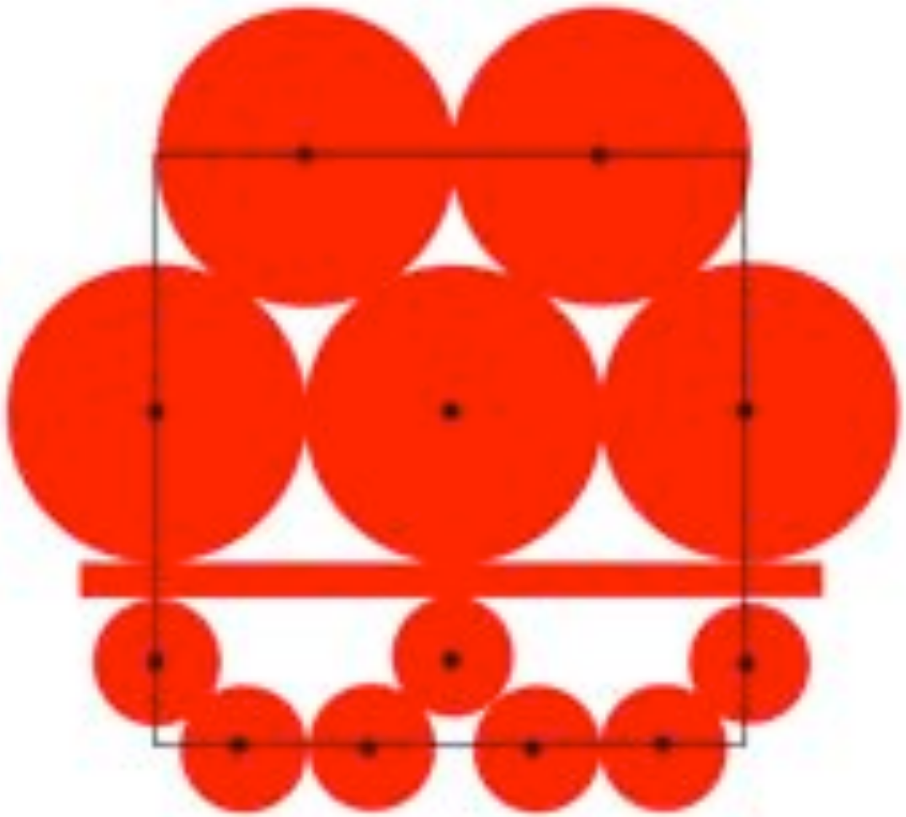
2)Estrapolazione albero matematico

3)Trasformazione in un insieme di cerchi (circle)e fiumi(rivers) rispettando le giuste proporzioni del soggetto matematico

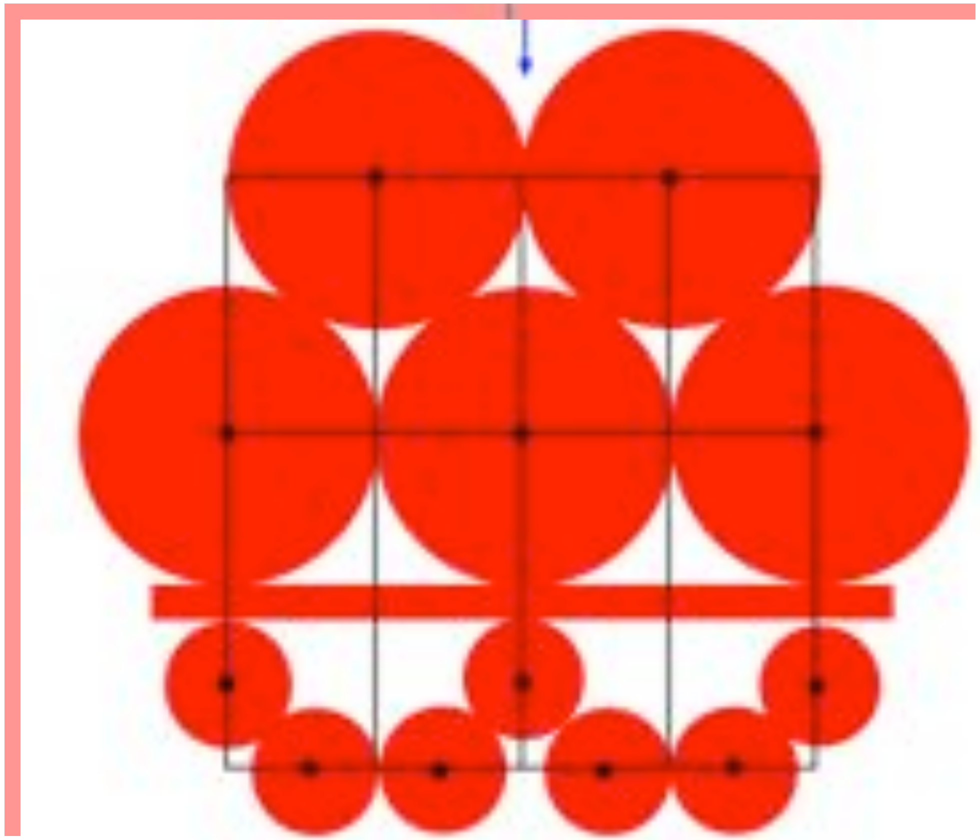


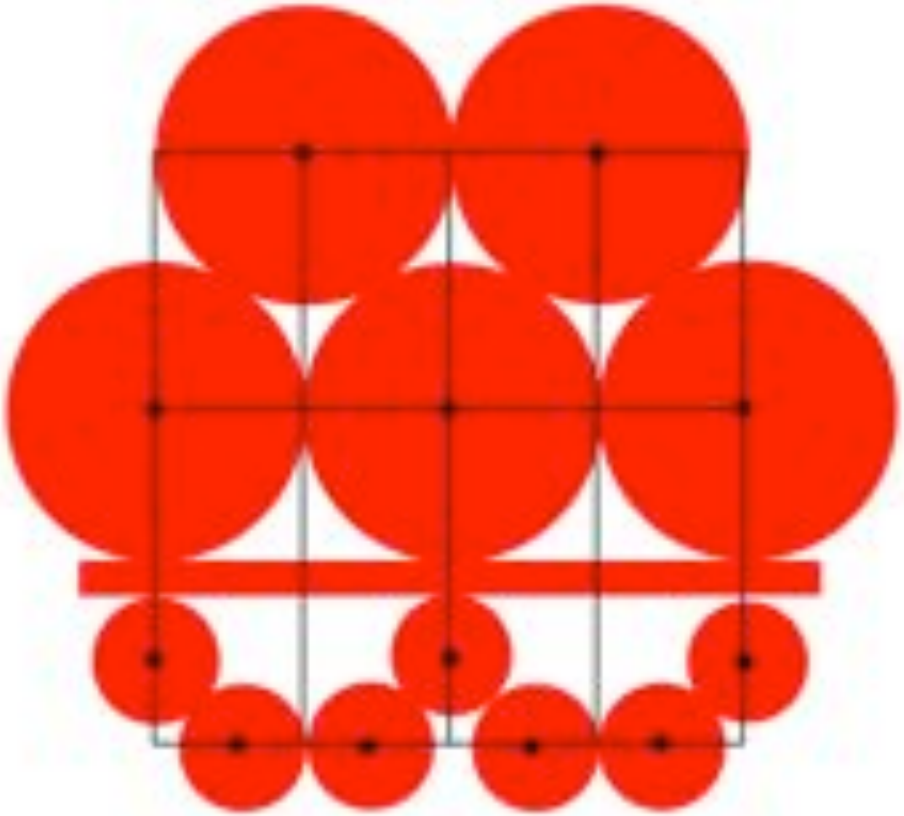


4)Disposizione simmetrica dei cerchi e dei fiumi all’internodel nostro poligono : il quadrato

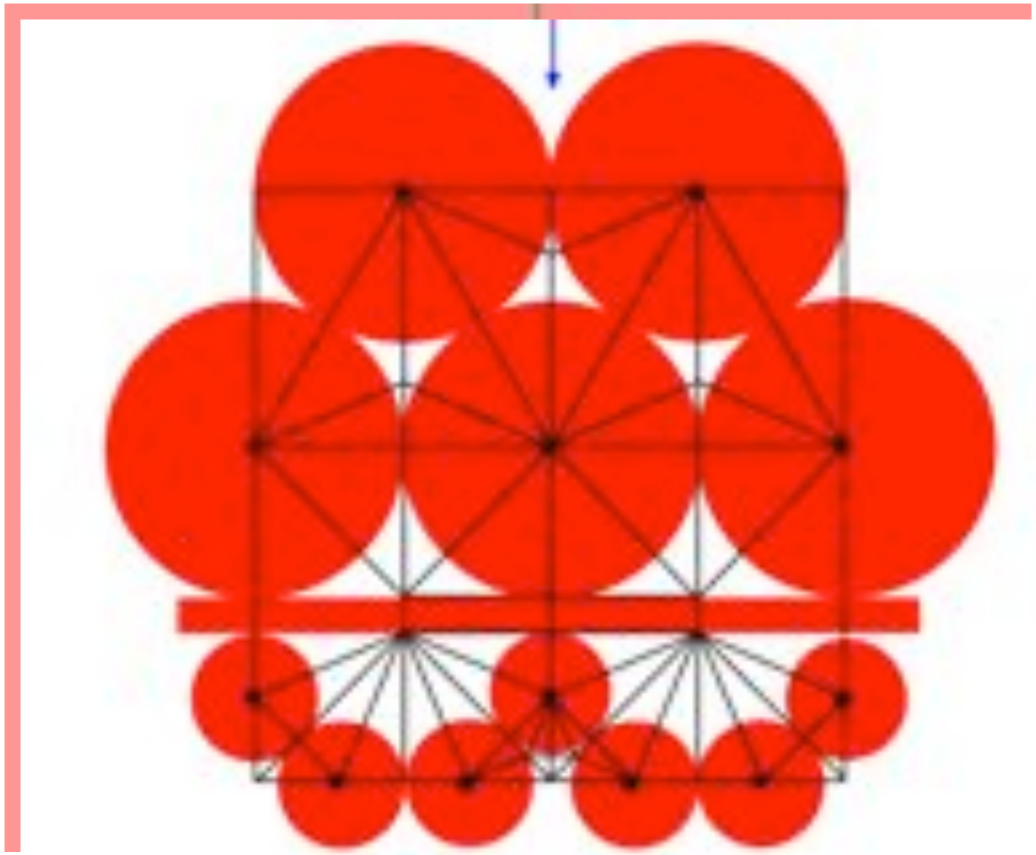


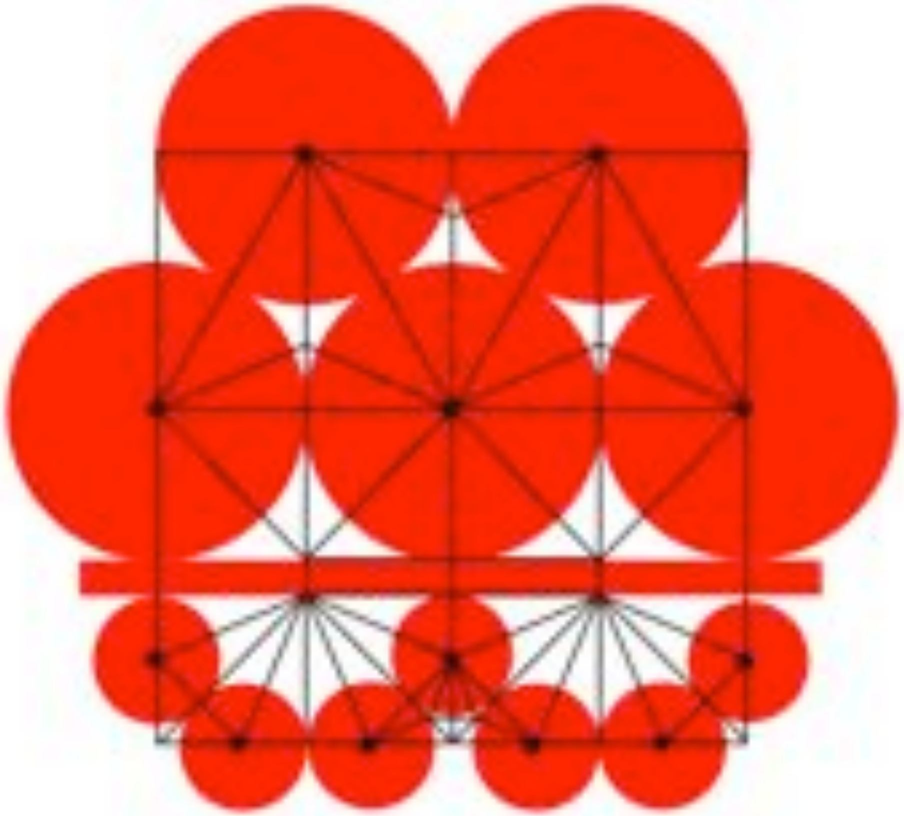
5) Si uniscono i segni di ogni cerchio, per mezzo di linee in senso orizzontale e verticale



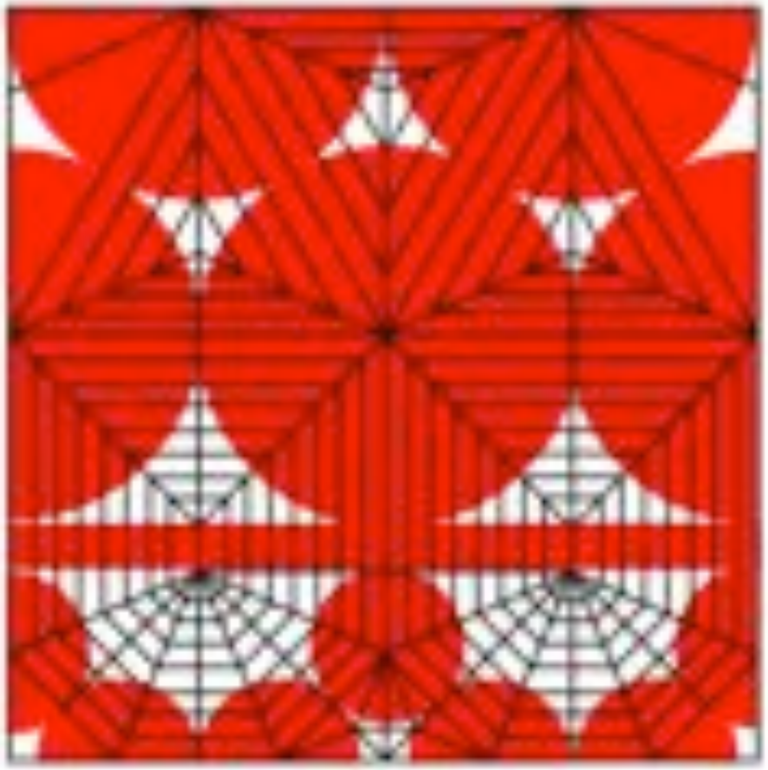


6)Si uniscono tutti i centri di ogni cerchio all’interno del nostro quadrato rispettando anche la distanza dei fiumi inseriti





7)Si piega la base rispettando la sequenza di pieghe a monte e a valle Ottenendo così la nostra base che andrà modificata con ulteriori passaggi (secondari) che serviranno sia per ottenere armonia al modello sia per Terminare la modellazione .



Tarantola

Tartaruga dell’ovest

Conclusione

"La geometria è un' arte degli occhi e delle mani, non solo della mente"

J.Pedersen
(Teorico dei numeri)