**Giorgio Patrizio**

# Variabile Complessa

**A.A. 2015-2016**

*Il apparut que, entre deux vérités du domaine*
*réel, le chemin le plus facile et le plus court*
*passe bien souvent par le domaine complexe*

Paul Painlevé

CAPITOLO 1

# Numeri complessi e funzioni continue

## 1.1. Il campo dei numeri complessi

Sull'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali siano definite operazioni di somma e di prodotto mediante

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \tag{1.1.1}$$

e

$$(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu). \tag{1.1.2}$$

Con le operazioni (1.1.1) e (1.1.2), $\mathbb{R}^2$ ha una struttura algebrica di campo che denoteremo $\mathbb{C}$ e chiameremo il campo dei numeri complessi. L'elemento neutro della somma è il numero complesso $0 = (0, 0)$ e l'elemento neutro del prodotto è il numero complesso $1 = (1, 0)$. Il reciproco di $(a, b) \neq (0, 0)$ è dato da

$$(a, b)^{-1} = \frac{(a, -b)}{a^2 + b^2} \tag{1.1.3}$$

Il numero complesso $i = (0, 1)$ è tale che $i^2 = ii = -1$. A volte il numero $i$ viene chiamato *unità immaginaria*. Per ogni numero complesso $z = (a, b)$ si ha allora

$$(a, b) = a + ib. \tag{1.1.4}$$

Allora per ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ se $z = a + ib$ diremo che il numero (reale) $Re(z) = a$ è la *parte reale* di $z$ e che il numero (reale) $Im(z) = b$ è la *parte immaginaria* di $z$. Il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ si identifica con il sottocampo di $\mathbb{C}$ dei numeri complessi con parte immaginaria nulla (al quale è ovviamente isomorfo). Diremo quindi che un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è *reale* se la parte immaginaria di $z$ è nulla. Il *coniugato* di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero $\overline{z} = a - ib$ e l'applicazione di $\mathbb{C}$ in sé definita da $z \mapsto \overline{z}$ si dice *coniugio*. Dunque $\mathbb{R}$ è esattamente l'insieme dei punti fissi del coniugio. Il coniugio è un automorfismo di $\mathbb{C}$ ossia

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \quad e \quad \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}.$$

Inoltre il coniugio è involutivo, ossia $\overline{\overline{z}} = z$. È immediato verificare che

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad e \quad Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Il *modulo* di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero reale

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{z\overline{z}}. \tag{1.1.5}$$

Si osservi che dalla definizione, per $z \neq 0$ abbiamo immediatamente $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Riassumiamo rapidamente le proprietà del modulo:

$$|z| \geq 0 \quad e \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0, \tag{1.1.6}$$

$$|zw| = |z||w|. \tag{1.1.7}$$

$$|Re(z)| \leq |z| \quad e \quad |Im(z)| \leq |z|, \tag{1.1.8}$$

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad e \quad |z - w| \geq ||z| - |w|| \tag{1.1.9}$$

Su $\mathbb{R}^2$ si possono introdurre coordinate polari in modo da scrivere il punto $(a, b)$ nella forma $(a, b) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ dove $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e, per $(a, b) \neq (0, 0)$, $\theta$ è un angolo fra l'asse reale positivo e la semiretta per l'origine e $(a, b)$. Allora con la notazione di numero complesso, se $z = a + ib$, avremo la seguente *forma trigonometrica* per $z$:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Per $z \neq 0$ l'angolo $\theta$ è determinato a meno di multipli interi di $2\pi$; ogni tale angolo $\theta$ si dice *argomento* di $z$ e si scrive $\theta = \arg z$. In forma trigonometrica il prodotto di due numeri complessi ha una semplice interpretazione geometrica. Se $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi)$ allora da un calcolo immediato segue

$$zw = |z||w|(\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi)). \tag{1.1.10}$$

Dunque il prodotto di due numeri complessi è il numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti. In particolare da (1.1.10) segue che, a meno di multipli interi di $2\pi$, $\arg z^{-1} = -\arg z$. Dunque l'angolo orientato (determinato a meno di multipli interi di $2\pi$) fra due numeri complessi non nulli $z$ e $w$ è dato da

$$\angle(z, w) = \arg w - \arg z = \arg\frac{w}{z}. \tag{1.1.11}$$

Per evitare ambiguità in genere si fissa un intervallo di lunghezza $2\pi$ nel quale far variare l'argomento. Ad esempio nell'esercizio 8 sceglieremo l'intervallo $(-\pi, \pi]$. È molto utile usare la seguente notazione:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1.1.12}$$

Dato che la (1.1.10) implica che $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$, la notazione (1.1.12) è coerente con le usuali proprietà dell'esponenziale. Nel prossimo capitolo daremo una giustificazione rigorosa della (1.1.12).

Per quanto riguarda potenze (intere positive) e radici di un numero complesso ricordiamo il seguente elementare

Teorema 1.1.1: *Siano* $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = |z|e^{i\phi} \in \mathbb{C}$ *e* $n \geq 1$ *un intero. Allora*

*(i)* $z^n = |z|^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = |z|^n e^{in\phi}$;

*(ii) l'equazione* $z^n = 0$ *ha soluzione unica* $z = 0$ *di molteplicità* $n$*; per* $0 \neq w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta) = |w|e^{i\theta}$*, le soluzioni dell'equazione* $z^n = w$ *sono gli* $n$ *numeri complessi distinti*

$$z_0 = |w|^{1/n}(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0) = |w|^{1/n}e^{i\theta_0}$$
$$, \ldots ,$$
$$z_{n-1} = |w|^{1/n}(\cos\theta_{n-1} + i\sin\theta_{n-1}) = |w|^{1/n}e^{i\theta_{n-1}}$$

*dove, per* $j = 0, \ldots, n-1$*, si è posto* $\theta_j = \frac{\theta + 2\pi j}{n}$.

Infine $\mathbb{C}$ può ovviamente essere pensato sia come spazio vettoriale complesso di dimensione 1, ma anche visto come $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ e inteso come spazio vettoriale reale di dimensione 2. A questo proposito si osservi che mentre un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare è sempre $\mathbb{R}$-lineare, non è vero il viceversa. Vedremo che questo fatto giocherà un ruolo importante.

**Esercizi.**

**1.** Sia $M_2(\mathbb{R})$ l'anello delle matrici quadrate di ordine 2 considerato con le usuali operazioni di somma e di prodotto. Se $\varphi\colon \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ è definita da

$$\varphi(x+iy) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

dimostrare che $\mathcal{C} = \varphi(\mathbb{C})$ è un campo e che $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathcal{C}$ è un isomorfismo di campi.

**2.** Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C}|\ |z-2| + |z+2| = 5\},\ \ B = \{z \in \mathbb{C}|\, 0 < Re(iz) < 1\},$$
$$C = \{z \in \mathbb{C}|\, Re(z) + Im(z) < 1\},\ \ D = \{z \in \mathbb{C}|\ |z|^2 - 2iz + 2i\overline{z} + 1 < 0\}.$$

**3.** Per $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, disegnare l'insieme:

$$R = \{z \in \mathbb{C}|\ Im\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0\}.$$

**4.** Se $f(z) = z^2$ e

$$A = \{z \in \mathbb{C}|\, Re(z) = cost.\},\ \ B = \{z \in \mathbb{C}|\, Im(z) = cost.\},$$
$$C = \{z \in \mathbb{C}|\ \arg(z) = cost.\},\ \ D = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| = cost.\},$$

determinare $f(A), f(B), f(C), f(D)$.

**5.** Se $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, determinare le immagini $f(\Gamma_r)$ mediante $f$ delle circonferenze $\Gamma_r = \{z \in \mathbb{C}||z| = r\}$ al variare di $r > 0$.

**6.** Dimostrare che se $L\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare, allora $L$ è $\mathbb{R}$-lineare. Trovare un esempio che dimostri che non vale il viceversa.

**7.** Sia $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare e sia $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice di $T$ relativa alla base $\{1, i\}$ di $\mathbb{C}$. Trovare una condizione necessaria e sufficiente su $a, b, c, d$ affinchè $T$ sia $\mathbb{C}$-lineare.

**8.** Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dimostrare che se $\frac{z}{|z|} \neq -1$, esiste unico $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{z}{|z|} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2}.$$

Imponendo che $\arg z \in (-\pi, \pi]$ e scegliendo la determinazione di $\arctan t$ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, dimostrare che si ha per $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\arg z = \begin{cases} \pi \text{ se } \frac{z}{|z|} = -1 \\ 2\arctan t \text{ se } \frac{z}{|z|} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2} \end{cases} = \begin{cases} \pi \text{ se } \frac{z}{|z|} = -1 \\ 2\arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)+|z|}\right) \text{ se } \frac{z}{|z|} \neq -1. \end{cases} \tag{1.1.13}$$

**9.** Sia $w$ una radice $n$-esima dell'unità, ossia un numero complesso tale che tale che $w^n = 1$. Calcolare $1 + w + w^2 + \ldots + w^{n-1}$.

**10.** Per $n \in \mathbb{N}$, sia $G_n \subset S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z = 1\}$ l'insieme di delle radici $n$-esima dell'unità (si intende che $G_0 = \{0\}$). Si definiscano inoltre

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \qquad \text{e} \qquad H = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} G_{2^m}.$$

Si dimostri che $G_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $G$ e $H$ sono sottogruppi del gruppo $S^1$.

## 1.2. Topologia di $\mathbb{C}$, limiti e funzioni continue.

In questo paragrafo richiamiamo alcune semplici nozioni topologiche per fissare le idee e qualche qualche utile notazione.

### 1.2.1 Topologia di $\mathbb{C}$

Su $\mathbb{C}$ si considera la topologia indotta dalla distanza definita da

$$d(z, w) = |z - w| \tag{1.2.1}$$

che, con l'identificazione di $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ illustrata nel paragrafo precedente, non è altro che la usuale topologia euclidea. In particolare un sottoinsieme $A \subset \mathbb{C}$ è un *aperto* se e solo se per ogni $z_0 \in A$ esiste $\epsilon > 0$ tale che se

$$\mathbb{D}(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z - z_0| < \epsilon\} \tag{1.2.2}$$

è il *disco* di centro $z_0$ e raggio $\epsilon$, allora $\mathbb{D}(z_0, \epsilon) \subset A$.

È immediato verificare dalla definizione che la famiglia degli aperti di $\mathbb{C}$ definiti in questo modo verifica gli assiomi di una topologia (esercizio!):

$(i)$ $\emptyset$ e $\mathbb{C}$ sono aperti,

$(ii)$ l'unione di un numero arbitrario di aperti è un aperto,

$(iii)$ l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto.

Un sottoinsieme $C \subset \mathbb{C}$ si dice *chiuso* se il suo complemento $\mathbb{C} \setminus C$ è aperto. È facile dimostrare che la famiglia degli insiemi chiusi gli usuali assiomi (esercizio!):

$(i)$ $\emptyset$ e $\mathbb{C}$ sono chiusi,

$(ii)$ l'unione di un numero finito di chiusi è un chiuso,

$(iii)$ l'intersezione di un arbitrario di chiusi è un chiuso.

Come d'uso, se $E \subset \mathbb{C}$ chiamiamo *chiusura* di $E$ l'insieme $\overline{E}$ intersezione di tutti i chiusi che contengono $E$. Un sottoinsieme $A \subset E$ si dice *denso* in $E$ se $\overline{A} = E$. Daremo per noto il fatto fondamentale che l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è denso in $\mathbb{R}$ e cui segue facilmente (esercizio!) che $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{C}$.

Per un sottoinsieme $E \subset \mathbb{C}$ chiamiamo *frontiera* di $E$ l'insieme $\partial E = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{C} \setminus E}$. Se $A \subset \mathbb{C}$ è un aperto allora si dimostra (esercizio!) che $\partial E = \overline{E} \setminus E$.

Sia $E \subset \mathbb{C}$ un sottoinsieme arbitrario. Allora la restrizione $d_E$ a $E$ della distanza euclidea di $\mathbb{C}$ è una distanza su $E$. La topologia su $E$ indotta dalla distanza $d_E$ ha per aperti (chiusi) esattamente le intersezioni di $E$ con gli aperti (chiusi)dell'ambiente $\mathbb{C}$. Tutte le volte che abbiamo la necessità di nozioni topologiche su un sottoinsieme $E \subset \mathbb{C}$, utilizzeremo questa struttura di sottospazio definita dalla distanza $d_E$.

### 1.2.2 Successioni e serie di numeri complessi

Se $z_n$ è una successione di numeri complessi, si dice che

$$\lim_{n\to\infty} z_n = l \in \mathbb{C}$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_0 > 0$ tale che se $n \geq n_0$ si ha $|z_n - l| < \epsilon$. In questo caso la successione $x_n$ si dice *convergente*. Inoltre si ha

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste $n_0 > 0$ tale che se $n \geq n_0$ si ha $|z_n| > M$. È facile dimostrare (esercizio!) che un sottoinsieme $C \subset \mathbb{C}$ è chiuso se e solo se contiene i limiti di tutte le successioni $\{z_n\} \subset C$ convergenti.

Un punto $a$ si dice *d'accumulazione* di $A \subset \mathbb{C}$ se per ogni $\epsilon > 0$ nel disco $\mathbb{D}(a, \epsilon)$ cadono punti di $A$ distinti da $a$. Se $a$ è d'accumulazione per $A$ allora si vede facilmente che per ogni $\epsilon > 0$ nel disco $\mathbb{D}(a, \epsilon)$ cadono infiniti punti di $A$ distinti da $a$. Un punto $a \in A$ che non è d'accumulazione per $A$ si dice *punto isolato* di $A$. Si può dimostrare (esercizio!) che un sottoinsieme $C$ è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti d'accumulazione. Inoltre è semplice convincersi (esercizio!) che se $a$ è un punto di d'accumulazione di $A \subset \mathbb{C}$, esiste una successione di punti $\{z_n\} \subset A$ tale che $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Infine queste considerazioni insieme all'osservazione fatta sopra che $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{C}$, implicano (esercizio!) che se $E \subset \mathbb{C}$ è un aperto e $a \in \overline{E}$, allora esiste una successione $\{z_n\} \subset E \cap \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ tale che $\lim_{n\to\infty} z_n = a$.

Molte importanti proprietà di $\mathbb{C}$ dipendono dal fatto che, con la distanza euclidea, è uno spazio metrico completo ossia ogni successione di Cauchy ammette limite in $\mathbb{C}$. In altre parole, come per successioni reali, il *criterio di Cauchy* caratterizza le successioni convergenti. Enunciamo e dimostriamo questo semplice fatto:

Teorema 1.2.1: *Una successione $z_n$ di numeri complessi è convergente se e solo se è una successione di Cauchy, ossia per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N = N_\epsilon$ tale che se $m, n > N$ allora $|z_m - z_n| < \epsilon$.*

*Dimostrazione*: Se $\lim_{n\to\infty} z_n = L \in \mathbb{C}$, sia $\epsilon > 0$ arbitrario. Allora esiste $N = N_\epsilon$ tale che se $k > N$ allora $|z_k - L| < \frac{\epsilon}{2}$. Dunque se $m, n > N$ si ha

$$|z_m - z_n| \leq |z_m - L| + |z_n - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

e quindi $z_n$ è una successione di Cauchy. Viceversa se $z_n$ è una successione di Cauchy e $a_n = Re(z_n)$ e $b_n = Im(z_n)$ allora $a_n$ e $b_n$ sono successioni reali di Cauchy dato che

$$|a_m - a_n| \leq |z_m - z_n|, \qquad |b_m - b_n| \leq |z_m - z_n|.$$

Dunque esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Ma allora $\lim_{n\to\infty} z_n = a + ib$ e quindi la successione $z_n$ è convergente. □

Se $z_n$ è una successione di numeri complessi la *serie* $\sum_{i=0}^{\infty} z_n$ si dice *convergente* se la successione delle some parziali $s_N = \sum_{i=0}^{N} z_n$ converge a $S \in \mathbb{C}$. In questo caso $S$ si dice *somma* della serie e si scrive $S = \sum_{i=0}^{\infty} z_n$. Un'immediata applicazione del criterio di Cauchy prova (esercizio!) che la serie $\sum_{i=0}^{\infty} z_n$ converge se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N_\epsilon$ tale che, se $N > M > N_\epsilon$, allora

$$\left|\sum_{i=M}^{N} z_n\right| < \epsilon.$$

La *serie* $\sum_{i=0}^{\infty} z_n$ si dice *assolutamente convergente* se converge la serie $\sum_{i=0}^{\infty} |z_n|$. Dato che, se $N > M$ si ha

$$\left|\sum_{i=M}^{N} z_n\right| \leq \sum_{i=M}^{N} |z_n|,$$

allora segue dal criterio di Cauchy per le serie che una serie assolutamente convergente è convergente e

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |z_n|.$$

Di nuovo utilizzando il criterio di Cauchy, si dimostra immediatamente (esercizio!) che se esiste una serie convergente $\sum_{i=0}^{\infty} t_n$ di numeri reali non negativi $t_n \geq 0$, tale che $|z_n| \geq t_n$ per ogni $n \geq N_0$ per qualche $N_0$, allora la serie $\sum_{i=0}^{\infty} z_n$ converge assolutamente.

Esattamente come nel caso reale, si dimostra il *Teorema di riordino per serie assolutamente convergenti*:

Teorema 1.2.2: *Se la serie* $\sum_{i=0}^{\infty} z_n$ *è assolutamente convergente, allora per ogni funzione biettiva* $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *la serie* $\sum_{i=0}^{\infty} z_{\tau(n)}$ *è convergente e*

$$\sum_{i=0}^{\infty} z_{\tau(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} z_n.$$

*Dimostrazione*: Sia $S = \sum_{i=0}^{\infty} z_n$ e $s_n$ la succesione delle somme parziali della serie. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N_\epsilon$ tale che se $N \geq N_\epsilon$

$$|S - s_N| = \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{i=N_\epsilon+1}^{\infty} |z_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Per qualche insieme finito $F_\epsilon \subset \mathbb{N}$ si ha $\tau(F_\epsilon) = \{0, 1, \ldots, N_\epsilon\}$. Sia $M_\epsilon = \max F_\epsilon$. Necessariamente $M_\epsilon \geq N_\epsilon$ e per ogni $m \geq M_\epsilon$ si ha

$$\{0, 1, \ldots, N_\epsilon\} = \tau(F_\epsilon) \subset \tau(\{0, 1, \ldots, m\}).$$

Allora

$$\begin{aligned}
\left| S - \sum_{i=0}^{m} z_{\tau(n)} \right| &\leq \left| S - \sum_{n \in F_\epsilon} z_{\tau(n)} \right| + \left| \sum_{n \in \{0,1,\ldots,m\} \setminus F_\epsilon} z_{\tau(n)} \right| \\
&= \left| S - \sum_{k \in \tau(F_\epsilon)} z_k \right| + \left| \sum_{k \in \tau(\{0,1,\ldots,m\}) \setminus \tau(F_\epsilon)} z_k \right| \\
&\leq \left| S - \sum_{k=0}^{N_\epsilon} z_k \right| + \sum_{k \in \tau(\{0,1,\ldots,m\}) \setminus \tau(F_\epsilon)} |z_k| \\
&\leq 2 \sum_{i=N_\epsilon+1}^{\infty} |z_n| < \epsilon
\end{aligned}$$

e quindi la tesi segue. □

### 1.2.3 Limiti e continuità di funzioni complesse

Sia $A \subset \mathbb{C}$ e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione. La funzione $f$ si dice *continua nel punto* $z_0 \in A$ se per ogni aperto $V \subset \mathbb{C}$ con $f(z_0) \in V$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$f\left(\mathbb{D}(z_0, \delta) \cap A\right) \subset V.$$

La funzione $f$ si dice *continua* su $A$ se è continua in ogni punto di $A$. Si osservi che se $z_0$ è un punto isolato di $A$ allora ogni funzione è continua in $z_0$. Segue immediatamente che $f$ è continua su $A$ se e solo se per ogni aperto $V \subset \mathbb{C}$ l'insieme $f^{-1}(V)$ è l'intersezione di $A$ con un aperto di $\mathbb{C}$.

Sia $a \in A$ un punto d'accumulazione di $A$. Allora

$$\lim_{z \to a} f(z) = L \in \mathbb{C}$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $z \in (\mathbb{D}(a, \delta) \cap A) \setminus \{a\}$ allora $f(z) \in \mathbb{D}(L, \epsilon)$. Dunque che una funzione $f: A \to \mathbb{C}$ è continua su $A$ se e solo se per ogni punto di accumulazione $a \in A$ si ha

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a).$$

Diciamo invece che

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $z \in (\mathbb{D}(a, \delta) \cap A) \setminus \{a\}$ allora $|f(z)| > M$. Inoltre, se $A$ è un sottoinsieme illimitato, diremo che

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = L \in \mathbb{C}$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N$ tale che se $z \in A$ e $|z| > N$, allora $f(z) \in \mathbb{D}(L, \epsilon)$. Infine, se $A$ è un sottoinsieme illimitato, diremo che

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$$

se per ogni $M$ esiste $N$ tale che se $z \in A$ e $|z| > N$, allora $|f(z)| > M$.

Sia $f: A \to \mathbb{C}$ una funzione. Sono unicamente determinate due funzioni $u: A \to \mathbb{R}$ e $v: A \to \mathbb{R}$, dette rispettivamente *parte reale* e parte immaginaria della funzione $f$ tali che $f(z) = u(z) + iv(z)$ per ogni $z \in A$. La funzione $f$ è continua se e solo se le funzioni $u$ e $v$ sono continue.

**Esempi** Le funzioni costanti sono continue. La funzione identica $f(z) = z$ è continua. La funzione coniugio $f(z) = \overline{z}$ è continua. Le funzioni $f(z) = Re(z)$ e $g(z) = Im(z)$ sono continue. La funzione $f(z) = |z|$ è continua.

A partire da funzioni continue, se ne possono costruire altre utilizzando la seguente immediata

Proposizione 1.2.3: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ e $f, g: A \to \mathbb{C}$ due funzioni continue. Allora le funzioni $f + g$, $-f$ e $fg$ sono continue. Se $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in A$, allora la funzione $1/f$ è continua.*

### 1.2.4 Compattezza.

La nozione di compattezza è importante in molte occasioni. Sensa entrare nei dettagli, ricordiamo che in $\mathbb{C}$ questa nozione si esprime in diversi modi equivalenti che riassumiamo nel seguente:

Teorema 1.2.4: *Un sottoinsieme $K \subset \mathbb{C}$ si dice compatto se verifica una delle seguenti equivalenti proprietà:*

*(i) per ogni famiglia $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ di aperti di $\mathbb{C}$ tale che $K \subset \cup_{j \in J} A_j$, esiste una sottofamiglia finita $\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_n}\} \subset \mathcal{A}$ tale che $K \subset \cup_{k=1}^{n} A_{j_k}$;*

*(ii) ogni successione $x_n$ di punti di $K$ ha una sottosuccessione $x_{n_k}$ convergente a un punto di $K$;*

*(iii) $K$ è chiuso e limitato (ossia $K \subset \mathbb{D}(0, R)$ per qualche $R > 0$).*

Una proprietà molto importante anche se semplice da dimostrare, è il fatto che le funzioni continue trasformano compatti in compatti. Dato che i compatti di $\mathbb{R}$ sono proprio i sottoinsiemi chiusi e limitati – che dunque contengono il loro punti di massimo e di minimo – si ottiene di conseguenza il ben noto teorema di Weiestrass sull'esistenza di massimi e minimi per funzioni reali definite su un compatto. Riassumiamo tutto ciò nel seguente:

Teorema 1.2.5: *Se $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua e $K \subset A$, è compatto allora $f(K)$ è compatto. Se $f(K) \subset \mathbb{R}$ allora esistono punti di massimo e di minimo per $f$ in $K$ ossia $z_0, z_1 \in K$ tali che*

$$\min_{z \in K} f(z) = f(z_0) \qquad\qquad \max_{z \in K} f(z) = f(z_1).$$

### 1.2.5 Connessione e connessione per archi.

In molte questioni che studieremo giocherà un ruolo importante il fatto che gli insiemi su cui lavoreremo sono connessi. Ricordiamo che uno spazio topologico $X$ si dice *connesso* se non è unione di due sottoinsiemi aperti non vuoti. Si osserva immediatamente che questo equivale a richiedere che gli unici sottoinsiemi di $X$ simultaneamente aperti e chiusi, sono $\emptyset$ e $X$ stesso. Questa formulazione sarà spesso quella che useremo.

Una funzione $f\colon X \to \mathbb{C}$ si dice *localmente costante* se per ogni punto $x$ dello spazio topologico $X$ esiste un intorno $U$ tale che la restrizione $f_{|U}$ è costante. È un esercizio immediato verificare che le funzioni localmente costanti sono continue. In molte applicazioni risulta cruciale il fatto che le funzioni localmente costanti su un connesso sono costanti. Vale in realtà la seguente caratterizzazione:

Proposizione 1.2.6: *Uno spazio topologico è connesso se e solo se ogni funzione $f\colon X \to \mathbb{C}$ localmente costante è costante.*

*Dimostrazione*: Supponiamo che ogni funzione $f\colon X \to \mathbb{C}$ localmente costante è costante e sia $A \subset X$ non vuoto, aperto e chiuso. Sia $\chi_A$ la funzione caratteristica di $A$ definita da

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Allora $\chi_A$ è localmente costante dato che $A$ e $X \setminus A$ sono aperti. Dunque $\chi_A$ è costante. Dato che $A \neq \emptyset$ allora deve essere $\chi_A \equiv 1$. Dunque $A = X$ e quindi $X$ è connesso.

Se $X$ è connesso e $f\colon X \to \mathbb{C}$ è localmente costante, allora scelto arbitrariamente $x_0 \in X$, sia $A = f^{-1}(f(x_0))$. Ovviamente $x_0 \in A$ e quindi $A \neq \emptyset$. Dato che $f$ è localmente costante, $A$ è un aperto (perché? esercizio!). D'altro canto $A$ è un chiuso visto che è la l'immagine inversa del chiuso $\{x_0\}$ mediante la funzione continua $f$. Dunque deve essere $A = X$ ossia $f(x) = f(x_0)$ per ogni $x \in X$ e $f$ è costante. $\square$

Come conseguenza immediata della definizione segue che le funzioni continue trasformano connessi in connessi ossia se $X$ è uno spazio connesso e $f\colon X \to Y$ è continua, allora $f(X)$ è connesso (esercizio!).

Daremo per conosciuto un risultato più recondito ma cruciale: *i sottoinsiemi connessi (non vuoti) di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli intervalli (con o senza gli estremi, limitati e illimitati).*

Molto spesso utilizzeremo la seguente nozione. Uno spazio topologico $X$ si dice *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste un *cammino* che li congiunge ossia una funzione continua $\alpha\colon [a,b] \to X$ tale che $\alpha(a) = x$ e $\alpha(b) = y$. Si vede subito che se $X$ è connesso per archi, $f\colon X \to Y$ è continua, allora $f(X)$ è connesso per archi(esercizio!). È anche semplice verificare che la connessione per archi è una proprietà "più forte" della connessione:

Proposizione 1.2.7: *Uno spazio topologico connesso per archi è connesso.*

*Dimostrazione*: Sia $X$ uno spazio connesso per archi e sia $\emptyset \neq A \subset X$ un sottoinsieme aperto e chiuso. Sia $x \in A$ e sia $y \in X$ arbitrario. Sia $\alpha\colon [a,b] \to X$ un cammino tale che $\alpha(a) = x$ e $\alpha(b) = y$. Allora $\alpha^{-1}(A)$ è un sottoinsieme aperto, chiuso e non vuoto dell'intervallo $[a,b]$. Necessariamente allora $\alpha^{-1}(A) = [a,b]$. Ma allora $y = \alpha(b) \in A$ e quindi, per l'arbitrarietà di $y$, $A = X$ e quidi $X$ è connesso. $\square$

In realtà le due nozioni di connessione coincidono per aperti di $\mathbb{C}$:

Teorema 1.2.8: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto non vuoto. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

*$(i)$ $A$ è connesso;*

*$(ii)$ $A$ è connesso per archi.*

*Dimostrazione*: Abbiamo già osservato che $(ii)$ implica $(i)$. Supponiamo dunque che $A$ sia connesso. Se $a \in A$ è un punto arbitrario, sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ definita da $f(z) = 1$ se esiste un cammino che congiunge $a$ a $z$, $f(z) = 0$ altrimenti. Ovviamente $f(a) = 1$. Sia $\mathbb{D}$ un qualunque disco contenuto in $A$. Dato che $\mathbb{D}$ è convesso per ogni coppia di punti di $\mathbb{D}$ il segmento che li congiunge è tutto contenuto in $\mathbb{D}$. Dunque esiste un cammino che congiunge $a$ con almeno un punto di $\mathbb{D}$ se e solo se si pò congiungere con un cammino $a$ con tutti i punti di $\mathbb{D}$. Dunque $f_{|\mathbb{D}} \equiv 1$ oppure $f_{|\mathbb{D}} \equiv 0$. Quindi per l'arbitrarità di $\mathbb{D} \subset A$, $f$ è localmente costante. Dato che $A$ è connesso e $f(a) = 1$ si ha $f \equiv 1$ e la tesi segue. $\square$

Si osservi che la dimostrazione usa solo il fatto che ogni punto di un aperto ha un intorno connesso per archi. Lo stesso argomento dunque prova che un connesso localmente connesso per archi è connesso per archi.

Concludiamo con una nomenclatura che si usa spesso. Per definizione un *dominio* $D \subset \mathbb{C}$ è un aperto connesso non vuoto di $\mathbb{C}$.

**Esercizi.**

**1.** Dimostrare tutte le affermazioni che non trovate qui di seguito ma che sono lasciate per esercizio nel paragrafo.

**2.** Dimostrare che se ogni punto di $E \subset \mathbb{C}$ è un punto d'accumulazione per $A \subset E$ allora ogni punto di $E$ è limite di una successione di punti di $A$ e $A$ è denso in $E$.

**3.** Dimostrare che per aperto $E \subset \mathbb{C}$ si ha $z \in \overline{E}$ se e solo se esiste una successione di punti di $E \subset \mathbb{C}$ che converge a $z$.

**4.** Dimostrare che ogni successione limitata di numeri complessi ammette una sottosuccessione convergente.

**5.** Dimostrare che se $a$ è punto di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{C}$, esiste una successione di punti di $A$ che converge a $a$.

**6.** Dimostrare che se $E \subset \mathbb{C}$ è un aperto e $a \in \overline{E}$, allora esiste una successione $\{z_n\} \subset E \cap \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ tale che $\lim_{n\to\infty} z_n = a$.

**7.** Dimostrare che $\mathcal{D} = \{m2^{-n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ è denso in $\mathbb{R}$ e che $\mathcal{D} + i\mathcal{D}$ è denso in $\mathbb{C}$.

**8.** Dimostrare che una funzione a valori complessi è continua se e solo se la sua parte reale e la sua parte immaginaria sono continue.

**9.** Dimostrare che i polinomi con coefficienti complessi della variabile $z$ o della variabile $\overline{z}$ sono funzioni continue su $\mathbb{C}$.

**10.** Stabilire per quali numeri reali $a, b, c$ il polinomio $ax^2 + 2bxy + cy^2$ (di due variabili reali) è

(a) la parte reale (b) la parte immaginaria

di un polinomio della variabile $z = x + iy$.

**11.** Se $p(z), q(z)$ sono polinomi in $z$, la funzione razionale $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ è continua su $\{z \in \mathbb{C} | q(z) \neq 0\}$.

**12.** Dimostrare che la funzione argomento $\arg\colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to (-\pi, \pi)$ definita da (1.1.13) è continua.

**13.** Stabilire per quali $z \neq 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \in \mathbb{C}$.

**14.** Dimostrare che $\mathbb{C}$ è un campo topologico ossia che se su $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ si considera la topologia prodotto, le funzioni

$$s: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ definita da } s(z,w) = z + w,$$

$$p: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ definita da } p(z,w) = zw,$$
$$opp: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ definita da } opp(z) = -z,$$
$$inv: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ definita da } inv(z) = z^{-1}$$

sono continue.

**15.** Dimostrare in almeno due modi che se $f: A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua e $K \subset A$, è compatto, allora $f(K)$ è compatto.

**16.** Dimostrare che una funzione $f: A \to B \subset \mathbb{C}$ continua e suriettiva, e $E$ è denso in $A$, allora $f(E)$ è denso in $B$.

**17.** (Densità delle radici dell'unità in $S^1$) Si dimostri che i sottogruppi $G$ e $H$ definiti nell'esercizio 9 del paragrafo 1.1 sono densi in $S^1$ *(Consiglio: Si osservi che dato che $H \subset G$ basta dimostrare la densità di $H$. Si sfruttino anche gli esercizi* 7 *e* 16 *e il fatto che che la funzione $f(t) = e^{2\pi i t}$* è *continua e suriettiva da $\mathbb{R}$ in $S^1$).*

**18.** Utilizzando la stessa idea della dimostrazione del Teorema 1.2.8 dimostrare che s $A \subset \mathbb{C}$ è un aperto connesso non vuoto allora per ogni coppia di punti $x, y \in A$ esiste un cammino poligonale (ossia unione di segmenti consecutivi) che congiunge $x$ e $y$.

## 1.3. La sfera di Riemann.

In molte considerazioni che faremo ci sarà utile dare un senso più preciso alla nozione di punto all'infinito per $\mathbb{C}$ che abbiamo dato in modo molto elementare parlando di limiti di funzioni complesse. Per avere avere una nozione corretta e geometricamente efficace dell'idea di "aggiungere" $\infty$ a $\mathbb{C}$ si usa l'idea topologica di compattificare $\mathbb{C}$ con l'aggiunta di un punto. Più precisamente consideriamo l'insieme $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ottenuto aggiungendo all'insieme dei numeri complessi un punto. Vogliamo definire una topologia su $\hat{\mathbb{C}}$ in modo che la topologia indotta su $\mathbb{C}$ sia quella euclidea e che $\mathbb{C}$ sia denso in $\hat{\mathbb{C}}$. Come è usuale, diremo che un insieme $\mathcal{V}_p$ è un *intorno* di $p \in \mathbb{C}$ se esiste $r > 0$ tale che $\mathbb{D}(p, r) \subset \mathcal{V}_p$. Diremo che un insieme $\mathcal{V}_\infty$ è un *intorno* di $\infty$ se esiste un compatto $K \subset \mathbb{C}$ tale che $\hat{\mathbb{C}} \setminus K \subset \mathcal{V}_\infty$. Sia $\mathcal{T}$ la famiglia di sottoinsiemi $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ tali che per ogni $p \in U$ ci sia un intorno di $p$ tutto contenuto in $U$

PROPOSIZIONE 1.3.1: *La famiglia $\mathcal{T}$ è una topologia per $\hat{\mathbb{C}}$ che induce su $\mathbb{C}$ l'usuale topologia euclidea e tale che $\mathbb{C}$ è denso in $\hat{\mathbb{C}}$. Inoltre gli aperti che contengono $\{\infty\}$ sono esattamente i sottoinsiemi di $\hat{\mathbb{C}}$ i cui complementi sono sottoinsiemi compatti di $\mathbb{C}$.*

*Dimostrazione*: Evidentemente l'insieme vuoto e $\hat{\mathbb{C}}$ sono in $\mathcal{T}$. Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ una famiglia arbitraria di elementi di $\mathcal{T}$ e sia $U = \cup_i U_i$. Allora se $p \in U$ allora $p \in U_i$ per qualche $i$ e quindi esiste un intorno $\mathcal{V}_p$ di $p$ con $\mathcal{V}_p \subset U_i \subset U$ e quindi $U \in \mathcal{T}$. Siano inoltre $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$ e $V = V_1 \cap V_2$. Se $p \in V \cap \mathbb{C}$, allora esistono intorni (euclidei!) di $p$ contenuti rispettivamente in $V_1$ e $V_2$. Dunque esistono $r_1, r_2 > 0$ tali che $\mathbb{D}(p, r_1) \subset V_1$ e $\mathbb{D}(p, r_2) \subset V_2$. Se $r = \min\{r_1, r_2\}$, allora $\mathbb{D}(p, r) \subset V$ e quindi $V$ contiene un intorno di $p$. Se $\infty \in V$, esistono intorni $\mathcal{V}^1_\infty$ e $\mathcal{V}^2_\infty$ di $\infty$ e compatti $K_1, K_2 \subset \mathbb{C}$ tali che per $j = 1, 2$ si ha

$$\mathcal{V}^j_\infty \subset V_j \qquad \text{e} \qquad \hat{\mathbb{C}} \setminus K^j \subset \mathcal{V}^j_\infty.$$

Sia $\mathcal{V}_\infty = \mathcal{V}^1_\infty \cap \mathcal{V}^2_\infty$ e $K = K^1 \cup K^2$. Allora $\mathcal{V}_\infty$ è un intorno di infinito dato che $K$ è compatto e $\hat{\mathbb{C}} \setminus K \subset \mathcal{V}_\infty$. Inoltre $\mathcal{V}_\infty \subset V = V_1 \cap V_2$. Dunque $V \in \mathcal{T}$ e $\mathcal{T}$ è una topologia. Sia $V$ un aperto di $\hat{\mathbb{C}}$ con $\infty \in V$. Esiste allora un compatto $K$ in $\mathbb{C}$ e un intorno di $\infty$ con $\mathcal{V}_\infty \subset V$ e $\hat{\mathbb{C}} \setminus K \subset \mathcal{V}_\infty \subset V$. Dunque $\hat{\mathbb{C}} \setminus V$ è un chiuso di $\mathbb{C}$ tale che $\hat{\mathbb{C}} \setminus V \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{V}_\infty \subset K$. Quindi $\hat{\mathbb{C}} \setminus V$ è anche limitato e, pertanto, compatto. Per costruzione $\mathcal{T}$ induce su $\mathbb{C}$ l'usuale topologia euclidea ed è immediato verificare che la successione $z_n = n$ converge in questa topologia a $\infty$ e quindi $\mathbb{C}$ è denso in $\hat{\mathbb{C}}$. □

Lo spazio topologico $\hat{\mathbb{C}}$ che ha per aperti gli elementi di $\mathcal{T}$, viene chiamato *sfera di Riemann*. In Topologia Generale $\hat{\mathbb{C}}$ viene chiamato la *compattificazione di Alexandroff* di $\mathbb{C}$. Invece di riferirci alla teoria generale, riassumiamo qui di seguito le proprietà topologiche di $\hat{\mathbb{C}}$ che ci interessano.

PROPOSIZIONE 1.3.2: *La sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ è uno spazio topologico compatto e connesso omeomorfo alla sfera bidimensionale $S^2$.*

*Dimostrazione*: Tutto l'enunciato sarà dimostrato se proveremo che $\hat{\mathbb{C}}$ è omeomorfo alla sfera bidimensionale unitaria

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Sia $N = (0,0,1)$ il "polo nord" di $S^2$. La proiezione stereografica $\Pi\colon S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ dal punto $N$, è definita da

$$\Pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}. \tag{1.3.1}$$

Se si identifica $\mathbb{C}$ con il piano $x_3 = 0$ mediante $x_1 + ix_2 \leftrightarrow (x_1, x_2, 0)$, allora $\Pi$ è l'applicazione che fa corrispondere a ciascun punto $P \in S^2 \setminus \{N\}$ l'intersezione con il piano $\{x_3 = 0\} \equiv \mathbb{C}$ della retta passante per i punti $N$ e $P$. Dalla definizione segue che $\Pi$ è continua dato che le sue componenti sono restrizioni di funzioni continue in un intorno aperto di $S^2 \setminus \{N\}$. Inoltre $\Pi$ è biettiva con inversa continua data

$$\Psi(z) = \frac{(2Re(z), 2Im(z), |z|^2 - 1)}{|z|^2 + 1}. \tag{1.3.2}$$

Dunque $\Pi\colon S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ è un omeomorfismo. Estendiamo $\Pi$ e $\Psi$ a applicazioni $\hat{\Pi}\colon S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ e $\hat{\Psi}\colon \hat{\mathbb{C}} \to S^2$ rispettivamente in questo modo:

$$\hat{\Pi}_{|S^2\setminus\{N\}} = \Pi; \;\; \hat{\Pi}(N) = \infty; \qquad \hat{\Psi}_{|\mathbb{C}} = \Psi; \;\; \hat{\Psi}(\infty) = N.$$

Allora $\hat{\Pi}$ è biettiva con inversa $\hat{\Psi}$. Inoltre $\hat{\Pi}$ e $\hat{\Psi}$ sono continue e quindi $\hat{\Pi}$ è un omeomorfismo fra $S^2$ e $\hat{\mathbb{C}}$. Per quanto riguarda $\hat{\Pi}$ occorre controllare solo la continuità in $N$. Sia $U$ un aperto di $\hat{\mathbb{C}}$ con $\hat{\Pi}(N) = \infty \in U$. Esiste $R > 0$ tale che $V_R = \{z \in \mathbb{C} |\; |z| > R\} \subset U$. Un calcolo immediato dimostra che

$$C = \hat{\Pi}^{-1}(V_R) = S^2 \cap \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 > \frac{R^2 - 1}{R^2 + 1} \right\}$$

che è un aperto di $S^2$ contenente $N$. Allora $\hat{\Pi}(C) \subset V_R \subset U$ e quindi $\hat{\Pi}$ è continua in $N$. D'altra parte ogni aperto $V$ di $S^2$ che contiene $N = \hat{\Psi}(\infty)$ contiene per qualche $0 < t < 1$ la calotta

$$C_t = S^2 \cap \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 > t \right\}.$$

Dato che

$$U = \hat{\Psi}^{-1}(C_t) = \left\{ z \in \mathbb{C} |\; |z| > \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \right\} \cup \{\infty\}$$

è un aperto di $\hat{\mathbb{C}}$ contenente $\infty$ e $\hat{\Psi}(U) = C_t \subset V$, segue che $\Psi$ è continua in $\infty$. $\square$

Un utile esercizio per capire la topologia di $\hat{\mathbb{C}}$ è dimostrare il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 1.3.3: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto, $a \in A$ e $f\colon A \setminus \{a\} \to \mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$ una funzione. Allora* $\lim\limits_{z \to a} |f(z)| = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$

*Dimostrazione*: Esercizio!! $\square$

Vi è un altro modo per descrivere la sfera di Riemann che è molto importante tener presente. In effetti la sfera di Riemann non è altro che una presentazione della retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1$ di cui ora ricordiamo rapidamente la definizione. Si consideri su

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 \neq 0\},$$

che si considera con la topologia di sottospazio di $\mathbb{C}^2$, la relazione di equivalenza $\sim$ definita da

$$(z,w) \sim (u,v) \Leftrightarrow (z,w) = \lambda(u,v) \text{ for some } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

La retta proiettiva è lo spazio quoziente $\mathbb{P}^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\})_{/\sim}$ considerato con la topologia quoziente. Dunque $\mathbb{P}^1$ non è altro che l'insieme delle rette per l'origine di $\mathbb{C}^2$. Se $\pi\colon \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{P}^1$ è l'applicazione di passaggio al quoziente, la topologia di $\mathbb{P}^1$ è esattamente la topologia più grande tale che rende $\pi$ continua e si ha che per ogni spazio topologico $Y$ un'applicazione $f\colon \mathbb{P}^1 \to Y$ è continua se e solo se $f \circ \pi\colon \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \to Y$ è continua. Per denotare il punto $\pi((z,w))$ di $\mathbb{P}^1$, individuata da $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ si usa la notazione in coordinate omogenee: $\pi((z,w)) = [z:w]$. Si vede allora subito (Esercizio!) che l'applicazione $\phi\colon \mathbb{P}^1 \to \hat{\mathbb{C}}$ definita da

$$\phi([z:w]) = \begin{cases} \frac{z}{w} \text{ se } w \neq 0 \\ \\ \infty \text{ se } w = 0 \end{cases} \tag{1.3.3}$$

è continua, biettiva con inversa continua $\psi\colon \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1$ definita da

$$\psi(\zeta) = [\zeta : 1] \ \text{ se } \zeta \neq \infty \qquad \text{e} \qquad \psi(\infty) = [1:0], \tag{1.3.4}$$

e quindi $\mathbb{P}^1$ e $\hat{\mathbb{C}}$ sono omeomorfi.

**Esercizi.**

**1.** Dimostrare la Proposizione 1.3.3.

**2.** Sia $\Psi$ l'applicazione definita da (1.3.2)e $\| \ \|$ la norma euclidea di $\mathbb{R}^3$. Se $d\colon \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}_+$ è definita per $z, w \in \mathbb{C}$ da

$$d(z,\infty) = d(\infty, z) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}} = \|\Psi(z) - \Psi(\infty)\|,$$

$$d(z,w) = d(w,z) = \frac{2|z-w|}{[(1+|z|^2)(1+|w|^2)]^{\frac{1}{2}}} = \|\Psi(z) - \Psi(w)\|,$$

dimostrare che $d$ è una distanza su $\hat{\mathbb{C}}$ che induce la topologia che abbiamo definito sulla sfera di Riemann.

**3.** Siano $\Pi$ e $\Psi$ le applicazioni definite rispettivamente da (1.3.1) e da (1.3.2). Dimostrare che se definiamo $f(z) = -1/\overline{z}$ e $g(z) = 1/z$ per $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, allora $\Psi \circ f \circ \Pi(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, -x_3)$ e $\Psi \circ g \circ \Pi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, -x_3)$

**4.** Dimostrare che l'applicazione definita da (1.3.3) è continua, biettiva con inversa continua $\psi$ definita da (1.3.4).

## 1.4. Trasformazioni di Möbius e circonferenze.

Siano $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tali che $ad - bc \neq 0$. L'applicazione definita per $z \neq -d/c$ da

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{1.4.1}$$

si dice *trasformazione di Möbius* o *trasformazione lineare fratta*. Una traformazione di Möbius definita da (1.4.1) si estende a una applicazione contina (dimostrazione per esercizio!) della sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ in sé ponendo

$$T(-d/c) = \infty \text{ e } T(\infty) = a/c \text{ se } c \neq 0$$

e $T(\infty) = \infty$ se $c = 0$. Denoteremo con $\mathcal{M}$ l'insieme di tutte le trasformazioni di Möbius. È facile provare che se $T \in \mathcal{M}$ è definita da (1.4.1), allora $T$, come applicazione dalla sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ in sé, è invertibile con inversa definita da

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

Dunque, dato che l'inversa di una trasformazione di Möbius è ancora una trasformazione di Möbius abbiamo immediatamente la seguente

Proposizione 1.4.1: *L'insieme $\mathcal{M}$ delle trasformazioni di 1.4.1, considerato con l'operazione definita dalla composizione, è un gruppo di omeomorfismi della sfera di Riemann.*

*Dimostrazione*: Esercizio! □

Si consideri l'applicazione $\Phi: GL(2, \mathbb{C}) \to \mathcal{M}$ definita da

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = T$$

dove $T$ è definita da (1.4.1). Si vede subito che $\Phi$ è un omomorfismo suriettivo e che

$$Ker\Phi = \mathcal{S} = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) | A = \lambda I_2, \ \ \lambda \in \mathbb{C}^*\}$$

dove $I_2$ è la matrice identità di ordine 2. Si può dunque concludere il seguente risultato la cui dimostrazione precisa è lasciata al lettore:

Proposizione 1.4.2: *Il gruppo $\mathcal{M}$ delle trasformazioni di Möbius è isomorfo al gruppo $PGL(2, \mathbb{C}) = GL(2, \mathbb{C})/\mathcal{S}$.*

La proposizione non sorprende affatto se si considera la sfera si Riemann come una realizzazione della retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1$. Si vede subito che se $\phi: \mathbb{P}^1 \to \hat{\mathbb{C}}$ e $\psi: \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1$ sono le applicazioni definite rispettivamente da (1.3.3) e (1.3.4), allora data $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$, se $T \in \mathcal{M}$ è la trasformazione di Möbius definita da $A$, allora l'applicazione $\psi \circ T \circ \phi$ è la proiettività definita dalla matrice $A$.

Definizione 1.4.1: Una trasformazione $T \in \mathcal{M}$ si dice *traslazione* se è definita per $z \in \mathbb{C}$ da $T(z) = z + b$ per qualche $b \in \mathbb{C}$. Una trasformazione $T \in \mathcal{M}$ si dice *dilatazione* se è definita per $z \in \mathbb{C}$ da $T(z) = az$ per qualche $a \in \mathbb{C}^*$. Infine la trasformazione $T \in \mathcal{M}$ definita per $z \in \mathbb{C}$ da $T(z) = \frac{1}{z}$ si dice *inversione*.

Proposizione 1.4.3: *Il gruppo delle trasformazioni di Möbius è generato da traslazioni, dilatazioni e dall'inversione.*

*Dimostrazione*: Sia $T \in \mathcal{M}$ definita per $z \in \mathbb{C}$ da

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Se $c = 0$ allora

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

e quindi $T$ è la composizione di una dilatazione e di una traslazione. Supponiamo che $c \neq 0$. Dato che

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2z+cd} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{z+\frac{d}{c}},$$

se $T_1, T_2, T_3, T_4 \in \mathcal{M}$ sono definite per $z \in \mathbb{C}$ rispettivamente da

$$T_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad T_2(z) = \frac{1}{z}, \quad T_3(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z, \quad T_4(z) = z + \frac{a}{c},$$

si ha allora $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ e la tesi segue. □

Prima di illustrare una fondamentale proprietà geometrica delle trasformazioni di Möbius, dobbiamo dare una descrizione unitaria per rette e circonferenze di $\mathbb{C}$.

Proposizione 1.4.4: *Un sottoinsieme $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ è una retta o una circonferenza se e solo se i punti $z \in \mathcal{C}$ verificano una equazione del tipo*

$$\alpha|z|^2 + cz + \overline{cz} + \delta = 0 \tag{1.4.2}$$

*dove $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{C}$ sono tali che $|c|^2 > \alpha\delta$. Se in (1.4.2) $\alpha = 0$ allora $\mathcal{C}$ è una retta, se $\alpha \neq 0$ allora $\mathcal{C}$ è una circonferenza di centro $-\frac{\overline{c}}{\alpha}$ e raggio $\sqrt{\frac{|c|^2-\alpha\delta}{\alpha^2}}$.*

*Dimostrazione*: Un sottoinsieme $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ è una retta se e solo se i suoi punti $z = x+iy$ verificano una equazione del tipo

$$ax + by + \delta = 0 \tag{1.4.3}$$

con $a, b, \delta \in \mathbb{R}$ e $(a,b) \neq (0,0)$. Dunque se $c = \frac{1}{2}(a - ib)$, allora (1.4.3) equivale all'equazione

$$cz + \overline{cz} + \delta = 0$$

e quindi l'asserto è dimostrato nel caso $\mathcal{C}$ sia una retta visto che in questo caso $\alpha = 0$ e $|c|^2 > 0 = \alpha\delta$. Sia invece $\mathcal{C}$ una circonferenza di centro $\gamma \in \mathbb{C}$ e raggio $r > 0$. Allora $z \in \mathcal{C}$ se e solo se soddisfa l'equazione

$$\alpha\left(|z-\gamma|^2 - r^2\right) = 0 \tag{1.4.4}$$

dove $\alpha$ è un numero reale non nullo. Dunque $z \in \mathcal{C}$ se e solo se verifica

$$\alpha|z|^2 - \alpha\overline{\gamma}z - \alpha\gamma\overline{z} + \alpha(|\gamma|^2 - r^2) = 0. \tag{1.4.5}$$

Posto $\delta = \alpha(|\gamma|^2 - r^2)$ e $c = -\alpha\overline{\gamma}$, si vede che (1.4.5) equivale a (1.4.2) nel caso $\alpha \neq 0$. Il resto della tesi segue da facili verifiche dirette. $\square$

La Proposizione (1.4.4) illustra in modo "quantitativo" come si possa intendere le rette come deformazione di circonferenze e precisamente come limite di circonferenze di raggio tendente a infinito. Infatti facendo tendere $\alpha \neq 0$ a 0 nell'equazione (1.4.2), il raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ definita da (1.4.2) tende a $\infty$ e l'equazione di $\mathcal{C}$ degenera nell'equazione di una retta. Questo tipo di ragionamento si rilegge efficacemente in $\hat{\mathbb{C}}$ dato che in questo caso le rette vengono compattificate con l'aggiunta del punto all'infinito e la loro compattificazione è omeomorfa a una circonferenza. Per questo motivo nel resto di questo paragrafo ci riferiremo a rette e circonferenze con la dizione *circonferenze estese*.

Riassumiamo alcune delle proprietà delle trasformazioni di Möbius riguardanti le circonferenze nel seguente

TEOREMA 1.4.5: *Sia $T \in \mathcal{M}$. Allora $T$ trasforma circonferenze estese in circonferenze estese. Inoltre siano $\Omega_1, \Omega_2 \subset \hat{\mathbb{C}}$ aperti tali che $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ sono circonferenze estese. Allora esiste $T \in \mathcal{M}$ tale che $T(\partial\Omega_1) = \partial\Omega_2$ e $T(\Omega_1) = \Omega_2$.*

*Dimostrazione*: È semplice verificare che se $T \in \mathcal{M}$ è una traslazione, una dilatazione o l'inversione, i punti che appartengono all'immagine secondo $T$ di una circonferenza estesa definita da un'equazione (1.4.2) soddisfano un'equazione dello stesso tipo e quindi $T$ trasforma circonferenze estese in circonferenze estese. Se $T \in \mathcal{M}$ è arbitraria, si giunge alla stessa conclusione grazie alla Proposizione 1.4.3.

Siano $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ punti distinti. Si definisca $T_{z_1z_2z_3} \in \mathcal{M}$ ponendo per $z \in \mathbb{C}$:

$$T_{z_1z_2z_3}(z) = \begin{cases} \frac{z-z_2}{z-z_3} : \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3} & \text{se } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, \\ \frac{z-z_2}{z-z_3} & \text{se } z_1 = \infty, \\ \frac{z_1-z_3}{z-z_3} & \text{se } z_2 = \infty, \\ \frac{z-z_2}{z_1-z_2} & \text{se } z_3 = \infty. \end{cases}$$

Allora $T_{z_1z_2z_3}(z_1) = 1$, $T_{z_1z_2z_3}(z_2) = 0$, $T_{z_1z_2z_3}(z_3) = \infty$. Siano $z_1, z_2, z_3 \in \partial\Omega_1$ e $w_1, w_2, w_3 \in \partial\Omega_2$ terne di punti distinti. Allora, se si pone $T_1 = T_{z_1z_2z_3}$, $T_2 = T_{w_1w_2w_3}$, dato che $T_1$ e $T_2$ trasformano circonferenze estese in circonferenze estese e che per tre punti distinti passa una unica circonferenza estesa, allora per $k = 1, 2$ si ha $T_k(\partial\Omega_k) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Siano $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} | Imz > 0\}$ e $\mathbb{H}^- = \{z \in \mathbb{C} | Imz < 0\}$. Allora $\hat{\mathbb{C}}$ si decompone nelle unioni disgiunte $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{H}^+ \cup \mathbb{H}^- \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e, per $k = 1, 2$, in $\hat{\mathbb{C}} = \Omega_k \cup (\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}_k) \cup \partial\Omega_k$. Dato che $T_1, T_2$ sono omeomorfismi di $\hat{\mathbb{C}}$ è quindi verificata una delle seguenti coppie di uguaglianze:

$$T_1(\Omega_1) = \mathbb{H}^+ \text{ e } T_2(\Omega_2) = \mathbb{H}^+ \tag{1.4.6}$$

$$T_1(\Omega_1) = \mathbb{H}^- \text{ e } T_2(\Omega_2) = \mathbb{H}^- \tag{1.4.7}$$

$$T_1(\Omega_1) = \mathbb{H}^+ \text{ e } T_2(\Omega_2) = \mathbb{H}^- \tag{1.4.8}$$

$$T_1(\Omega_1) = \mathbb{H}^- \text{ e } T_2(\Omega_2) = \mathbb{H}^+ \tag{1.4.9}$$

Se vale la (1.4.6) oppure la (1.4.7), si ponga $T = T_2^{-1} \circ T_1$; se vale la (1.4.8) oppure la (1.4.9), si ponga $T = T_2^{-1} \circ (-T_1)$. In ogni caso $T \in \mathcal{M}$ è la trasformazione cercata. $\square$

**Esercizi.**

**1.** Dimostrare che ogni trasformazione di Möbius è un omeomorfismo e la Proposizione 1.4.1.

**2.** Dimostrare la Proposizione 1.4.2.

**3.** Sia $C$ la circonferenza nello spazio ottenuta intersecando il piano di equazione $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = b$ con la sfera unitaria $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1\}$. Utilizzando la (1.3.2), dimostrare che l'immagine mediante la proiezione stereografica di $C$ è la circonferenza estesa di equazione $\alpha|z|^2 + cz + \overline{cz} + \delta = 0$ dove $\alpha = a_3 - b$, $c = a_1 - ia_2$ e $\delta = -(a_3 + b)$. Concludere in particolare che le rette di $\mathbb{C}$ sono esattamente le immagini delle circonferenze di $S^2$ che passano per il punto $N = (0, 0, 1)$.

**4.** Trovare $T \in \mathcal{M}$ che trasforma il disco $\Delta = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ nel semipiano superiore $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} | Imz > 0\}$.

**5.** Sia $F(z) = \frac{z-i}{z+i}$ e $U = \{z \in \mathbb{C} \mid Rez > 0, Imz > 0\}$. Determinare (e disegnare) $F(U)$.

**6.** Se $T \in \mathcal{M}$ è definita da $T(z) = \frac{z-2}{z+2}$, trovare centro e raggio dell'immagine mediante $T$ della circonferenza $\{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$

## CAPITOLO 2

# Funzioni olomorfe

## 2.1. Funzioni olomorfe e equazione di Cauchy-Riemann

Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f \colon A \to \mathbb{C}$ una funzione.

DEFINIZIONE 2.1.1: La funzione $f$ ha *derivata complessa* in $a \in A$ se esiste finito il limite

$$\lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

e il numero $f'(a)$ si dice *derivata* di $f$ in $a$. La funzione $f$ si dice *olomorfa* su $A$ se ha derivata complessa in ogni punto di $A$. Se $f$ è olomorfa su $A$, funzione $f'$ definita da $a \mapsto f'(a)$ si dice *derivata* di $f$. Una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ si dice *intera*. Siano $A, B$ aperti in $\mathbb{C}$. Denoteremo con $\mathrm{Hol}(A)$ l'insieme di tutte le funzioni olomorfe su $A$ e con $\mathrm{Hol}(A, B)$ l'insieme di tutte le funzioni olomorfe definite su $A$ a valori in $B$.

Dalla definizione abbiamo subito

PROPOSIZIONE 2.1.1: *Se $f \colon A \to \mathbb{C}$ ha derivata complessa in $a \in A$, allora $f$ è continua in $a$.*

*Dimostrazione*: Si definisca in un intorno $U$ di $a$ la funzione $\Delta(z)$ mediante

$$\Delta(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{se } z \neq a \\ f'(a) & \text{se } z = a \end{cases}.$$

Allora su $U$ si ha $f(z) = f(a) + \Delta(z)(z-a)$ e quindi la tesi è immediata. □

**Esempi**

**1.** Le funzioni costanti $f(z) = c$ sono olomorfe su tutto $\mathbb{C}$ e $f'(z) = 0$ dato che per ogni $a \in \mathbb{C}$

$$\lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

**2.** La funzione identica $f(z) = z$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ e $f'(z) = 1$ dato che per ogni $a \in \mathbb{C}$

$$\lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{(a+h) - a}{h} = 1.$$

**3.** La funzione coniugio $f(z) = \overline{z}$ non ha derivata complessa in alcun punto di $\mathbb{C}$. Infatti per ogni $a \in \mathbb{C}$ si ha

$$\lim_{\mathbb{R} \ni h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\mathbb{R} \ni h \to 0} \frac{(\overline{a} + h) - \overline{a}}{h} = 1$$

mentre
$$\lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}\frac{f(a+ih)-f(a)}{ih}=\lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}\frac{(\overline{a}-ih)-\overline{a}}{ih}=-1.$$

Esattamente come per funzioni di variabili reali si dimostrano i seguenti risultati elementari:

Proposizione 2.1.2: *Siano $f, g\colon A\to\mathbb{C}$ funzioni con derivata complessa nel punto $a\in A$. Allora*
*(i) $f+g$ ha derivata complessa in $a$ e $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$;*
*(ii) $fg$ ha derivata complessa in $a$ e si ha $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ (regola di Leibnitz).*

Proposizione 2.1.3: *Sia $f\colon A\to\mathbb{C}$ una funzione con ha derivata complessa nel punto $a\in A$. Se $f(a)\neq 0$ allora la funzione $1/f$ è definita in un intorno aperto di $a$ ed ha ha derivata complessa in $a$ con*
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a)=-\frac{f'(a)}{[f(a)]^2}.$$

Per quanto riguarda le funzioni composte, vale l'usuale regola di derivazione:

Proposizione 2.1.4: *Siano $f\colon A\to B\subset\mathbb{C}$ e $g\colon B\to\mathbb{C}$ tali che $f$ ha ha derivata complessa nel punto $a\in A$ e $g$ ha ha derivata complessa nel punto $b=f(a)\in B$. Allora la funzione composta $g\circ f\colon A\to\mathbb{C}$ è continua ed è derivabile in $a$ con*
$$(g\circ f)'(a)=g'(b)f'(a).$$

Affronteremo più tardi il problema dell'invertibilità delle applicazioni olomorfe. Ci limitiamo a questo punto a una definizione e a un risultato preliminare.

Definizione 2.1.2: Siano $A, B$ aperti di $\mathbb{C}$. Un'applicazione olomorfa $f\colon A\to B$ si dice *biolomorfa* o un *biolomorfismo* se è biettiva e l'inversa $f^{-1}\colon B\to A$ è olomorfa.

Proposizione 2.1.5: *Sia $f\colon A\to B$ un omeomorfismo olomorfo tale che $f'\neq 0$ su $A$, Allora $f$ è un biolomorfismo e se $b=f(a)$ per qualche $a\in A$, allora*
$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}.$$

Applicando le regole di derivazione che abbiamo messo insieme, si dimostri per esercizio la seguente

Proposizione 2.1.6: *Un polinomio $p(z)=\sum_{k=0}^n a_k z^k$ è una funzione intera e la sua derivata è data da*
$$p'(z)=\sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}.$$

*Se $p(z)$ e $q(z)$ sono due polinomi primi fra loro, la funzione razionale $R(z) = p(z)/q(z)$ è definita e olomorfa sull'insieme $\{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\}$ e la sua derivata $R'(z)$ è ancora una funzione razionale.*

Vediamo ora come la nozione di derivabilità in senso complesso è collegata con quella di differenziabilità studiata nei corsi di Analisi Reale. Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione. Ricordiamo che $f$ è differenziabile (in senso reale) in $a \in A$ se esiste un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $L\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, detta *differenziale* di $f$ in $a$, tale che, in un intorno aperto di $a$, si abbia

$$f(z) = f(a) + L(z-a) + o(|z-a|) \tag{2.1.1}$$

dove con $o$ si intende che

$$\lim_{t\to 0} \frac{o(|t|)}{t} = 0.$$

Se $f$ è differenziabile in $a$ allora esistono le derivate parziali $f_x(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ e $f_y(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$ di $f$ in $a$ e $L = f_x(a)dx + f_y(a)dy$ e si scrive $L = df(a)$. Se $z = x + iy$ e $a = u + iv$, allora (2.1.1) si può riscrivere nel modo seguente:

$$f(z) = f(a) + f_x(a)(x-u) + f_y(a)(y-v) + o(|z-a|) \tag{2.1.2}$$

È un fatto valido in generale che un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare fra spazi vettoriali complessi si possa scrivere (in modo unico) come somma di un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare più un'applicazione $\mathbb{C}$-antilineare. Ci limitiamo a dimostrare questo fatto nel caso particolare che ci interessa. Si considerino il differenziale $dz$ della funzione identità e il differenziale $d\overline{z}$ della funzione coniugio. Dato che l'identità e il coniugio sono $\mathbb{R}$-lineari, allora $dz$ e $d\overline{z}$ coincidono rispettivamente con l'identità e il coniugio. Dunque $dz\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è $\mathbb{C}$-lineare mentre $d\overline{z}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è $\mathbb{C}$-antilineare. D'altro canto

$$dz = dx + idy \quad \text{e} \quad d\overline{z} = dx - idy.$$

Dunque per una funzione differenziabile $L$ in $a$, abbiamo la seguente decomposizione per il differenziale:

$$\begin{aligned} df(a) &= f_x(a)dx + f_y(a)dy = f_x(a)\left(\frac{dz + d\overline{z}}{2}\right) + f_y(a)\left(\frac{dz - d\overline{z}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f_x(a) - if_y(a)\right)dz + \frac{1}{2}\left(f_x(a) + if_y(a)\right)d\overline{z} = f_z(a)dz + f_{\overline{z}}(a)d\overline{z} \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

dove si è posto

$$f_z(a) = \frac{1}{2}\left(f_x(a) - if_y(a)\right) \ \text{ e } \ f_{\overline{z}}(a) = \frac{1}{2}\left(f_x(a) + if_y(a)\right).$$

Con queste notazioni (2.1.2) si scrive

$$f(z) = f(a) + f_z(a)(z-a) + f_{\overline{z}}(a)(\overline{z} - \overline{a}) + o(|z-a|). \tag{2.1.4}$$

TEOREMA 2.1.7: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $a \in A$. Per una funzione $f\colon A \to \mathbb{C}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

*(i) $f$ ha ha derivata complessa in $a$;*

*(ii)* $f$ *è differenziabile in* $a$ *e* $f_{\overline{z}}(a) = 0$*;*
*(iii)* $f$ *è differenziabile in* $a$ *e* $df(a)$ *è* $\mathbb{C}$*-lineare.*

*Se vale una qualunque fra (i), (ii) e (iii), allora* $f'(a) = f_z(a) = f_x(a) = -if_y(a)$*,*

*Dimostrazione*: Dall'espressione (2.1.3) segue immediatamente che $(ii)$ e $(iii)$ sono equivalenti. Supponiamo che valga $(i)$. Allora, in un intorno aperto $U$ di $a$, la funzione definita da

$$\Delta(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{se } z \neq a \\ f'(a) & \text{se } z = a \end{cases}$$

è una funzione continua in $a$ e su $U$ si ha

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + (\Delta(z) - f'(a))(z-a) \tag{2.1.5}$$

da cui segue che $f$ è differenziabile in $a$. Confrontando (2.1.5) e (2.1.4) si ha il resto di (ii).

Supponiamo invece che valga (ii). Allora in un intorno di $a$ si ha

$$f(z) = f(a) + f_z(a)(z-a) + o(|z-a|)$$

e quindi immediatamente si ottiene $f'(a) = f_z(a)$.

Per completare la dimostrazione basta osservare che se ad esempio vale $(i)$, si ha

$$f_x(a) = \lim_{\mathbb{R}\ni h} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

e

$$-if_y(a) = -i \lim_{\mathbb{R}\ni h} \frac{f(a+ih) - f(a)}{h} = \lim_{\mathbb{R}\ni h} \frac{f(a+ih) - f(a)}{ih} = f'(a).$$

□

L'equazione differenziale

$$f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(f_x + if_y\right) = 0 \tag{2.1.6}$$

si dice equazione di Cauchy-Riemann e viene soddisfatta dalle funzioni olomorfe su un aperto. Per le funzioni di classe $C^1$, dal Teorema 2.1.7 abbiamo immediatamente:

Corollario 2.1.8: *Una funzione* $f$ *di classe* $C^1$ *su un aperto* $A \subset \mathbb{C}$ *è olomorfa se e solo se soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann (2.1.6).*

Vedremo in seguito che una funzione olomorfa è sempre di classe $C^\infty$. Dunque le funzioni olomorfe sono esattamente quelle che soddisfano l'equazione di Cauchy-Riemann.

Corollario 2.1.9: *Sia* $f$ *una funzione olomorfa su un aperto connesso* $A$*. Se* $f'(z) = 0$ *per ogni* $z \in A$*, allora* $f$ *è una funzione costante.*

*Dimostrazione*: Se $f$ è una funzione olomorfa su un aperto connesso $A$ con $f'(z) = 0$ per ogni $z \in A$, allora $f$ è differenziabile con differenziale nullo su tutto l'aperto connesso $A$. Segue che $f$ è costante. □

Gli operatori differenziali

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

(a volte chiamati *derivate di Wirtinger*), pur non essendo derivate parziali, hanno regole di calcolo analoghe a quelle delle derivate usuali. Raccogliamo qui di seguito una collezione di proprietà lasciando le semplici dimostrazioni per esercizio.

PROPOSIZIONE 2.1.10: *Si hanno le seguenti*

*(i)* $\frac{\partial}{\partial z}$ *e* $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ *sono operatori* $\mathbb{C}$*-lineari sullo spazio vettoriale delle funzioni di classe* $C^1$ *e soddisfano la regola di Leibnitz per il prodotto;*

*(ii)* $\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}}$ *e* $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}}$ *per una funzione* $f$ *di classe* $C^1$*;*

*(iii) se* $f$ *è una funzione di classe* $C^1$*reale, allora* $\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}$*;*

*(iv)* $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$ *per una funzione* $f$ *di classe* $C^2$*;*

*(v)* $\frac{\partial (g\circ f)}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}$ *e* $\frac{\partial (g\circ f)}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$ *per funzioni* $f, g$ *di classe* $C^1$*;*

*(vi)* $\frac{d(f\circ\varphi)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{d\overline{\varphi}}{dt}$ *per funzioni* $f, \varphi$ *di classe* $C^1$*, con* $\varphi$ *funzione di una variabile reale.*

Concludiamo il paragafo illustrando una proprietà geometrica fondamentale delle funzioni olomorfe. Siano $\gamma_1\colon(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbb{C}$ e $\gamma_2\colon(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbb{C}$ due curve regolari (ossia di classe $C^1$ con $\gamma_1'(t)\neq 0$ e $\gamma_2'(t)\neq 0$ per ogni $t\in(-\epsilon,\epsilon)$) che si incontrano nel punto $c=\gamma_1(0)=\gamma_2(0)$. L'angolo orientato $\angle(\gamma_1,\gamma_2)$ fra le curve $\gamma_1$ e $\gamma_2$ è allora l'angolo orientato fra i vettori tangenti $\gamma_1'(0)$ e $\gamma_2'(0)$. Dunque si ha

$$\angle(\gamma_1,\gamma_2) = \arg\left(\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}\right).$$

Sia $f\colon A\to\mathbb{C}$ un'applicazione olomorfa su un aperto $A$ che contiene le immagini delle curve $\gamma_1$ e $\gamma_2$ tale che $f'(c)\neq 0$. Si osservi che dato che $f$ è olomorfa quest'ultima condizione equivale a richiedere che $df(c)$ è un isomorfismo. Assumiamo inoltre che $f$ sia di classe $C^1$ (come annunciato, vedremo presto che questa è una ipotesi superflua!). Dunque, a meno di scegliere $\epsilon>0$ un po' più piccolo, le curve $f\circ\gamma_1\colon(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbb{C}$ e $f\circ\gamma_2\colon(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbb{C}$ sono curve regolari che si incontrano nel punto $f(c)$. Dato che $f$ è olomorfa si ha

$$(f\circ\gamma_1)'(0) = f_z(\gamma_1(0))\gamma_1'(0) + f_{\overline{z}}(\gamma_1(0))\overline{\gamma_1'(0)} = f_z(c)\gamma_1'(0)$$

e

$$(f\circ\gamma_2)'(0) = f_z(\gamma_2(0))\gamma_2'(0) + f_{\overline{z}}(\gamma_2(0))\overline{\gamma_2'(0)} = f_z(c)\gamma_2'(0).$$

Dunque

$$\angle(f\circ\gamma_1, f\circ\gamma_2) = \arg\left(\frac{(f\circ\gamma_2)'(0)}{(f\circ\gamma_1)'(0)}\right) = \arg\left(\frac{f_z(c)\gamma_2'(0)}{f_z(c)\gamma_1'(0)}\right) = \arg\left(\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}\right) = \angle(\gamma_1,\gamma_2)$$

ossia $f$ conserva l'angolo orientato fra le curve passanti per $c$ (vedi Fig. 2.1).

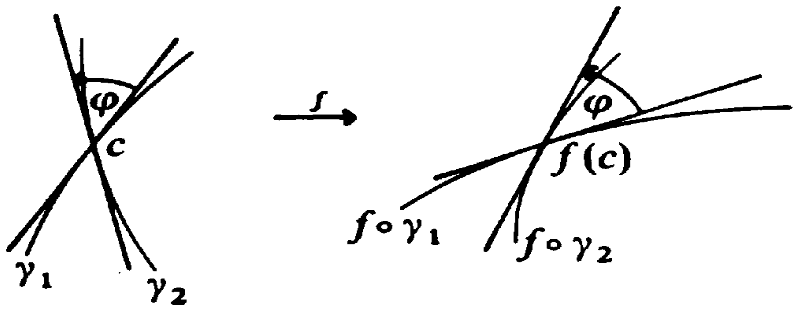


Fig. 2.1

Viceversa supponiamo che $f\colon A \to \mathbb{C}$ sia un'applicazione di classe $C^1$ tale che $df$ sia un isomorfismo in ogni punto di su $A$. Supponiamo che $f$ conservi l'angolo orientato fra curve passanti per ogni punto $a \in A$. Fissato $a \in A$, denotiamo con $\alpha_\theta\colon (-\epsilon, \epsilon) \to A$ la curva definita da

$$\alpha_\theta(t) = a + te^{i\theta}$$

dove si suppone che $\epsilon > 0$ sia piccolo abbastanza affinchè $\alpha_\theta(t) \in A$. Allora

$$\theta = \angle(\alpha_0, \alpha_\theta) = \angle(f \circ \alpha_0, f \circ \alpha_\theta) = \arg\left(\frac{(f \circ \alpha_\theta)'(0)}{(f \circ \alpha_0)'(0)}\right).$$

Si osservi che $(f \circ \alpha_0)'(0) = df(\alpha_0'(0)) \neq 0$ dato che abbiamo assunto che $df \neq 0$ su $A$. Dunque

$$\arg\ e^{i\theta} = \arg\left(\frac{f_z(a)\alpha_\theta'(0) + f_{\overline{z}}(a)\overline{\alpha_\theta'(0)}}{f_z(a)\alpha_0'(0) + f_{\overline{z}}(a)\overline{\alpha_0'(0)}}\right) = \arg\left(\frac{f_z(a)e^{i\theta} + f_{\overline{z}}(a)e^{-i\theta}}{f_z(a) + f_{\overline{z}}(a)}\right)$$

e quindi, dato che l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti,

$$0 = \arg\left(\frac{f_z(a) + f_{\overline{z}}(a)e^{-2i\theta}}{f_z(a) + f_{\overline{z}}(a)}\right).$$

Segue allora che

$$\arg\left(f_z(a) + f_{\overline{z}}(a)e^{-2i\theta}\right)$$

è indipendente da $\theta$ e questo è possibile solo se $f_{\overline{z}}(a) = 0$. Dato che $a \in A$ era arbitrario, segue allora che $f$ è olomorfa in $A$. Si osservi che, se $df$ è un isomorfismo in ogni punto di su $A$, allora necessariamente si ha anche $f' = f_z \neq 0$ su $A$.

Riassumiamo quello che abbiamo dimostrato:

Teorema 2.1.11: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una applicazione di classe $C^1$ tale che $df$ sia un isomorfismo in ogni punto di su $A$. Allora $f$ è olomorfa se e solo se conserva l'angolo orientato fra curve passanti per ogni punto $a \in A$. In questo caso si ha anche che $f' \neq 0$ su $A$.*

Per un'applicazione la proprietà di conservare gli angoli viene detta *conformalità*. A causa della proposizione 2.1.11 le applicazioni biolomorfe vengono alle volte dette *applicazioni conformi*.

**Esercizi.**

**1.** Sia $f$ una funzione di classe $C^1$ su un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Se $f = u + iv$ allora $f$ soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann $f_{\overline{z}} = 0$ se e solo se la parte reale e la parte immaginaria di $f$ soddifano il sistema di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases} \tag{2.1.7}$$

**2.** Se due funzioni $u, v$ di classe $C^2$ su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ soddisfano (2.1.7), allora sono funzioni armoniche ossia $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ e $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$.

**3.** Se $f$ è una funzione olomorfa su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ e $f = u + iv$ dove $u$ e $v$ sono la parte reale e la parte immaginaria di $f$, utilizzando le espressioni in coordinate polari $u(x, y) = u(r \cos\theta, r \sin\theta)$ e $v(x, y) = v(r \cos\theta, r \sin\theta)$, dimostrare che le equazioni di Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ sono equivalenti alle seguenti in coordinate polari:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

**4.** Siano $f\colon A \to B$ una funzione olomorfa (di classe $C^2$) e $u$ di classe $C^2$ su $B$. Allora $\Delta(u \circ f) = |f'|^2 \Delta(u) \circ f$ e quindi, in particolare, se $f' \neq 0$, allora $u \circ f$ è armonica se e solo se $u$ è armonica.

**5.** Sia $f$ una funzione olomorfa su un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Se $f = u + iv$, con $u, v$ funzioni a valori reali, e $z = x + iy$), dimostrare

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = |f'(z)|^2. \tag{2.1.8}$$

**6.** Dimostrare la Proposizione 2.1.10.

**7.** Sia $f$ una funzione olomorfa su un aperto connesso $A \subset \mathbb{C}$ con $f(A) \subset \mathbb{R}$. Dimostrare che $f$ è costante.

**8.** Sia $f$ una funzione olomorfa su un aperto connesso $A \subset \mathbb{C}$ tale che per per qualche numero reale $\geq 0$ $|f(z)| = c$ per ogni $z \in A$. Dimostrare che $f$ è costante.

**9.** Siano $A, B \subset \mathbb{C}$ aperti e $f\colon A \to B$ una funzione olomorfa con $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in A$. Dimostrare che (a) $f$ è un omeomorfismo locale; (b) $f$ è un biolomorfismo locale (ossia per ogni $a \in A$ esistono aperti $U, V$ con $a \in U \subset A$, $f(a) \in V \subset B$ e $f_{|U}\colon U \to V$ biolomorfismo).

**10.** Sia $p(x, y)$ un polinomio nelle due variabili reali $x, y$. Dimostrare che $p$ è un polinomio nella variabile complessa $z = x + iy$ se e solo se $p$ è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$.

## 2.2. Convergenza uniforme e serie di potenze.

Fino a questo punto gli unici esempi di funzioni olomorfe di cui disponiamo sono i polinomi, e dove sono definite, le funzioni razionali. In questo paragrafo vogliamo allargare il “parco” degli esempi a nostra disposizione.

Richiamiamo, per cominciare, alcuni fatti sulla convergenza di successioni di funzioni. Sia $A \subset \mathbb{C}$ e sia $\{f_n\} = \{f_n : A \to \mathbb{C}\}$ una successione di funzioni. Si dice che $\{f_n\}$ *converge uniformemente* a $f : A \to \mathbb{C}$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N$ tale che se $n \geq N$ allora per ogni $z \in A$ si ha

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Ovviamente una successione $\{f_n\} = \{f_n : A \to \mathbb{C}\}$ di funzioni uniformemente convergente a $f : A \to \mathbb{C}$ *converge puntualmente* a $f$ ossia la successione $f_n(a)$ converge a $f(a)$ per ogni $a \in A$. La caratteristica che rende particolarmente utile convergenza uniforme è che conserva la continuità. Vale infatti il seguente risultato che diamo per conosciuto:

PROPOSIZIONE 2.2.1: *Sia $\{f_n\} = \{f_n : A \to \mathbb{C}\}$ una successione di funzioni continue uniformemente convergente a $f : A \to \mathbb{C}$. Allora $f$ è continua.*

È inoltre utile ricordare il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme di successioni di funzioni:

PROPOSIZIONE 2.2.2: *Sia $\{f_n\} = \{f_n : A \to \mathbb{C}\}$ una successione di funzioni. Esiste una funzione $f : A \to \mathbb{C}$ tale che $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N$ tale che se $n, m > N$, per ogni $z \in A$, si ha*

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon.$$

Veniamo ora alla nozione di convergenza appropriata per studiare le funzioni olomorfe. Si dice che la successione di funzioni $\{f_n\} = \{f_n : A \to \mathbb{C}\}$ *converge uniformemente sui compatti* a $f$ se converge uniformemente a $f$ su ogni sottoinsieme compatto di $A$.

Abbiamo il seguente

TEOREMA 2.2.3: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $\{f_n\} = \{f_n : A \to \mathbb{C}\}$ una successione di funzioni.*

*(i)* $\{f_n\}$ *converge uniformemente sui compatti di $A$ a $f$ $\Longleftrightarrow$ per ogni $a \in A$ esiste $r_a > 0$ tale che $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f$ su $\overline{\mathbb{D}(a, r_a)} \subset A$ $\Longleftrightarrow$ per ogni $a \in A$ esiste un aperto $U_a$ contenente $a$ di tale che $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f$ su $U_a$ (“$\{f_n\}$ converge localmente uniformemente a $f$”);*

*(ii) se $f_n : A \to \mathbb{C}$ è continua per ogni $n$ e $\{f_n\}$ converge uniformemente sui compatti di $A$ a $f : A \to \mathbb{C}$ allora $f$ è continua.*

*Dimostrazione*: $(i)$ La seconda equivalenza è immediata. Per quanto riguarda la prima, la parte $(\Longrightarrow)$ è ovvia. Dimostriamo $(\Longleftarrow)$. Sia $K \subset A$ un compatto. Allora se $a \in K$, sia $r_a > 0$ come nell'ipotesi. Allora

$$K \subset \bigcup_{a \in K} \mathbb{D}(a, r_a)$$

e quindi, dato che $K$ è compatto esistono $a_1, \ldots, a_n \in K$ tali che

$$K \subset \mathbb{D}(a_1, r_{a_1}) \cup \ldots \cup \mathbb{D}(a_n, r_{a_n}) \subset \overline{\mathbb{D}(a_1, r_{a_1})} \cup \ldots \cup \overline{\mathbb{D}(a_n, r_{a_n})}.$$

Sia $\epsilon > 0$. Dato che $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f$ su $\overline{\mathbb{D}(a_j, r_{a_j})}$ per ogni $j = 1, \ldots, n$, esistono $N_1, \ldots, N_n$ tali che se $n > N_j$, allora $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ per ogni $z \in \overline{\mathbb{D}(a, r_{a_j})}$. Sia $N = \max\{N_1, \ldots, N_n\}$, se $n > N$ allora $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ per ogni $z \in K$ e la tesi è dimostrata.
$(ii)$ Dato che una funzione è continua se e solo se è continua in un intorno di ogni punto, la tesi è immediata dalla parte $(i)$ e dalla Proposizione 2.2.1. □

Consideriamo ora una serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ di funzioni $f_k$ definite su un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Per definizione la serie converge uniformemente (sui compatti) a $f$ se la successione $\sum_{k=0}^{n} f_k$ delle somme parziali converge uniformemente (sui compatti) a $f$. Ricordiamo anche il criterio di Cauchy per le serie: la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente su $B \subset A$ se e solo se se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N$ tale che, se $n \geq m \geq N$, allora per ogni $z \in B$ si ha

$$\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(z) \right| < \epsilon.$$

Si dice inoltre che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *converge assolutamente* se converge la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|$.

Il seguente importante risultato (noto come il *criterio della serie maggiorante*) segue facilmente dal criterio di Cauchy:

TEOREMA 2.2.4: *Sia $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ una serie di funzioni $f_n \colon A \to \mathbb{C}$ e sia $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ una serie convergente di numeri reali non negativi. Se per ogni $z \in A$ e $k \geq 0$ si ha $|f_k(z)| \leq M_k$, allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge assolutamente e uniformemente in $A$.*

*Dimostrazione*: Sia $\epsilon > 0$. Dato che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ converge, esiste $N$ tale che, se $n \geq m \geq N$, allora $\sum_{k=m}^{n} M_k < \epsilon$. Dunque, per ogni $z \in A$

$$\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |f_k(z)| \leq \sum_{k=m}^{n} M_k < \epsilon$$

e quindi $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente e assolutamente in $A$. □

Una *serie di potenze* centrata in $z_0$ è una serie della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{2.2.1}$$

dove i coefficienti $a_k$ sono numeri complessi. Per cominciare vogliamo caratterizzare la regione di convergenza di una serie di potenze (2.2.1). Per avere un'idea del comportamento generale esaminiamo brevemente un importante (e elementare) esempio, la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

La sua successione delle somme parziali è data da

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Dunque per $|z| < 1$ si ha $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$ e quindi la serie converge e si può calcolare la somma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z} \quad \text{per } |z| < 1.$$

Nel disco $\mathbb{D}(0, 1)$, dato che la successione $z^k$ converge uniformemente sui compatti alla funzione nulla, la successione delle somme parziali, e dunque la serie, converge uniformemente sui compatti alla funzione olomorfa $f(z) = (1 - z)^{-1}$ Se $|z| \geq 1$ la successione $z^k$ non converge a zero e quindi la successione delle somme parziali della serie geometrica non converge. Riassumendo la serie geometrica converge esattamente nel disco $\mathbb{D}(0, 1)$ e la sua somma (ossia il limite delle somme parziali) è una funzione olomorfa. La situazione generale è simile a quella descritta nell'esempio. Il primo passo del nostro sudio è il seguente

Lemma 2.2.5: (di Abel) *Sia $\{a_k\}$ una successione di numeri complessi e siano $r, M > 0$ numeri reali positivi tali che per ogni $k$ si abbia*

$$|a_k| r^k \leq M.$$

*Allora la serie di potenze (2.2.1) converge assolutamente e uniformemente su ogni compatto contenuto in $\mathbb{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < r\}$. In particolare se la serie (2.2.1) converge in $w \neq z_0$ e $r_w = |w - z_0|$, allora converge assolutamente e uniformemente su ogni compatto contenuto in $\mathbb{D}(z_0, r_w) = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < r_w\}$.*

*Dimostrazione*: Sia $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$. Allora per qualche $\rho$ si ha $|z - z_0| < \rho < r$ e quindi per ogni intero positivo $k$ risulta

$$|a_k(z - z_0)^k| \leq |a_k| \rho^k = |a_k| r^k \left(\frac{\rho}{r}\right)^k \leq M \left(\frac{\rho}{r}\right)^k$$

e quindi, per il criterio della serie maggiorante, la serie di potenze (2.2.1) converge assolutamente e uniformemente su ogni compatto contenuto in $\mathbb{D}(z_0, r)$.

La parte conclusiva dell'enunciato è immediata. Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(w - z_0)^k$ è convergente, allora la successione $a_k(w - z_0)^k$ converge a zero e quindi è necessariamente limitata. □

Il *raggio di convergenza* di una serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{2.2.2}$$

è definito da
$$R = \sup\{r \geq 0 \mid |a_k|r^k \text{ è una successione limitata}\}.$$
Questa definizione è giustificata dal seguente evidente risultato:

PROPOSIZIONE 2.2.6: *Sia $R$ il raggio di convergenza della serie di potenze (2.2.2). Allora la serie converge assolutamente e uniformemente sui compatti contenuti in $\mathbb{D}(z_0, R)$ e non converge su $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}(z_0, R)}$.*

*Dimostrazione*: Se $R = 0$ la conclusione è immediatata dato che la serie (2.2.2) converge sempre in $z_0$ e non convergerà per alcun $w \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ perchè la successione $a_k(w - z_0)^k$ non è limitata e quindi non tenderà a 0. Supponiamo che $R > 0$. Allora per ogni compatto $K \subset \mathbb{D}(z_0, R)$ esiste $r$ tale che $K \subset \mathbb{D}(z_0, r) \subset \mathbb{D}(z_0, R)$ e quindi dal Lemma di Abel segue che la serie converge uniformemente su $K$. D'altra parte se $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}(z_0, R)}$ allora $a_k(w - z_0)^k$ non è limitata e quindi la serie non può convergere in $w$. □

Occorre naturalmente dare un metodo di calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze. La *formula di Cauchy-Hadamard* per il raggio di convergenza è data nella seguente:

PROPOSIZIONE 2.2.7: *Il raggio di convergenza della serie di potenze (2.2.2) è $R = 0$ se $\limsup_{k\to\infty} (|a_k|)^{1/k} = +\infty$, è $R = \infty$ se $\limsup_{k\to\infty} (|a_k|)^{1/k} = 0$ e*
$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} (|a_k|)^{1/k}}$$
*altrimenti.*

*Dimostrazione*: Sia $R$ il raggio di convergenza di (2.2.2) e sia
$$L = \begin{cases} +\infty \text{ se } \limsup_{k\to\infty} (|a_k|)^{1/k} = 0 \\ \frac{1}{l} \text{ se } \limsup_{k\to\infty} (|a_k|)^{1/k} = l \in (0, +\infty) \\ 0 \text{ se } \limsup_{k\to\infty} (|a_k|)^{1/k} = +\infty. \end{cases}$$
Supponiamo che $0 < L < +\infty$. Cominciamo dimostrando che $L \leq R$. Sia $r \in (0, L)$. Allora
$$\frac{1}{r} > \limsup_{k\to\infty}(|a_k|)^{1/k} = \lim_{k\to\infty}\left(\sup_{n\geq k}(|a_n|)^{1/n}\right)$$
e quindi esiste un $N$ tale che se $k \geq N$, allora $\frac{1}{r} > (|a_k|)^{1/k}$ e di conseguenza $|a_k|r^k < 1$. Dunque la successione $|a_k|r^k$ è limitata e quindi si deve avere $r \leq R$. Dato che $r \in (0, L)$ è arbitrario, segue che $L \leq R$. Sia ora $s \in (L, +\infty)$. Allora
$$\frac{1}{s} < \limsup_{k\to\infty}(|a_k|)^{1/k} = \lim_{k\to\infty}\left(\sup_{n\geq k}(|a_n|)^{1/n}\right)$$
e quindi per infiniti $k$ si ha $\frac{1}{s} < |a_k|^{1/k}$ ossia $|a_k|s^k > 1$ e quindi la successione $|a_k|s^k$ non tende a zero e pertanto $s \geq R$. Per l'arbitrarietà di $s \in (L, +\infty)$, segue che $L \geq R$. In conclusione deve essere $L = R$ come desiderato. I casi $L = 0$ e $L = +\infty$ si trattano allo stesso modo e sono lasciati per esercizio. □

In molti casi per calcolare il raggio di convergenza di una serie è più semplice ricorrere alla seguente osservazione:

Proposizione 2.2.8: *Se esiste*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| ,$$

*allora* $R$ *è il raggio di convergenza di* $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$.

*Dimostrazione*: Supponiamo che $0 < R < +\infty$. Se $0 \leq r < R$, allora esiste $N$ tale che $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} > r$ se $n \geq N$. Segue allora che $|a_n|r^n < M = |a_N|r^N$ per $n > N$ (perché?). Dunque la successione $|a_n|r^n$ è limitata e quindi, applicando di nuovo il Lemma di Abel, possiamo concludere che $r$ è minore o uguale del raggio di convergenza della serie. Per l'arbitrarietà di $r \in (0, R)$, si ha allora che $R$ è minore o uguale del raggio di convergenza della serie. Sia invece $s > R$. Allora, per qualche $N'$, si ha $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} < s$ se $n \geq N'$. Dunque $|a_n|s^n > M' = |a_{N'}|s^{N'}$ per $n > N'$ (perché?). La successione $|a_n|s^n$ pertanto non converge a zero e quindi, come in precedenza segue che $s$ è maggiore o uguale del raggio di convergenza della serie. Per l'arbitrarietà di $s > R$, segue allora che $R$ è maggiore o uguale del raggio di convergenza della serie. In conclusione abbiamo dimostrato la tesi per $0 < R < +\infty$. I casi $R = 0$ e $R = +\infty$ sono lasciati per esercizio al lettore. □

Vogliamo ora dimostrare che all'interno del disco dove converge uniformemente sui compatti, una serie di potenze definisce una funzione olomorfa. Premettiamo la seguente utile osservazione:

Lemma 2.2.9: *Le serie di serie di potenze*

$$\mathcal{S} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k, \qquad \mathcal{S}_1 : \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1}, \qquad \mathcal{S}_2 : \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-1} a_k (z-z_0)^{k+1}$$

*hanno lo stesso raggio di convergenza.*

*Dimostrazione*: Si osservi che, provato che $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}_1$, che è ottenuta derivando termine a termine $\mathcal{S}$, hanno lo stesso raggio di convergenza, abbiamo finito. Infatti $\mathcal{S}$ si ottiene derivando termine a termine $\mathcal{S}_2$, e quindi l'eguaglianza dei loro raggi di convergenza segue. Siano allora $R$ e $R'$ rispettivamente i raggi di convergenza di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}_1$. Per definizione allora:

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid |a_k|r^k \text{ è una successione limitata}\},$$

$$R' = \sup\{r \geq 0 \mid k|a_k|r^{k-1} \text{ è una successione limitata}\}.$$

Sia $r < R'$. Allora per qualche $M > 0$ si ha $k|a_k|r^{k-1} < M$ per ogni $k$. Allora per ogni $k \geq 1$

$$|a_k|r^k \leq k|a_k|r^k < Mr$$

e quindi anche la successione $|a_k|r^k$ è limitata e quindi $r < R$ per ogni $r < R'$ da cui segue $R' \geq R$. Se $R = 0$ non c'è altro da dimostrare. Sia $R > 0$ e si scelga $r$

con $0 < r < R$ e sia $r < s < R$. Allora per qualche $M > 0$ si ha $|a_k|s^k < M$. Posto $q = \frac{r}{s}$, si ha

$$0 < k|a_k|r^{k-1} = \left(r^{-1}|a_k|s^k\right) kq^k < r^{-1}Mkq^k. \tag{2.2.3}$$

Dato che $r < s$ allora $1 < \frac{s}{r} = \frac{1}{q} = 1 + \delta$ con $\delta > 0$. Allora, per ogni $k \geq 2$, abbiamo:

$$\left(\frac{1}{q}\right)^k = (1+\delta)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \delta^j > \binom{k}{2}\delta^2 = \frac{k(k-1)}{2}\delta^2. \tag{2.2.4}$$

Da (2.2.3) e (2.2.4) segue allora:

$$0 < k|a_k|r^{k-1} < r^{-1}Mkq^k < r^{-1}M\frac{2}{(k-1)\delta^2}.$$

Dato che l'ultimo termine tende a 0 per $k_D(z, \rightarrow) - k_D(z_0, \rightarrow)\infty$, segue che anche $k|a_k|r^{k-1}$ tende a 0 per $k_D(z, \rightarrow) - k_D(z_0, \rightarrow)\infty$ e quindi, in particolare che la successione $k|a_k|r^{k-1}$ è limitata. Deve essere allora $r < R'$. Per l'arbitrarietà di $r \in (0, R)$, segue allora che $R \leq R'$ e la dimostrazione è completa. □

Possiamo ora dimostrare:

Teorema 2.2.10: *Se $R > 0$ è il raggio di convergenza della serie di potenze*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \tag{2.2.5}$$

*sul disco $\mathbb{D}(z_0, R)$ la somma $S(z)$ della serie (2.2.5) definisce una funzione olomorfa che ha per derivata la la somma $S_1(z)$ della serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(z - z_0)^{k-1} \tag{2.2.6}$$

*che ha anch'essa raggio di convergenza R.*

*Dimostrazione*: Abbiamo già dimostrato che le serie (2.2.6) e (2.2.5) hanno lo stesso raggio di convergenza. Dobbiamo quindi provare che, se $w \in \mathbb{D}(z_0, R)$, la somma di (2.2.5) ha derivata complessa $S'(w) = S_1(w)$ in $w$. Sia dunque $S(z)$ la somma di (2.2.5) e denotiamo

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z - z_0)^k, \quad R_n(z) = S(z) - s_n(z), \quad t_n(z) = \sum_{k=1}^{n} ka_k(z - z_0)^{k-1}.$$

Sia $|w - z_0| < \rho < R$ e sia fissato $\epsilon > 0$ arbitrario. Allora per $z \neq w$ con $|z - z_0| < \rho < R$

$$\frac{S(z) - S(w)}{z - w} - S_1(w) = \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - t_n(w) + t_n(w) - S_1(w) + \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w} &= \frac{1}{(z-z_0)-(w-z_0)}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k((z-z_0)^k-(w-z_0)^k)\\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k((z-z_0)^{k-1}+(z-z_0)^{k-2}(w-z_0)+\ldots+(w-z_0)^{k-1})\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\left|\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\right| &\le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|(|z-z_0|^{k-1}+|z-z_0|^{k-2}|w-z_0|+\ldots+|w-z_0|^{k-1})\\ &\le \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|\rho^{k-1}.\end{aligned}$$

Dato che l'ultimo termine della diseguaglianza è il resto di una serie numerica convergente, esiste $N_1$ tale che, se $n > N_1$,

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\right| \le \frac{\epsilon}{3}.$$

Esiste anche $N_2$ tale che , se $n > N_2$,

$$|t_n(w)-S_1(w)| \le \frac{\epsilon}{3}.$$

Sia $n > \max\{N_1, N_2\}$, dato che $s_n(z)$ è un polinomio con derivata $t_n(z)$, esiste $\delta > 0$ tale che, per $0 < |z-w| < \delta$

$$\left|\frac{s_n(z)-s_n(w)}{z-w} - t_n(w)\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dunque per $0 < |z-w| < \delta$, scegliendo $n > \max\{N_1, N_2\}$, possiamo concludere:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{S(z)-S(w)}{z-w} - S_1(w)\right|\\ &\qquad\le \left|\frac{s_n(z)-s_n(w)}{z-w} - t_n(w)\right| + |t_n(z)-S_1(z)|\\ &\qquad\qquad + \left|\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\right|\\ &\qquad\le \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

e quindi la tesi segue. $\square$

Dunque le serie di potenze convergenti sono esempi di funzioni olomorfe. Più in generale diamo la seguente

Definizione 2.2.1: Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $f\colon A \to \mathbb{C}$ si dice *analitica* se per ogni $a \in A$ esiste $r > 0$ tale che su $\mathbb{D}(a, r)$ la $f$ è uguale alla somma di una serie di potenze centrata in $a$ che converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{D}(a, r)$.

Corollario 2.2.11: *Sia $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora $f$ e tutte le sue derivate sono funzioni olomorfe su $A$.*

*Dimostrazione*: Immediata dal Teorema 2.2.10. □

Dimostremo più avanti che ogni funzione olomorfa è analitica.

**Esempi.** La serie

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{2.2.7}$$

ha raggio di convergenza $R = +\infty$ e quindi definisce una funzione intera, la *funzione esponenziale* che estende a $\mathbb{C}$ la funzione esponenziale reale. Dal Teorema 2.2.7 si ha immediatamente la regola di derivazione

$$(e^z)' = e^z.$$

Per ogni $w$, se $F_w(z) = e^{-z}e^{z+w}$, segue allora che $F'_w(z) = 0$ su $\mathbb{C}$ e quindi che $F_w(z) = cost = F_w(0) = e^w$, ossiaper ogni $z$ e $w$

$$e^{-z}e^{z+w} = F_w(z) = e^w. \tag{2.2.8}$$

Da (2.2.8), per $w = 0$, otteniamo $e^{-z}e^z = F_0(0) = e^0 = 1$ e quindi possiamo concludere $e^{-z} = (e^z)^{-1}$ e, di conseguenza, che anche per l'esponenziale complesso vale la consueta formula di addizione:

$$e^{z+w} = e^z e^w. \tag{2.2.9}$$

Le serie

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{e} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{2.2.10}$$

hanno raggio di convergenza $R = +\infty$ e quindi definiscono funzioni intere, le funzioni trigonometriche complesse *coseno* e *seno* che estendono le usuali funzioni trigonometriche reali. Sommando termine a termine le serie (2.2.10) (possibile grazie alla convergenza uniforme), ricordando la definizione (2.2.7) e usando $i^2 = -1$ otteniamo la *formula di Eulero*:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{2.2.11}$$

Dalla definizione (2.2.10) si ha immediatamente che

$$\cos(-z) = \cos z \quad \text{e} \quad \sin(-z) = -\sin z$$

e quindi

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{2.2.12}$$

Da (2.2.11) e (2.2.12) seguono immediatamente le identità

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{e} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{2.2.13}$$

Derivando si trova, come per le funzioni trigonometriche reali,

$$(\cos z)' = -\sin z \quad \text{e} \quad (\sin z)' = \cos z.$$

Se $g(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$, allora $g(0) = 1$ e $g'(z) = -2\cos z \sin z + 2\sin z \cos z = 0$ e quindi si ha l'identità trigonometrica fondamentale

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1. \tag{2.2.14}$$

Da (2.2.11), (2.2.12) e dalla formula di addizione per l'esponenziale, si ottengono, con un calcolo immediato, le regole di addizione per le funzioni trigonometriche complesse:

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w \quad \text{e} \quad \sin(z + w) = \sin z \cos z + \cos z \sin w.$$

Per $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ e quindi

$$|e^z| = e^{Rez} > 0 \quad \text{e} \quad arg(e^z) = Imz. \tag{2.2.15}$$

Si osservi che da (2.2.15) segue immediatamente che la funzione esponenziale non assume mai il valore 0 e che è un'applicazione suriettiva da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Infatti se $\mathbb{C}^* \ni w$ e $w = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$, se $r = \log\rho$, allora $e^{r+i\theta} = w$. Inoltre (2.2.9) ci dice che l'esponenziale è un omomorfismo fra il gruppo additivo $(\mathbb{C}, +)$ e il gruppo moltiplicativo $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ dei numeri complessi non nulli.

L'esponenziale complesso è una funzione periodica con periodo un multiplo intero di $2\pi i$ ossia

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Longleftrightarrow z_2 = z_1 + 2k\pi i \quad \text{per qualche}\, k \in \mathbb{Z}.$$

Infatti, dato che $e^{2\pi i} = 1$, allora se $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{z_1 + 2k\pi i} = e^{z_1}(e^{2\pi i})^k = e^{z_1}.$$

D'altro canto se $e^{z_1} = e^{z_2}$ e $z_2 - z_1 = z = x + iy$, allora

$$1 = e^{z_2 - z_1} = e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Dunque, confrontando parte reale e parte immaginaria, si ottiene $x = 0$ e $y = 2k\pi$ e quindi $z_2 = z_1 + 2k\pi i$.

Da queste considerazioni segue che l'esponenziale, visto come omomorfismo suriettivo fra il gruppo additivo $(\mathbb{C}, +)$ e il gruppo moltiplicativo $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ dei numeri complessi non nulli, ha per nucleo il sottogruppo $(2\pi i\mathbb{Z}, +)$ di $(\mathbb{C}, +)$. Dunque l'esponenziale induce l'isomorfismo di gruppi $(\mathbb{C}, +)_{/2\pi i\mathbb{Z}} \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$. Si osservi che questo isomorfismo è anche un omoemorfismo se su $(\mathbb{C}, +)_{/2\pi i\mathbb{Z}}$ si considera l'usuale topologia quoziente.

Utilizzando (2.2.13) possiamo ricavare ulteriori semplici proprietà delle funzioni trigonometriche complesse. Da (2.2.13) segue ad esempio

$$\sin z = 0 \Longleftrightarrow e^{2iz} = 1 \Longleftrightarrow z = k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Dunque la funzione $\sin z$ si annulla solo sull'asse reale. Simile è il comportamento della funzione $\cos z$ come si può dimostrare a partire dalla seguente relazione:

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \sin z \cos\frac{\pi}{2} + \cos z \sin\frac{\pi}{2} = \cos z.$$

Per quanto riguarda la periodicità, dato che la funzione esponenziale è periodica di periodo un multiplo intero di $2\pi i$, dalle formule di Eulero (2.2.13) segue che le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ sono periodiche di periodo un multiplo intero di $2\pi$. Non ci possono essere altri periodi. Per esempio se $w \in \mathbb{C}$ è un altro periodo per $\sin z$, allora deve essere $\sin w = \sin 0$ e quindi $w = m\pi$ per qualche $m \in \mathbb{Z}$. D'altra parte $m$ deve essere pari dato che la funzione reale $\sin x$ è periodica di periodo un multiplo intero di $2\pi$. Si usa un analogo ragionamento per la funzione coseno.

Concludiamo osservando che, mentre le funzioni trigonometriche sono limitate su $\mathbb{R}$, le loro estensioni su $\mathbb{C}$ sono illimitate. Infatti per $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\cos(it) = \frac{e^{-t} + e^{t}}{2} = \cosh t$$

e

$$\sin(it) = \frac{e^{-t} - e^{t}}{2i} = i \sinh t.$$

**Esercizi.**

**1.** Dimostrare che la successione di funzioni $f_n(z) = z^n$ non converge uniformemente in $\mathbb{D}(0,1)$ ma converge uniformemente sui compatti contenuti in $\mathbb{D}(0,1)$.

**2.** $(a)$ Siano $b_n, c_n$ due successioni di numeri reali non negativi. Se $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ e $\limsup\limits_{n\to\infty} c_n = c$, dimostrare che $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n c_n = bc$.

*Suggerimento:*

*Per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $N$ *tale che se* $k > N$ *si ha* $(b-\epsilon)c_k \le b_k c_k \le (b+\epsilon)c_k$. *Dunque* $(b-\epsilon) \sup\limits_{k\ge n>N} c_k \le \sup\limits_{k\ge n>N} b_k c_k \le (b+\epsilon) \sup\limits_{k\ge n>N} c_k$.....

$(b)$ Dimostrare che non è vero in generale che per successioni arbitrarie $b_n, c_n$ vale la conclusione del punto $(a)$. *Suggerimento: si scelga* $b_n \equiv -1$ *e* $c_n = 2 + (-1)^n$.....

**3.** Completare le dimostrazioni della Proposizione 2.2.7 e della Proposizione 2.2.8.

**4.** Siano $R$ e $R^*$ rispettivamente i raggi di convergenza delle serie di potenze $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ e $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-1} a_k (z-z_0)^{k+1}$. Completare i dettagli della prima parte della dimostrazione del Lemma 2.2.9 per provare che $R = R^*$.

**5.** Si considerino le serie di potenze $S_1 : \sum\limits_{n\ge 1} \frac{1}{n^2} z^n$, $S_2 : \sum\limits_{n\ge 0} z^n$, $S_3 : \sum\limits_{n\ge 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ e sia $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Si dimostri che $S_1$ converge assolutamente su $T$, $S_2$ non converge in alcun punto di $T$, $S_3$ converge in $z = 1$, non converge in $z = -1$.

**5.** Si consideri la serie di potenze $\sum_{n\ge 0} z^{2^n}$.

(a) Si dimostri che ha raggio di convergenza $R = 1$.

(b) Se $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^{2^n}$ è la somma della serie, si dimostri che $\lim_{\tau\to 1^-} f(\tau) = +\infty$
*Consiglio: se* $\tau \in (2^{-\frac{1}{2^N}}, 1)$ *si ha* $f(\tau) > \sum_0^N \tau^{2^n} > (N+1)\tau^{2^N} > \frac{N+1}{2}$ *e quindi....*
(c) Se $|z| < 1$, si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $f(z^{2^n}) = f(z) - (z + z^2 + \ldots + z^{2^{n-1}})$ e quindi che $|f(z^{2^n})| \leq |f(z)| + n$
(d) Dimostrare che che $\lim_{t\to 1^-} |f(t\zeta)| = +\infty$ per ogni radice $2^n$-esima dell'unità $\zeta$ (ossia se $\zeta^{2^n} = 1$). *Suggerimento: da (c) segue che* $|f(t\zeta)| \geq f(t^{2^n}) - n$*....*
(e) Concludere che per ogni $z_0$ con $|z_0| = 1$ non può esistere una funzione olomorfa $\hat{f}$ definita su un intorno aperto di $U$ di $z_0$ tale che $\hat{f}_{U\cap\mathbb{D}(0,1)} = f_{U\cap\mathbb{D}(0,1)}$. *Suggerimento: ricordare che l'unione $H$ di tutti i sottogruppi delle radici $2^n$-esime dell'unità è densa in $S^1$ (esercizio 17 paragrafo 1.2 ....)*

**6.** Si trovi il raggio di convergenza della serie $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ e se ne calcoli la somma nel disco di convergenza se si è posto $a_n = \begin{cases} 2^n & \text{per } n \text{ pari} \\ 3^n & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$.

**7.** Sviluppare in serie di potenze in 0 le funzioni $f(z) = \frac{1}{1+2z}$, $g(z) = \frac{z^2}{(1-z^2)^3}$ e in serie di potenze in $i$ la funzione $h(z) = \frac{1}{z}$ e calcolare il raggio di convergenza di ciascuna serie.

**8.** Dimostrare che $exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definita da $exp(z) = e^z$ è un omomorfismo suriettivo dal gruppo additivo $\mathbb{C}$ al gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^*$. Qual'è il suo nucleo?

**9.** Trovare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\cos z = 0$. Trovare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\cos z = 5$.

**10.** Per ogni intero $n \geq 1$ e $z \in \mathbb{C}$, dimostrare la seguente formula:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kz = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\frac{z}{2}}$$

*Suggerimento: Dato che* $\cos kz = \frac{e^{ikz}+e^{-ikz}}{2}$, *si ha*

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kz = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikz} = \frac{e^{-inz}}{2}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikz}.$$

*Sommando la progressione geometrica e utilizzando* $\sin w = \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$....

**11.** Dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k$ converge uniformemente sui compatti contenuti del disco unitario $\mathbb{D}(0,1)$. Se $\lambda(z)$ è la somma della serie per $z \in \mathbb{D}(0,1)$, si dimostri che $\lambda'(z) = \frac{1}{1+z}$ e si concluda che $e^{\lambda(z)} = 1 + z$.

## 2.4. Topologia della convergenza uniforme sui compatti.

In questo paragrafo descriviamo rapidamente le implicazioni topologiche della nozione di convergenza uniforme sui compatti. Per cominciare riassumiamo in un lemma una serie di osservazioni che per economia dimostrativa è opportuno dimostrare insieme. Alcuni dei risultati sono essenziali per la discussione che faremo in questo paragrafo, altri che saranno importanti successivamente.

LEMMA 2.4.1: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Esiste una successione $\{A_n\}_{n\geq 1}$ di aperti tali che*

*(i) $\overline{A}_n$ è compatto per ogni $n \geq 1$;*

*(ii) $\overline{A}_n \subset A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*

*(iii) $A = \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n = \bigcup\limits_{n\geq 1} \overline{A}_n$;*

*(iv) ciascun $A_n$ si può costruire in modo che la frontiera di $A_n$ sia lineare a tratti, infatti costituita da poligoni ottenuti come unione finita di segmenti paralleli o all'asse reale o all'asse immaginario.*

*Dimostrazione*: Per ogni intero positivo $n$ si definiscano

$$K_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid dist(z, \mathbb{C} \setminus A) \geq \frac{1}{n} \right\} \cap \overline{\mathbb{D}(0,n)}$$

e

$$U_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid dist(z, \mathbb{C} \setminus A) > \frac{1}{n} \right\} \cap \mathbb{D}(0,n).$$

Allora per ogni $n$ si ha che $U_n$ è aperto e $K_n$ è compatto perché chiuso e limitato e

$$U_n \subset K_n \subset U_{n+1} \subset K_{n+1}.$$

Inoltre si ha evidentemente che $A = \bigcup\limits_{n\geq 1} U_n = \bigcup\limits_{n\geq 1} K_n$. Per ogni intero positivo $n$ sia

$$d_n = \frac{1}{4} \min_{K_n} dist(z, \mathbb{C} \setminus U_{n+1})$$

e si definisca per ogni $z \in K_n$

$$Q(z) = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid |Re(w) - Re(z)| < \frac{\sqrt{2} d_n}{2} \text{ e } |Im(w) - Im(z)| < \frac{\sqrt{2} d_n}{2} \right\}.$$

Allora per ogni $z \in K_n$ si ha $Q(z) \subset \overline{Q(z)} \subset U_{n+1}$ e, evidentemente, $\{Q(z)\}_{z\in K_n}$ è un ricoprimento aperto del compatto $K_n$. Allora esistono $z_1, \ldots, z_N \in K_n$ tali che

$$K_n \subset Q(z_1) \cup \ldots \cup Q(z_N) = A_n \subset \overline{A_n} = \overline{Q(z_1)} \cup \ldots \cup \overline{Q(z_N)} \subset U_{n+1}.$$

Allora, per costruzione gli aperti $A_n$ hanno tutte le proprietà richieste. In particolare dato che ciascun $A_n$ è unione finita di quadrati, la sua frontiera è lineare a tratti e composta da una unione finita di segmenti paralleli all'asse reale o all'asse immaginario. $\square$

Siano dunque $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $\{A_n\}$ una successione di aperti contenuti in $A$ con le proprietà $(i), (ii), (iii)$ elencate nel Lemma 2.4.1. Se $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ è l'insieme di tutte le funzioni continue da $A$ in $\mathbb{C}$ e $f, g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$, definiamo

$$\rho_n(f, g) = \sup\{|f(z) - g(z)| \mid z \in \overline{A}_n\} \tag{2.4.1}$$

e

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}. \tag{2.4.2}$$

Si osservi che dato che $\left|\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}\right| < 1$, la serie che definisce $\rho(f, g)$ è convergente e quindi la (2.4.2) fornisce una buona definizione per $\rho$.

Vogliamo ora dimostrare che $\rho$ è una distanza su $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ e studiare la topologia indotta da questa struttura di spazio metrico. In particolare dimostreremo che è esattamente la topologia indotta dalla nozione di convergenza uniforme sui compatti che abbiamo introdotto prima. Cominciamo con la seguente:

Proposizione 2.4.2: *La funzione definita da (2.4.2) è una distanza su $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ e quindi $(\mathcal{C}(A, \mathbb{C}), \rho)$ è uno spazio metrico.*

*Dimostrazione*: È evidente che $\rho(f, g) = \rho(g, f)$. Inoltre è anche semplice convincersi che (2.4.1) per ogni $n$ è soddisfa la diseguaglianza triangolare. Se $f(t) = \frac{t}{1+t}$, si vede subito che la funzione $f(t)$ è crescente e concava su $[0, +\infty)$. Dunque per ogni $t_0 > 0$ e $s \in [0, 1]$, si ha $sf(t_0) \leq f(st_0)$. Dunque, per $a, b, c \in [0, +\infty)$ con $0 \leq a \leq b + c$, abbiamo:

$$f(a) \leq f(b + c) = \frac{b}{b + c} f(b + c) + \frac{b}{b + c} f(b + c) \leq f(b) + f(c).$$

Pertanto, per $f, g, h \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$, dato che si ha $0 \leq \rho_n(f, g) \leq \rho_n(f, h) + \rho_n(h, g)$ per ogni $n$, segue che:

$$f(\rho_n(f, g)) \leq f(\rho_n(f, h)) + f(\rho_n(h, g)).$$

Dunque la diseguaglianza triangolare vale per ogni addendo della serie che definisce la funzione $\rho$ e quindi possiamo concludere che la diseguaglianza triangolare vale per $\rho$. Infine dato che $A = \bigcup_{n \geq 1} \overline{A}_n$, si ha immediatamente che $f = g$ se $\rho(f, g) = 0$. $\square$

Vogliamo dimostrare che la struttura topologica indotta da $\rho$ è indipendente dalla successione "invadente" $A_n$ che si sceglie nella definizione. A tal fine cominciamo con il seguente lemma tecnico:

Lemma 2.4.3: *Sia $\rho$ definita su $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ da (2.4.2).*

*(i) Per ogni $\epsilon > 0$ esistono $\delta > 0$ e un compatto $K \subset A$ tali che per ogni $f, g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$*

$$\sup\{|f(z) - g(z)| \mid z \in K\} < \delta \quad \Longrightarrow \quad \rho(f, g) < \epsilon.$$

*(ii) Per ogni $\delta > 0$ e sottoinsieme compatto $K \subset A$, esiste $\epsilon > 0$ tale che per ogni $f, g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$*

$$\rho(f, g) < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \sup\{|f(z) - g(z)| \mid z \in K\} < \delta.$$

*Dimostrazione*: Sia $\epsilon > 0$. Esiste allora un intero positivo $N$ tale che $\displaystyle\sum_{n>N} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$. Si fissino allora $K = \overline{A}_N$ e $\delta > 0$ tale che per $t \in [0, \delta)$ si abbia $\frac{t}{1+t} < \frac{\epsilon}{2}$. Siano $f, g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ tali che

$$\sup\{|f(z) - g(z)| \mid z \in K\} < \delta.$$

Allora, dato che per ogni $n \leq N$ si ha $\overline{A}_n \subset \overline{A}_N = K$, si ha

$$\frac{\rho_n(f,g)}{1 + \rho_n(f,g)} < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{per ogni } 1 \leq n \leq N.$$

Dunque

$$\rho(f,g) < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}\frac{\epsilon}{2} + \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} = \frac{\epsilon}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}\right) + \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Supponiamo ora che siano fissati arbitrariamente $\delta > 0$ e un compatto $K \subset A$. Dato che $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \overline{A}_n$ e $\overline{A}_n \subset A_{n+1}$ per ogni $n$, per qualche intero positivo $M$ si ha $K \subset \overline{A}_M$. Dunque

$$\rho_M(f,g) \geq \sup\{|f(z) - g(z)| \mid z \in K\}.$$

□

Dimostriamo ora che la topologia indotta su $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ dalla distanza $\rho$ definita da (2.4.2) non dipende dalla scelta della successione $\{A_n\}$ che "invade" $A$ e che la convergenza uniforma sui compatti è in effetti la convergenza rispetto alla distanza $\rho$.

TEOREMA 2.4.4:
*(i)* *Un sottoinsieme $U \subset \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ è aperto nella topologia indotta dalla distanza $\rho$ se e solo se per ogni $f \in U$ esiste un compatto $K \subset A$ e $\delta > 0$ tali che*

$$\{g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C}) \mid |g(z) - f(z)| < \delta \ \ \forall z \in K\} \subset U.$$

*(ii)* *Siano $\{A_n\}$ e $\{A'_n\}$ due successioni di aperti contenuti in $A$ con le proprietà $(i), (ii), (iii)$ elencate nel Lemma 2.4.1. Le distanze $\rho$ e $\rho'$ definite mediante (2.4.2) utilizzando rispettivamente le successioni $\{A_n\}$ e $\{A'_n\}$ definiscono la stessa topologia su $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$.*

*(iii)* *Una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ converge uniformemente sui compatti di $A$ se e solo se converge rispetto alla distanza $\rho$.*

*Dimostrazione*: $(i)$ Per definizione di topologia indotta da una distanza, un sottoinsieme $U \subset \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ è aperto se per ogni $f \in U$ esiste un $\epsilon > 0$ tale che

$$\{g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C}) \mid \rho(f,g) < \epsilon\} \subset U.$$

Per il punto $(i)$ del Lemma 2.4.3, esistono allora $\delta > 0$ e un compatto $K \subset A$ tali che per ogni $f, g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ con $\sup\{|f(z) - g(z)| \mid z \in K\} < \delta$ si ha $\rho(f,g) < \epsilon$. Ma allora $\delta$ e $K$ ottenuti in questo modo sono proprio quelli richiesti.

$(ii)$ Il punto $(i)$ caratterizza gli aperti nella topologia indotta da $\rho$ in modo indipendente dalla successione "invadente" di aperti $\{A_n\}$ e quindi è uguale alla topologia definita da una distanza $\rho'$ definita come $\rho$ a partire da un'altra successione "invadente" di aperti $\{A'_n\}$.

$(iii)$ Se una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ converge uniformemente sui compatti di $A$ a $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$, allora converge uniformemente su ogni compatto $\{\overline{A}_n\}$ e quindi, necessariamente, $\rho(f_n, f) \longrightarrow 0$. Viceversa, supponiamo che $\rho(f_n, f) \longrightarrow 0$ e sia $K$ un compatto contenuto in $A$. Sia $\delta > 0$ arbitrario. Per il punto $(ii)$ del Lemma 2.4.3, esiste $\epsilon$ tale che se $\rho(f_n, f) < \epsilon$ allora $\sup\{|f_n(z) - f(z)| \mid z \in K\} < \delta$. Dato che $\rho(f_n, f) \longrightarrow 0$, esiste $N$ tale che se $n > N$ si ha $\rho(f_n, f) < \epsilon$ e quindi, per $n > N$ si ha $\sup\{|f_n(z) - f(z)| \mid z \in K\} < \delta$ e pertanto $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f$ su $K$. □

Concludiamo questa panoramica sulla struttura metrica e topologica di $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ indotta dalla convergenza uniforme sui compatti con la completezza:

Teorema 2.4.5: *$\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ è uno spazio metrico completo.*

*Dimostrazione*: A questo punto la dimostrazione è quasi immediata. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy rispetto alla distanza $\rho$. Allora, usando di nuovo $(i)$ del Lemma 2.4.3, si vede subito che $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy per la distanza uniforme su qualunque compatto $K \subset A$. In particolare, per ogni $z \in A$, la successione $\{f_n(z)\}$ è una successione di Cauchy e quindi converge a un limite $f(z)$. Basterà dimostrare che la successione $\{f_n\}$ uniformemente sui compatti di $A$ a $F$. Infatti in questo caso seguirà che $f$ è continua e che $\rho(f_n, f) \longrightarrow 0$. Sia allora $K \subset U$ un compatto e sia $\delta > 0$ arbitrario. Usiamo di nuovo l'argomento usato prima. Per il punto $(ii)$ del Lemma 2.4.3, esiste $\epsilon$ tale che se $\rho(f_n, f_m) < \epsilon$ allora $\sup\{|f_n(z) - f_m(z)| \mid z \in K\} < \frac{\delta}{2}$. Dato che $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy, esiste $N$ tale che se $m, n > N$ si ha $\rho(f_n, f_m) < \epsilon$ e quindi, per $n > N$ si ha

$$\sup\{|f_n(z) - f_m(z)| \mid z \in K\} < \frac{\delta}{2}.$$

Si fissi arbitrariamente $z \in K$. Allora per qualche $m_z > N$ sufficientemente grande si deve avere

$$|f_{m_z}(z) - f(z)| < \frac{\delta}{2}.$$

Ma allora per ogni $z \in K$, se $n > N$,

$$|f_n(z) - f(z)| < |f_n(z) - f_{m_z}(z)| + |f_{m_z}(z) - f(z)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

e quindi, dato che $N$ è indipendente dalla scelta di $z \in K$, la successione $\{f_n\}$ converge uniformente a $f$ su $K$. □

**Osservazione.** La topologia della convergenza uniforme dipende solo dalla struttura topologica di $\mathbb{C}$ e non dalla distanza scelta per definirla, in questo caso quella euclidea. Usando la caratterizzazione degli aperti data nel punto $(i)$ del Teorema 2.4.4 si può infatti dimostrare che coincide con la topologia *compatta-aperta* di $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$, ossia quella che ha per sottobase di aperti la famiglia di insiemi

$$S(K, U) = \{f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C}) \mid f(K) \subset U\}$$

al variare di $K \subset A$ compatto e di $U \subset \mathbb{C}$ aperto. Per la dimostrazione si veda Theorem 5.1, pg. 286 in J. Munkres, *Topology. A first Course.*

# CAPITOLO 3

# La formula di Cauchy e le sue prime applicazioni

## 3.1. Integrazione lungo le curve.

Un'applicazione continua $\gamma\colon [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ si dice una *curva* $C^1$ *a tratti* se esiste una partizione $t_0 = a, \dots, t_n = b$ dell'intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tale che la restrizione di $\gamma$ a ciascun intervallo aperto $(t_{j-1}, t_j)$ è di classe $C^1$ con derivate che si estendono con continuità sugli intervalli chiusi $[t_{j-1}, t_j]$. Ovviamente una curva di classe $C^1$ è $C^1$ a tratti, ma non vale il viceversa. Diremo che una curva $\gamma\colon [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ è *semplice* se è iniettiva e che è *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. A volte, se non c'è rischio di ambiguità, denoteremo con $\gamma$ anche l'immagine (o sostegno) di una curva $C^1$ a tratti $\gamma$. Infine diremo che la curva $\gamma\colon [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ è *regolare a tratti* se è $C^1$ a tratti con $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a,b]$ dove $\gamma$ è derivabile.

La *lunghezza* di una una curva $C^1$ a tratti $\gamma\colon [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ è definta da

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(Re\gamma'(t))^2 + (Im\gamma'(t))^2} dt. \tag{3.1.1}$$

Si osservi che gli integrandi che compaiono in (3.1.1) sono funzioni continue tranne al più che in un numero finito di punti dove possono avere discontinuità di tipo salto e quindi la definizione è ben posta. Sia ora $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Per definizione *l'integrale di $f$ lungo la curva* $C^1$ a tratti $\gamma\colon [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ è definito da

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt. \tag{3.1.2}$$

Di nuovo la definizione è ben posta dato che l'integrando a destra in (3.1.2) è una funzione continua tranne al più che in un numero finito di punti dove può avere discontinuità di tipo salto.

**Esempi.** Sia $\Gamma(z_0, r) = \{|z - z_0| = r\}$ la circonferenza parametrizzata per $t \in [0,1]$ da $t \to z_0 + re^{2\pi i t}$. Allora

$$\int_{\Gamma(z_0,r)} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Le curve $\gamma_1 : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ definita da $\gamma_1(t) = e^{i(\pi - t)}$ e $\gamma_2 : [-1,1] \to \mathbb{C}$ definita da $\gamma_2(t) = t$ sono di classe $C^1$ e hanno gli stessi estremi: $\gamma_1(0) = \gamma_2(-1) = -1$ e $\gamma_1(\pi) = \gamma_2(1) = 1$. D'altro canto:

$$\int_{\gamma_1} |z|dz = 2 \neq 1 = \int_{\gamma_2} |z|dz.$$

Diremo che due curve $C^1$ a tratti $\gamma_1 : I \to A \subset \mathbb{C}$, $\gamma_2 : J \to A \subset \mathbb{C}$ sono *equivalenti* se esiste un diffeomorfismo $\varphi : J \to I$ con $\varphi'(t) > 0$ per ogni $t \in J$ e tale che $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. Dalla definizione che abbiamo dato segue che curve equivalenti hanno lo stesso sostegno e la stessa orientazione (nel senso di verso di percorrenza). In letteratura spesso per curve equivalenti si intende semplicemente curve con lo stesso sostegno.

PROPOSIZIONE 3.1.1: *La lunghezza di una curva e l'integrale di una funzione su una curva sono indipendenti dalle parametrizzazioni orientate. Precisamente se* $\gamma_1 : I \to A \subset \mathbb{C}$ *e* $\gamma_2 : J \to A \subset \mathbb{C}$ *sono curve* $C^1$ *a tratti equivalenti e* $f$ *è una funzione continua su* $A$*, allora* $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$ *e*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Lasciamo per esercizio la semplice dimostrazione. Si osservi che lunghezza della curva rimane invariante anche rispetto a riparametrizzazioni che invertono l'orientazione. Dalla definizione di integrale segue immediatamente inoltre che, se $\gamma : I \to A \subset \mathbb{C}$ è una curva $C^1$ a tratti, $f_1, f_2 : A \to \mathbb{C}$ sono funzioni continue e $c_1, c_2$ sono costanti,

$$\int_{\gamma} c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) dz = c_1 \int_{\gamma} f_1(z)dz + c_2 \int_{\gamma} f_2(z)dz.$$

Se $\gamma_1 : [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [c,d] \to A \subset \mathbb{C}$ sono curve $C^1$ a tratti con $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, il *prodotto* $\gamma_1\gamma_2 : [a, b+d-c] \to A \subset \mathbb{C}$ è la curva $C^1$ a tratti definita da

$$\gamma_1\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t-b+c) & \text{se } t \in [b, b+d-c]. \end{cases}$$

Se $\gamma : [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ è una curva $C^1$ a tratti, l'*inversa* di $\gamma$ è la curva $C^1$ a tratti $\gamma^{-1} : [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ definita da $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a+b-t)$.

Se $\gamma_1 : [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [b,c] \to A \subset \mathbb{C}$ sono curve $C^1$ a tratti con $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ e $\gamma : [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ è una curva $C^1$ a tratti e $f : A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua, si ha allora dalla definizione di integrale:

$$\int_{\gamma_1\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz \tag{3.1.3}$$

e

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz. \tag{3.1.4}$$

È spesso utile la seguente stima:

Proposizione 3.1.2: *Siano $\gamma\colon [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ una curva $C^1$ a tratti e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione continua, allora*

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \max_{z\in\gamma(I)} |f(z)|L(\gamma).$$

*Dimostrazione*: Se $\int_\gamma f(z)dz = 0$ la stima è ovvia. Supponiamo che $\int_\gamma f(z)dz \neq 0$ e sia $s_0 = -arg\left(\int_\gamma f(z)dz\right)$. Allora $e^{is_0}\int_\gamma f(z)dz \in \mathbb{R}_+$ e si può argomentare come segue:

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)dz\right| &= \left|e^{is_0}\int_\gamma f(z)dz\right| = e^{is_0}\int_\gamma f(z)dz = Re\left(e^{is_0}\int_\gamma f(z)dz\right)\\ &= Re\left(e^{is_0}\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right) = \int_a^b Re\left(e^{is_0}f(\gamma(t))\gamma'(t)\right)dt\\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \leq \max_\gamma |f|L(\gamma).\end{aligned}$$

□

È utile avere una ulteriore nozione leggermente più generale di integrale. Cominciamo con una definizione. Sia $\mathcal{C}(A)$ l'insieme di tutte le curve $C^1$ a tratti con sostegno nell'aperto $A \subset \mathbb{C}$; una *catena* in $A$ è un'applicazione $\Gamma\colon \mathcal{C}(A) \to \mathbb{Z}$ tale che $\Gamma$ assume valore diverso da zero solo per un numero finito di curve. La struttura di gruppo additivo di $\mathbb{Z}$ induce, mediante la somma valore per valore, una operazione di somma per le catene con la quale l'insieme delle catene su un aperto risulta un gruppo abeliano. Se $\gamma\colon I \to A \subset \mathbb{C}$ è una curva $C^1$ a tratti, identificheremo $\gamma$ con l'unica catena su $A$ – che denoteremo ancora con $\gamma$ – che assume valore 1 su $\gamma$ e 0 su ogni altra curva in $\mathcal{C}(A)$.

Sia $\Gamma$ una catena su $A$ e siano $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \in \mathcal{C}(A)$ le uniche curve tali che $\Gamma(\gamma_j) = n_j \neq 0$. Allora la catena $\Gamma$ ha la rappresentazione (unica):

$$\Gamma = \sum_{j=1}^N n_j\gamma_j.$$

Se $\Gamma = \sum_{j=1}^N n_j\gamma_j$ è una catena su $A$ e $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua, l'integrale di $f$ lungo $\Gamma$ è defninto da

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^N n_j \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Se $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ sono catene, $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua, allora

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

Inoltre se $\Gamma = \sum_{j=1}^{N} n_j \gamma_j$ è una catena su $A$ e $f: A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua, allora dalla Proposizione 3.1.2 si ottiene:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{\cup_j \gamma_j} |f(z)| \sum_{j=1}^{N} |n_j| L(\gamma_j)$$

dove, come al solito, si identifica $\gamma_j$ con il suo sostegno.

**Esempio.** Sia $D \subset \mathbb{C}$ un aperto la cui frontiera $\partial D$ sia l'unione disgiunta di un numero finito di (immagini di) curve semplici chiuse regolari a tratti $\gamma_j: I_j \to \mathbb{C}$ per $j = 1, \ldots, N$. Se $\gamma_j(t) = x_j(t) + i y_j(t)$ per $t \in I_j$, allora nei punti dove $\gamma_j$ è regolare, il vettore $\gamma_j'(t) = x_j'(t) + i y_j'(t)$ è tangente alla curva e il vettore $n_j(t) = -y_j'(t) + i x_j'(t) = i\gamma'(t)$ è normale alla curva. Diremo che $\gamma_j$ è *positivamente orientata rispetto a* $D$ se per $t \in I_j$ dove $\gamma_j$ è di classe $C^1$ esiste $\epsilon > 0$ tale che se $0 < s < \epsilon$ allora $\gamma_j(t) + s n_j(t) \in D$. In parole povere $\gamma_j$ è positivamente orientata rispetto a $D$ se è orientata in modo che $D$ "giaccia a sinistra" del verso di percorrenza di $\gamma_j$. Si supponga che tutte le curve $\gamma_j$ siano positivamente orientate rispetto a $D$. La frontiera di $D$ si può allora considerare come una catena: $\partial D = \gamma_1 + \ldots + \gamma_N$. Per definizione chiameremo l'integrale lungo la catena $\partial D = \gamma_1 + \ldots + \gamma_N$ *integrale lungo la frontiera orientata di* $D$.

Concludiamo la sezione con le versioni dei teoremi di passaggio al limite e di derivazione sotto il segno d'integrale che utilizzeremo nel seguito. Per semplicità gli enunciati sono per integrali lungo curve ma è immediato ossevare che analoghi risultati valgono per integrali lungo catene e quindi, in particolare, lungo frontiere orientate di aperti.

Teorema 3.1.3: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f_n: A \to \mathbb{C}$ una succesione di funzioni continue uniformemente convergente sui compatti di $A$ a $f: A \to \mathbb{C}$. Se $\gamma: I \to A \subset \mathbb{C}$ è una curva $C^1$ a tratti, allora*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

*Dimostrazione*: Il risultato segue immediatamente osservando che

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} [f_n(z) - f(z)]\, dz \right| \leq \max_{\gamma} |f_n - f| L(\gamma).$$

□

Teorema 3.1.4: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto, $M \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma: I \to A \subset \mathbb{C}$ è una curva $C^1$ a tratti e $f: A \times M \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Allora*

*(i) La funzione $F(x) = \int_{\gamma} f(\zeta, x) d\zeta$ è continua.*

*(ii) Se $M$ è un aperto e esiste continua la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta, x)$ per ogni $\zeta \in \gamma(I)$, allora $F(x)$ ha derivata continua rispetto a $x_k$ e*

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta, x) d\zeta.$$

*(iii) Se $M$ è un aperto in $\mathbb{C}$ e per ogni $\zeta \in \gamma(I)$ la funzione $z \to f(\zeta, z)$ è olomorfa di classe $C^1$, allora $F$ è olomorfa su $M$ e*

$$F'(z) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, z) d\zeta.$$

*Dimostrazione*: (i) Sia $x_0 \in M$ un punto arbitrario e $x_n$ una successione di punti di $M$ convergente a $x_0$. L'enunciato segue subito dalla stima seguente:

$$|F(x_n) - F(x_0)| = \left| \int_\gamma [f(\zeta, x_n) - f(\zeta, x_0)]\, d\zeta \right| \le \max_{\zeta \in \gamma(I)} |f(\zeta, x_n) - f(\zeta, x_0)| L(\gamma).$$

(ii) Sia $x_0 \in M$ un punto arbitrario. Per $|h|$ sufficientemente piccolo sia $v_h = h\mathbf{e}_k$ dove $\mathbf{e}_k$ è il $k$-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Allora esiste $x_1$ compreso fra $x_0$ e $x_0 + v_h$ sul segmento che li congiunge tale che

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0 + v_h) - F(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \int_\gamma [f(\zeta, x_0 + v_h) - f(\zeta, x_0)]\, d\zeta \\ &= \frac{1}{h} \int_\gamma h \frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta, x_1) d\zeta = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta, x_1) d\zeta.\end{aligned}$$

Dato che $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta, x)$ è continua per ogni $\zeta \in \gamma(I)$, la tesi segue dal punto (i).

(iii) Applicando il punto (ii) si ottiene che $F$ è di classe $C^1$, e dato che $z \to f(\zeta, z)$ è olomorfa, derivando sotto il segno di integrale, si verifica che $F$ soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann e si calcola la derivata complessa. $\square$

**APPENDICE: Forme differenziali sul piano e loro integrali.**

L'integrazione lungo le curve di funzioni continue che abbiamo definito si colloca nel contesto più generale dell'integrazione delle forme differenziali. Anche per le applicazioni successive è utile ricapitolare le nozioni essenziali della teoria nel caso di $\mathbb{R}^2$ utilizzando notazioni compatibili con la teoria generale e con i nostri scopi.

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto. Una 0–*forma differenziabile* complessa di classe $C^k$, $k \ge 0$, su $A$ è semplicemente una funzione di classe $C^k$ su $A$. Denoteremo con $\Lambda^0_k(A)$ lo spazio di tutte le 0–forme differenziabili su $A$ di classe $C^k$. Scriveremo $\Lambda^0(A) = \Lambda^0_k(A)$ se non è importante sottolineare il grado di differenziabilità.

Sia $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle applicazioni $\mathbb{R}$–lineari su $\mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{C}$. Evidentemente $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ ha dimensione 4. Fissiamo una sua base nel modo seguente. Si considerino le seguenti applicazioni lineari:

$$\begin{array}{cccc} dx\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} & idx\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} & dy\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} & idy\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) \mapsto x & (x,y) \mapsto ix & (x,y) \mapsto y & (x,y) \mapsto iy. \end{array}$$

Si vede subito che sono linearmente indipendenti (come elementi dello spazio vettoriale reale $Hom(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$) e quindi $\{dx, idx, dy, idy\}$ è una base di $Hom(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$. D'altra parte $Hom(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ è anche uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbb{C}$. Se si considerano le applicazioni lineari

$$dz = dx + idy: \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \qquad\qquad d\overline{z} = dx - idy: \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C},$$

allora $\{dz, d\overline{z}\}$ è una base di $Hom(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Se $A \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto, data un'applicazione $\omega: A \to Hom(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ sono unicamente determinate quattro funzioni $P_1, P_2, Q_1, Q_2: A \to \mathbb{R}$ tali che per ogni $(x, y) \in A$ si ha

$$\begin{aligned}\omega(x, y) &= P_1(x, y)dx + iP_2(x, y)dx + Q_1(x, y)dy + iQ_2(x, y)dy\\ &= (P_1(x, y) + iP_2(x, y))dx + (Q_1(x, y) + iQ_2(x, y))dy\end{aligned}$$

Una 1–*forma differenziabile* complessa di classe $C^k$, $k \geq 0$, su un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ è un'applicazione $\omega: A \to Hom(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ di classe $C^k$ dove si intende che su $Hom(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ si considera la struttura differenziabile ottenuta, fissata la base $dx, idx, dy, idy$ mediante l'identificazione naturale con $\mathbb{R}^4$. In altre parole, la forma $\omega = (P_1 + iP_2)dx + (Q_1 + iQ_2)dy$ è una 1–*forma differenziabile* complessa di classe $C^k$ se e solo se le funzioni $P_1, P_2, Q_1, Q_2: A \to \mathbb{R}$ sono di classe $C^k$. Denoteremo con $\Lambda^1_k(A)$ lo spazio di tutte le 1–forme differenziabili su $A$ di classe $C^k$. Scriveremo $\Lambda^1(A) = \Lambda^1_k(A)$ se non è importante sottolineare il grado di differenziabilità.

È utile scrivere le 1-forme utilizzando notazioni complesse. Si considerino le applicazioni lineari reali

$$dz = dx + idy: \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \qquad\qquad d\overline{z} = dx - idy: \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}.$$

Sia

$$\omega = (P_1 + iP_2)dx + (Q_1 + iQ_2)dy$$

una 1–forma differenziabile complessa su un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Allora, posto $P = P_1 + iP_2$ e $Q = Q_1 + iQ_2$, se

$$M = \frac{1}{2}(P - iQ) \qquad\qquad N = \frac{1}{2}(P + iQ),$$

allora

$$\omega = Mdz + Nd\overline{z}.$$

Si consideri ora lo spazio $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ delle forme bilineari alternanti di $\mathbb{R}^2$ a valori complessi. Dunque $L \in \mathcal{A}$ se e solo se è bilineare e $L(v, w) = -L(w, v)$ per ogni $v, w \in \mathbb{R}^2$. La forma

$$dx \wedge dy: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$$

definita, per $v = a_1e_1 + a_2e_2$ e $w = b_1e_1 + b_2e_2$, da

$$dx \wedge dy(v, w) = det\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}$$

è evidentemente un elemento non nullo di $\mathcal{A}$. D'altra parte, se $\{e_1, e_2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$, per $L \in \mathcal{A}$, $v = a_1e_1 + a_2e_2$ e $w = b_1e_1 + b_2e_2$ si ha

$$L(v, w) = \sum_{i,j=1,2} L(e_i, e_j)a_ib_j = L(e_1, e_2)(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Dunque $L = L(e_1, e_2) dx \wedge dy$ e quindi possiamo concludere che $\mathcal{A}$ è uno spazio vettoriale di dimensione 1 su $\mathbb{C}$ generato dalla forma $dx \wedge dy$.

Una 2–*forma differenziabile* complessa di classe $C^k$, $k \geq 0$, su un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ è un'applicazione $\Omega: A \to \mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ di classe $C^k$ ossia tale che, se $\Omega = F dx \wedge dy$, la funzione $F: A \to \mathbb{C}$ è di classe $C^k$. Denoteremo con $\Lambda^2_k(A)$ lo spazio di tutte le 2–forme differenziabili su $A$ di classe $C^k$ e, anche in questo caso, scriveremo $\Lambda^2(A) = \Lambda^2_k(A)$ quando non è importante sottolineare il grado di differenziabilità.

Se $\alpha = M dx + N dy, \beta = P dx + Q dy \in \Lambda^1(A)$, il *prodotto esterno* di $\alpha$ e $\beta$ è definito da

$$\alpha \wedge \beta = (MQ - NP) dx \wedge dy = det \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix} dx \wedge dy.$$

In particolare abbiamo

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0 \ , \quad dy \wedge dx = -dx \wedge dy.$$

Si vede subito che il prodotto esterno definisce un'applicazione bilineare alternante $\wedge: \Lambda^1(A) \times \Lambda^1(A) \to \Lambda^2(A)$.

Anche per le 2–forme è conveniente l'espressione in termini di $dz$ e $d\overline{z}$. Basta osservare che

$$dz \wedge d\overline{z} = (dx + idy) \wedge (dx - idy) = -2idx \wedge dy.$$

Dunque se $\Omega = F dx \wedge dy$, allora $\Omega = C dz \wedge d\overline{z}$ dove $C = \frac{i}{2} F$.

Se $k \geq 1$, l'usuale differenziale definisce un'applicazione $d: \Lambda^0_k(A) \to \Lambda^1_{k-1}(A)$ tale che

$$d(f + g) = df + dg \ , \quad d(fg) = gdf + fdg.$$

Ricordiamo che:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}.$$

Un analogo operatore $d: \Lambda^1_k(A) \to \Lambda^2_{k-1}(A)$, chiamato ancora *differenziale*, si definisce richiedendo che:

$(i)$ $\quad d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta \qquad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^1(A)$

$(ii)$ $\quad d(f\alpha) = f d\alpha + df \wedge d\alpha \qquad \forall f \in \Lambda^0(A), \forall \alpha \in \Lambda^1(A)$

$(iii)$ $\quad d(df) = 0 \qquad \forall f \in \Lambda^0(A).$

Sia $\omega = P dx + Q dy \in \Lambda^1_k(A)$, se le proprietà $(i)$,$(ii)$,$(iii)$ sono soddisfatte si ha:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(P dx + Q dy) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \\ &\left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

D'altra parte se si definisce il differenziale di $\omega = Pdx + Qdy$ mediante (3.1.5) le proprietà richieste sono soddisfatte. Infine, se $\omega = Mdz + Nd\overline{z} \in \Lambda^1_k(A)$, allo stesso modo, si vede facilmente che deve essere

$$d\omega = \left(\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial \overline{z}}\right) dz \wedge d\overline{z}.$$

Una 1–forma $\omega = Pdx + Qdy = Mdz + Nd\overline{z} \in \Lambda^1_k(A)$, $k \geq 1$, si dice *esatta* se per qualche 0–forma $f \in \Lambda^0_{k+1}(A)$ (ossia funzione di classe $C^{k+1}$) si ha $\omega = df$. Questa condizione, vista la definizione di $\omega$ ovviamente equivale a $f_x = P$ e $f_y = Q$ oppure a $f_z = M$ e $f_{\overline{z}} = N$. Dato che per $f \in \Lambda^0_{k+1}(A)$ si ha $d(df) = 0$, condizione necessaria affinchè una 1–forma $\omega$ sia esatta, e che sia *chiusa* ossia vale $d\omega = 0$.

Passiamo ora a definire la nozione di integrazione di forme differenziali.

Sia $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2\colon [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ una curva $C^1$ a tratti e $\omega = Pdx + Qdy \in \Lambda^1(A)$ allora l'integrale di $\omega$ lungo $\gamma$ è definito da

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_a^b \{P(\gamma(t))\gamma_1'(t) + Q(\gamma(t))\gamma_2'(t)\} dt.$$

Dunque l'integrale di una funzione continua $f$ lungo $\gamma$ definito nel primo paragrafo di questo capitolo, non è altro che l'integrale secondo questa definizione della forma differenziale $fdz = f(dx + idy)$ lungo $\gamma$. Anche per forme differenziali è utile la nozione di integrale lungo una catena. Siano $\Gamma = \sum_{j=1}^N n_j\gamma_j$ una catena su $A$ e $\omega = Pdx + Qdy \in \Lambda^1(A)$. L'integrale di $\omega$ lungo $\Gamma$ è definto da

$$\int\limits_\Gamma \omega = \sum_{j=1}^N n_j \int\limits_{\gamma_j} \omega.$$

Evidentemente, con semplici adattamenti delle dimostrazioni, anche per gli integrali di 1–forme lungo curve vale l'indipendenza rispetto a cambi di parametrizzazione positivamente orientati e teoremi di passaggio al limite e di derivazione sotto il segno di integrale analoghi al Teorema 3.1.3 e al Teorema 3.1.4. Un risultato molto importante è il seguente

Teorema 3.1.5: (Lemma di Poincaré per 1–forme) *Una forma $\omega \in \Lambda^1_k(A)$, $k \geq 1$, è chiusa se e solo se è localmente esatta ossia per ogni punto $p \in A$ esiste un intorno $U_p$ tale che la restrizione di $\omega$ a $U_p$ è esatta su $U_p$.*

*Dimostrazione*: Se $\omega$ è localmente esatta ovviamente si ha $d\omega = 0$. Supponiamo che $\omega = Pdx + Qdy$ sia chiusa. Per ogni punto $p \in A$ sia $U_p$ un disco centrato in $p = x_0 + iy_0$ contenuto in $A$. Per $z = x + iy \in U_p$ si consideri la curva $\beta_z\colon [0,1] \to U_p$ definita da $\beta_z(t) = p + t(z - p)$. Si definisca

$$f(z) = \int_{\beta_z} \omega = \int_0^1 [(x - x_0)P(p + t(z - p)) + (y - y_0)Q(p + t(z - p))] dt$$

Dato che $\omega$ è chiusa, si deve avere $P_y = Q_x$ su $A$. Dunque derivando sotto il segno di integrale, sostituendo e integrando per parti, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(z) = & \int_0^1 P(p+t(z-p))dt \\
& \qquad + \int_0^1 [(x-x_0)\frac{\partial P}{\partial x}(p+t(z-p)) + (y-y_0)\frac{\partial Q}{\partial x}(p+t(z-p))]tdt \\
& = \int_0^1 P(p+t(z-p))dt \\
& \qquad + \int_0^1 [(x-x_0)\frac{\partial P}{\partial x}(p+t(z-p)) + (y-y_0)\frac{\partial P}{\partial y}(p+t(z-p))]tdt \\
& = \int_0^1 P(p+t(z-p))dt + \int_0^1 t\frac{dP(\beta_z)}{dt}(t)dt \\
& = \int_0^1 P(p+t(z-p))dt + [tP(\beta_z(t))]_0^1 - \int_0^1 P(p+t(z-p))dt \\
& = P(\beta_z(1)) = P(z).
\end{aligned}
$$

Allo stesso modo si prova che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = Q(z)$$

e questo completa la dimostrazione. $\square$

Affinchè ogni forma chiusa $\omega \in \Lambda^1_k(A)$ sia esatta su tutto $A$, occorre che l'aperto $A$ soddisfi delle ipotesi geometriche. Ad esempio se $A$ è un aperto stellato rispetto a un suo punto, la dimostrazione del 3.1.5 si può adattare banalmente per provare che ogni forma chiusa è anche esatta. In generale si dimostra che su un aperto $A$ ogni forma chiusa è esatta se e solo se $A$ è *semplicemente connesso*. Discuteremo questa condizione topologica più tardi.

Siano $\Omega = Fdx \wedge dy \in \Lambda^2(A)$ e $K \subset A$ un sottoinsieme compatto. Allora l'integrale di $\Omega$ su $K$ è definito da

$$\int\limits_K \Omega = \int\limits_K Fdxdy$$

dove l'integrale a destra è l'usuale integrale bidimensionale. Come è d'uso se $B$ è un sottoinsieme aperto di $A$ tale che la sua chiusura $\overline{B}$ è compatta e contenuta in $A$, si scriverà anche

$$\int\limits_B \Omega = \int\limits_{\overline{B}} \Omega.$$

Il risultato fondamentale che ci sarà utile in seguito, è il seguente caso particolare del Teorema di Stokes:

Teorema 3.1.6: (di Gauss-Green) *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato la cui frontiera $\partial D$ sia l'unione disgiunta di un numero finito di (immagini di) curve semplici chiuse* *regolari a tratti disgiunte. Sia* $\omega = Pdx + Qdy$ *una* 1*–forma di classe* $C^1$ *su un aperto che contiene* $\overline{D}$*. Allora*

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{D} d\omega = \int_{D} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \tag{3.1.6}$$

Non daremo dimostrazione di questo risultato che viene di regola dimostrato nei corsi di Analisi. Invece presentiamo la sua versione in termini di variabile complessa che ci sarà utile in seguito.

TEOREMA 3.1.7: *Sia* $A \subset \mathbb{C}$ *un aperto limitato tale che la frontiera* $\partial A$ *di* $A$ *sia unione disgiunta di un numero finito di curve semplici chiuse regolari a tratti disgiunte. Se* $f \in C^1(\overline{A})$ *è una funzione a valori complessi, allora*

$$\int_{\partial A} f(z)dz = 2i \int_{A} f_{\overline{z}}(z)\, dxdy. \tag{3.1.7}$$

*Dimostrazione*: Applicando il Teorema di Gauss-Green alla forma $\omega = fdz$, dato che si ha $d\omega = d(fdz) = f_{\overline{z}}\, d\overline{z} \wedge dz = 2if_{\overline{z}}\, dx \wedge dy$, allora

$$\int_{\partial A} f(z)dz = \int_{A} d(fdz) = \int_{A} f_{\overline{z}}\, d\overline{z} \wedge dz = 2i \int_{A} f_{\overline{z}}\, dx \wedge dy = 2i \int_{A} f_{\overline{z}}(z)\, dxdy.$$

$\square$

Come conseguenza otteniamo immediatamente una versione del cosiddetto Teorema integrale di Cauchy:

TEOREMA 3.1.8: *Sia* $A \subset \mathbb{C}$ *un aperto limitato tale che la frontiera* $\partial A$ *di* $A$ *sia unione disgiunta di un numero finito di curve semplici chiuse regolari a tratti. Se* $f \in C^1(\overline{A})$ *è olomorfa su* $A$*, allora,*

$$\int_{\partial A} f(z)dz = 0. \tag{3.1.8}$$

Senza fare ipotesi di regolarità per le funzioni olomorfe, questo risultato non è altrettanto semplice da ottenere. Nel prossimo paragrafo dimostreremo il teorema di Goursat, che per funzioni di classe $C^1$ è solo un caso speciale del Teorema 3.1.8, e che permette di dimostrare tutte le proprietà di regolarità per le funzioni olomorfe. In particolare sulla sua base riusciremo a provare che le funzioni olomorfe sono rappresentabili mediante formule integrali e che sono analitiche.

**Esercizi.**

**1.** Sia $K = \{z = x + iy \mid 1 <\mid x \mid< 2,\ \ 1 <\mid y \mid< 2\}$. Calcolare in due modi diversi $\displaystyle\int_{\partial K} Re(z)\, dz$.

**2.** Sia $A \in \mathbb{C}$ un aperto e siano $f$ una funzione di classe $C^\infty$ tale che $df \neq 0$ e $\Omega$ una 2-forma differenziale di classe $C^\infty$ definite su A. Dimostrare che esiste una una 1-forma differenziale $\theta$ di classe $C^\infty$ su $A$ tale che $\Omega = df \wedge \theta$. Trovare tutte le forme $\theta$ con questa proprietà. *Consiglio: Dato che $df \neq 0$ si ha $0 \neq |\nabla f|^2 = (f_x)^2 + (f_y)^2$. Allora dall'eguaglianza*

$$\frac{f_x}{|\nabla f|^2} f_x + \frac{f_y}{|\nabla f|^2} f_y = 1$$

*data $F$ di classe $C^\infty$ è facile trovare $P, Q$ di classe $C^\infty$ tali che $Qf_x - Pf_y = F$..... Inoltre se $\alpha$ è la differenza fra due soluzioni $\theta_0, \theta_1$ di $\Omega = df \wedge \theta$ allora $df \wedge \alpha = 0$. Dimostrare che $\alpha = gdf$ per qualche funzione $g$....*

**3.** Dimostrare che per $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ si ha $dz \wedge d\overline{z}(w_1, w_2) = 2iIm(w_1\overline{w_2})$.

**4.** Dimostrare che una forma $\omega = fdz$ di classe $C^1$ su un aperto $A \in \mathbb{C}$ è chiusa se e solo se $f$ è olomorfa su $A$.

**5.** Sia $f$ una funzione di classe $C^1$ su $\mathbb{C}$ che sia nulla nel complemento di un insieme compatto. Dimostrare che

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial f}{\partial z} dxdy = \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dxdy = 0.$$

## 3.2. I teoremi di Cauchy e Goursat.

Cominciamo introducendo la nozione di primitiva:

DEFINIZIONE 3.2.1: Sia $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Una *primitiva olomorfa* $F\colon A \to \mathbb{C}$ di $f$ è una funzione olomorfa tale che $F' = f$. Si dice che $f$ *ammette primitive olomorfe locali* in $A$, se per ogni $a \in A$ esiste un intorno aperto $U(a) \subset A$ tale che su $U(a)$ esiste una primitiva olomorfa di $f = f_{|U(a)}$.

**Osservazione.** Se $A \subset \mathbb{C}$ è un aperto connesso e $F_1, F_2\colon A \to \mathbb{C}$ sono primitive olomorfe della stessa funzione $f$, allora $F_1$ e $F_2$ differiscono per una costante.

Si vede subito che per una funzione di classe $C^1$ ammettere primitive olomorfe locali è equivalente a essere olomofa. Precisamente abbiamo la seguente

PROPOSIZIONE 3.2.1: *Sia $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione di classe $C^1$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
*(i) la funzione $f$ è olomorfa;*
*(iii) la funzione $f$ è soluzione dell'equazione di Cauchy-Riemann: $f_{\overline{z}} = 0$*
*(iii) la forma $\omega = fdz$ è chiusa;*
*(iv) la forma $\omega = fdz$ è localmente esatta;*
*(v) la funzione $f$ ammette primitive olomorfe locali.*

*Dimostrazione*: La prova è praticamente immediata. Infatti se $f$ è di classe $C^1$ allora è olomorfa se e solo se soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann $f_{\overline{z}} = 0$ su $A$. D'altra parte, dato che $d\omega = f_{\overline{z}} d\overline{z} \wedge dz$, questo succede se e solo se $\omega$ è chiusa. Per il Lemma di Poincaré questo equivale al fatto che $\omega$ sia localmente esatta. Infine quest'ultima affermazione equivale a $(v)$. infatti se per qualche funzione $F$ si ha $dF = F_z dz + F_{\overline{z}} d\overline{z} = \omega = fdz$ su qualche $U \subset A$, allora $F_{\overline{z}} = 0$ e quindi $F$ è una primitiva olomorfa di $f$ su $U$. Ovviamente se $f$ ammette primitive olomorfe locali, vale $(iv)$. □

D'altra parte nella definizione di funzione olomorfa non si richiede che la funzione sia di classe $C^1$. In effetti si può estendere la Proposizione 3.2.1 a funzioni olomorfe arbitrarie $f\colon A \to \mathbb{C}$ sostituendo l'ipotesi che la forma $\omega = fdz$ sia chiusa con una equivalente che abbia senso per forme continue e dimostrando che le funzioni olomorfe hanno automaticamente grandi proprietà di regolarità. In queste considerazioni risulta cruciale lo strumento dell'integrazione lungo curve chiuse. Cominciamo con alcune semplici osservazioni.

PROPOSIZIONE 3.2.2: *Sia $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione continua con primitiva olomorfa $F\colon A \to \mathbb{C}$. Se $\gamma\colon I \to A \subset \mathbb{C}$ è una curva $C^1$ a tratti con estremi $z_0 = \gamma(a)$ e $z_1 = \gamma(b)$, allora*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

*In particolare allora, se $\gamma$ è una curva chiusa*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

*Dimostrazione*: La dimostrazione, che è una semplice applicazione della definizione di integrale lungo una curva e del Teorema fondamentale del Calcolo Integrale, viene lasciata come esercizio al lettore. $\square$

**Esempi.** Se $n \geq 0$, per ogni costante $c \in \mathbb{C}$, la funzione $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c$ è primitiva olomorfa di $f(z) = z^n$ su $\mathbb{C}$. Segue che ogni polinomio in $z$ ha primitiva olomorfa su $\mathbb{C}$. Se $n < -1$ , per ogni costante $c \in \mathbb{C}$, la funzione $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c$ è primitiva olomorfa di $f(z) = z^n$ su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Invece dalla Proposizione 3.2.2 segue che la funzione $f(z) = z^{-1}$ non ha primitiva su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Vale il viceversa della Proposizione 3.2.2. Precisamente si ha

PROPOSIZIONE 3.2.3: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione continua tale che per ogni curva chiusa $C^1$ a tratti $\gamma\colon I \to A$ risulti $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Allora $f$ ha una primitiva olomorfa su $A$.*

*Dimostrazione*: Si fissi $a \in A$. Per ogni $z \in A$ si fissi una curva $C^1$ a tratti $\gamma_z$ in $A$ tale che $\gamma_z(0) = a$ e $\gamma_z(1) = z$. Definiamo $F\colon A \to \mathbb{C}$ mediante

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta.$$

Si osservi che, per l'ipotesi su $f$, il valore $F(z)$ non dipende dalla scelta della curva $\gamma_z$. Sia $w \in A$ arbitrario; per $z \in A$ sufficientemente vicino a $w$ il segmento che congiunge $w$ con $z$ è tutto contenuto in $A$. Indicheremo con $[w,z]\colon [0,1] \to A$ la parametrizzazione di tale segmento definita da $t \mapsto w + t(z-w)$. Si definisca $\gamma{=}\gamma_w[w,z]\gamma_z^{-1}$. Allora $\gamma$ è una curva chiusa $C^1$ a tratti e quindi

$$0 = \int_\gamma f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_w} f(\zeta)d\zeta + \int_{[w,z]} f(\zeta)d\zeta + \int_{\gamma_z^{-1}} f(\zeta)d\zeta = F(w) + \int_{[w,z]} f(\zeta)d\zeta - F(z).$$

Pertanto

$$F(z) - F(w) = \int_{[w,z]} f(\zeta)d\zeta = (z-w)\int_0^1 f(w + t(z-w))dt.$$

Dunque per $z \in A$ sufficientemente vicino a $w$ e $z \neq w$ abbiamo

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)-F(w)}{z-w} - f(w)\right| &= \left|\int_0^1 f(w+t(z-w))dt - \int_0^1 f(w)dt\right| \\ &\leq \int_0^1 |f(w+t(z-w)) - f(w)|\,dt \\ &\leq \max_{[0,1]} |f(w+t(z-w)) - f(w)|\,.\end{aligned}$$

Dato che

$$\lim_{z \to w} \max_{[0,1]} |f(w + t(z - w)) - f(w)| = 0,$$

segue che

$$\lim_{z \to w} \frac{F(z) - F(w)}{z - w} = f(w)$$

ossia che $F$ ha derivata complessa in $w$ e che $F'(w) = f(w)$. Per l'arbitrarietà di $w \in A$, la tesi segue.

□

Siano $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tre punti non allineati. Denoteremo con $\Delta = \Delta(z_0, z_1, z_2)$ il triangolo (orientato) chiuso di vertici $z_0, z_1, z_2$. Se si denota con $[z, w]$ il segmento orientato da $z$ a $w$, allora $\partial\Delta = \partial\Delta(z_0, z_1, z_2) = [z_0, z_1][z_1, z_2][z_2, z_0]$. Per domini convessi si può dare la seguente versione della Proposizione 3.2.3:

PROPOSIZIONE 3.2.4: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto convesso e $f: A \to \mathbb{C}$ una funzione continua tale che per ogni triangolo chiuso $\Delta \subset A$ risulti $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$. Allora $f$ ha una primitiva olomorfa su $A$.*

*Dimostrazione*: Sia $a \in A$. Dato che $A$ è convesso, per ogni $z \in A$ il segmento che congiunge $a$ a $z$ è contenuto in $A$. Se si sceglie $\gamma_z = [a, z]$ e si definisce

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(z)dz,$$

si ottiene la tesi ripetendo parola per parola la dimostrazione della Proposizione 3.2.3.

□

Dato che per ogni punto di un aperto esiste un intorno convesso tutto contenuto nell'aperto, come conseguenza immediata si ha la seguente parziale estensione della Proposizione 3.2.1:

COROLLARIO 3.2.5: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f: A \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Se per ogni triangolo chiuso $\Delta \subset A$ risulta $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ allora valgono le seguenti equivalenti affermazioni:*
*(i) la funzione $f$ ammette primitive olomorfe locali;*
*(ii) la forma $\omega = f dz$ è localmente esatta.*

Per completare l'estensione della Proposizione 3.2.1 il primo risultato cruciale è il seguente fondamentale:

TEOREMA 3.2.6: (Teorema di Goursat) *Sia $\Delta$ un triangolo chiuso in $\mathbb{C}$ e sia $f$ una funzione olomorfa in un aperto $U$ che contiene $\Delta$. Allora*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

*Dimostrazione*: Siano $z_0, z_1, z_2$ i vertici del triangolo $\Delta$ orientati in senso antiorario ossia in modo che il prodotto dei cammini $[z_0, z_1][z_1, z_2][z_2, z_0]$ sia il perimetro $\partial\Delta$ di $\Delta$ percorso in senso antiorario a partire dal vertice $z_0$. Siano $c_0, c_1, c_2$ i punti medi rispetivamente dei lati $[z_0, z_1], [z_1, z_2], [z_2, z_0]$. Congiungendo i punti $c_0, c_1, c_2$ si divide il triangolo $\Delta$ in quattro triangoli chiusi $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \Delta_1^4$. Ciascuno di questi triangoli è simile a $\Delta$ con fattore di similitudine uguale a $\frac{1}{2}$. Orientando positivamente la frontiera di questi triangoli rispetto al loro interno, si ha

$$\partial\Delta_1^1 = [z_0, c_0][c_0, c_2][c_2, z_0], \quad \partial\Delta_1^2 = [c_0, z_1][z_1, c_1][c_1, c_0]$$

$$\partial\Delta_1^3 = [c_1, z_2][z_2, c_2][c_2, c_1], \quad \partial\Delta_1^4 = [c_0, c_1][c_1, c_2][c_2, c_0].$$

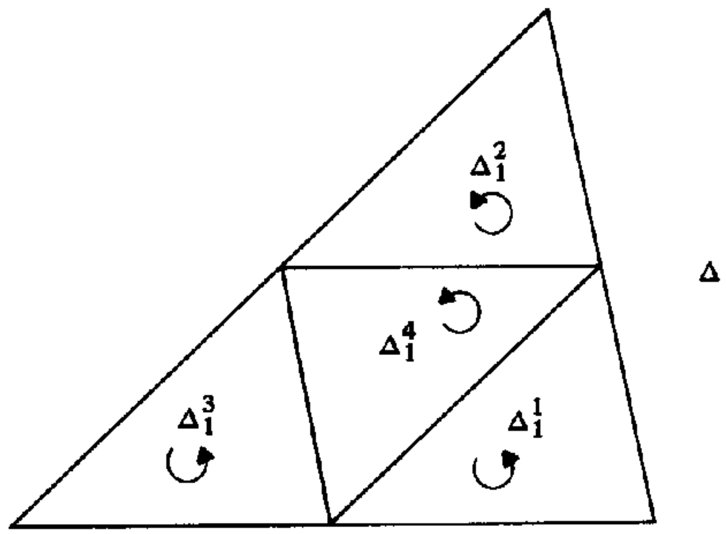


Fig. 3.1

Dunque da (3.1.3) e (3.1.4) segue allora che

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^k} f(z)dz$$

e quindi

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leq \sum_{k=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta_1^k} f(z)dz\right| \leq 4 \max_{k=1,\ldots,4} \left|\int_{\partial\Delta_1^k} f(z)dz\right|$$

Sia $\Delta_1$ il triangolo fra $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \Delta_1^4$ per il quale il modulo dell'integrale lungo il perimetro di $f$ sia massimo. Possiamo allora concludere che

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz\right|$$

L'argomento illustrato si può ovviamente iterare e si ottiene, per induzione, una successione di triangoli $\Delta_n$ con

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \ldots$$

e tali che per ogni $n \geq 0$ risulti:

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right|$$

e

$$L(\partial\Delta_n) = 2^{-1}L(\partial\Delta_{n-1}) = \ldots = 2^{-n}L(\partial\Delta).$$

Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} diam(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} diam(\Delta) = 0$$

e quindi per il Teorema di Cantor (vedi l'Appendice a questa sezione) per qualche $z_0 \in \Delta$ si ha

$$\bigcap_{n\geq 0} \Delta_n = \{z_0\}.$$

Si fissi $\epsilon > 0$ arbitrario. Dato che $f$ è olomorfa, esiste $\delta > 0$ tale che se $0 < |z - z_0| < \delta$ si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon$$

e quindi per $|z - z_0| < \delta$

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon |z - z_0|.$$

Sia $n$ grande abbastanza in modo che $diam(\Delta_n) < \delta$. La funzione affine definita da $z \to f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ ha primitiva olomorfa su $\mathbb{C}$ e quindi ha integrale nullo lungo $\partial\Delta_n$. Dunque

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| &= \left| \int_{\partial\Delta_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]dz \right| \leq \epsilon \int_{\partial\Delta_n} |z - z_0| dz \\ &\leq \epsilon \max_{\partial\Delta_n} |z - z_0| L(\partial\Delta_n) \leq \epsilon [L(\partial\Delta_n)]^2 = \epsilon 4^{-n} [L(\partial\Delta)]^2. \end{aligned}$$

e possiamo concludere

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| \leq 4^n \epsilon 4^{-n} [L(\partial\Delta)]^2 = \epsilon [L(\partial\Delta)]^2.$$

Per l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$ la tesi è dimostrata. □

Nelle applicazioni è utile la seguente versione (apparentemente più forte) del Teorema di Goursat 3.2.6:

Proposizione 3.2.7: *Siano $\Delta$ un triangolo chiuso in $\mathbb{C}$, $a \in \Delta$ e $U \supset \Delta$ un aperto. Se $f: U \to \mathbb{C}$ è una funzione continua su $U$ e olomorfa su $U \setminus \{a\}$, allora*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

*Dimostrazione*: Siano $z_0, z_1, z_2$ i vertici del triangolo $\Delta$.

**I Caso.** Il punto $a$ coincide con uno dei vertici di $\Delta$.

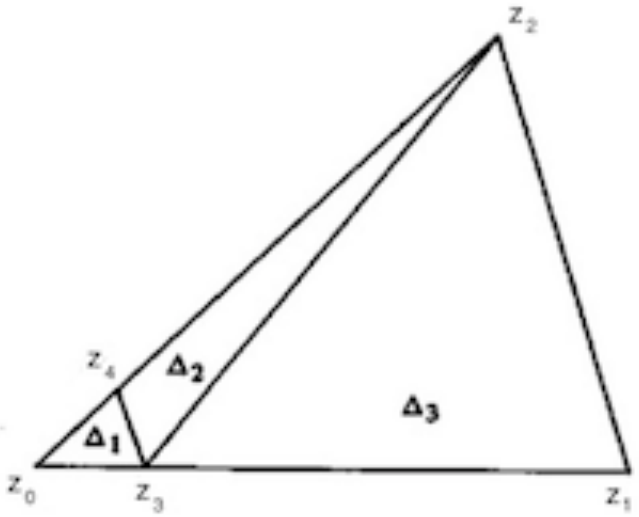


Fig. 3.2

Supponiamo ad esempio che $a = z_0$. Siano $z_3, z_4$ punti scelti rispettivamente sui segmenti $[z_0, z_1]$ e $[z_0, z_2]$ (esclusi gli estremi). Siano $\Delta_1$, $\Delta_2$ e $\Delta_3$ i triangoli chiusi rispettivamente di vertici $z_1, z_2, z_3$, $z_2, z_4, z_3$ e $z_0, z_3, z_4$. Allora

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| &= \left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)dz\right| \\ &= \left|\int_{\partial\Delta_3} f(z)dz\right| \leq \max_{\Delta_3} |f| L(\partial\Delta_3).\end{aligned}$$

Dato che per $z_3, z_4 \to z_0$ si ha $L(\partial\Delta_3) \to 0$, in questo caso, la tesi segue immediatamente.

**II Caso.** Il punto $a$ è interno a uno dei lati di $\Delta$.

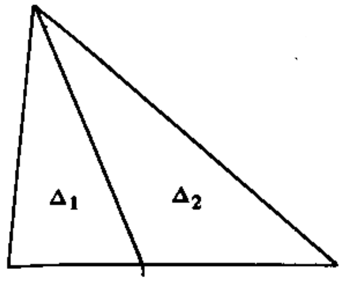


Fig. 3.3

Sia, ad esempio, $a \in [z_0, z_1]$. Se $\Delta_1$ e $\Delta_2$ sono i triangoli chiusi rispettivamente di vertici $z_0, a, z_2$ e $a, z_1, z_2$, allora

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz$$

e quindi la tesi segue applicando due volte il caso precedente.

**III Caso.** Il punto $a$ è interno al triangolo $\Delta$.

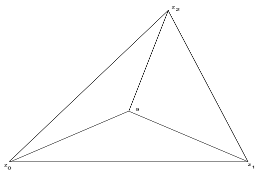

Fig. 3.4

Siano $\Delta_1$ il triangolo chiuso di vertici $z_0, z_1, a$, $\Delta_2$ il triangolo chiuso di vertici $a, z_1, z_2$ e $\Delta_3$ il triangolo chiuso di vertici $z_2, z_0, a$. Dato che

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)dz,$$

la tesi segue di nuovo dal primo caso.

$\square$

Come conseguenza, utilizzando la Proposizione 3.2.4 e il Corollario 3.2.5, otteniamo immediatamente

PROPOSIZIONE 3.2.8: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto convesso e $a \in A$. Se $f: A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua su $A$ ed olomorfa su $A \setminus \{a\}$, allora $f$ ha una primitiva olomorfa su $A$.*

COROLLARIO 3.2.9: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $M \subset A$ un insieme discreto. Se $f: A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua su $A$ ed olomorfa su $A \setminus M$, allora $f$ ammette primitive olomorfe locali in $A$.*

Abbiamo osservato già che la funzione $f(z) = \frac{1}{z}$ non ha primitive olomorfe su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. D'altra parte segue dal Corollario 3.2.9 che ammette primitive olomorfe locali.

Dalla Proposizione 3.2.8 e dalla Proposizione 3.2.2 segue una versione del Teorema integrale di Cauchy nel caso di domini convessi:

TEOREMA 3.2.10: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto convesso e $a \in A$. Se $f: A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua su $A$ ed olomorfa su $A \setminus \{a\}$, allora, per ogni curva $C^1$ a tratti chiusa $\gamma: I \to A$ si ha*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Osservazione 3.2.11: Si può dimostrare facilmente (esercizio!) che se $A$ è un aperto, $M$ una suo sottoinsieme discreto e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione continua e olomorfa su $A \setminus M$, allora, per ogni triangolo chiuso $\Delta \subset A$ risulta

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Infatti, dato che $M$ è discreto, l'insieme $\Delta \cap M$ è un insieme finito e quindi, in modo simile a quanto fatto nella dimostrazione della Proposizione 3.2.7, si può decomporre in un'unione finita di triangoli chiusi ciascuno dei quali intersechi al più in un punto $\Delta \cap M$ e siano a due a due disgiunti o hanno un lato in comune o hanno un vertice in comune. L'integrale lungo $\partial\Delta$ di $f$ è la somma degli integrali lungo le frontieria dei triangoli ottenuti in questo modo e ciascuno di questi, per la Proposizione 3.2.7 è nullo. Grazie a questa osservazione, segue immediatamente che, se $A \subset \mathbb{C}$ è un aperto convesso, $M \subset A$ un insieme discreto e $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua su $A$ ed olomorfa su $A \setminus M$, allora $f$ ammette primitiva olomorfa su $A$.

Il Teorema 3.2.10 permette di provare la seguente della formula di Cauchy per i dischi:

Teorema 3.2.12: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se $z_0 \in A$ e $\overline{\mathbb{D}} = \overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subset A$, per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{3.2.1}$$

*Dimostrazione*: Dato che $\overline{\mathbb{D}} \subset A$, esiste $\epsilon > 0$ tale che $\overline{\mathbb{D}} \subset U = \mathbb{D}(z_0, r + \epsilon) \subset A$. Per $\zeta \in U$ si definisca:

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{se } \zeta \neq z \\ f'(\zeta) & \text{se } \zeta = z \end{cases}.$$

Allora la funzione $g$ è continua su $U$ e olomorfa su $U \setminus \{z\}$. Allora per il Teorema di Cauchy 3.2.10 abbiamo

$$0 = \int\limits_{\partial\mathbb{D}} g(\zeta)d\zeta = \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Rimane allora da dimostrare che $\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$.

Per $z \in \mathbb{D}$, sia $h(z) = \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$. Allora il calcolo diretto prova che $h(z_0) = 2\pi i$. Inoltre dal Teorema 3.1.4 segue che $h$ è olomorfa in $\mathbb{D}$ e

$$h'(z) = \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \tag{3.2.2}$$

Dato che, in un intorno aperto di $\partial\mathbb{D}$, la funzione $l(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - z)^2}$ ha primitiva olomorfa $L(\zeta) = -\frac{1}{\zeta - z}$, l'integrale in (3.2.2) è nullo e quindi $h'(z) = 0$. Dato che $D$ è connesso, allora $h(z) = 2\pi i$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. □

Utilizzando la formula di Cauchy e derivando sotto il segno d'integrale, possiamo concludere

Teorema 3.2.13: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora $f \in C^\infty(A)$, tutte le derivate di $f$ sono funzioni olomorfe e, se $z_0 \in A$ e $\overline{\mathbb{D}} = \overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subset A$, per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha:*

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \tag{3.2.3}$$

*Dimostrazione*: Il risultato si dimostra applicando il Teorema 3.1.4 a (3.2.1). □

Dato che la derivata di una funzione olomorfa è una funzione olomorfa, possiamo finalmente enunciare l'estensione a funzioni continue della Proposizione 3.2.1:

Teorema 3.2.14: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
*(i) $f$ è olomorfa;*
*(ii) per ogni triangolo chiuso $\Delta \subset A$ risulta $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$;*
*(iii) la forma $\omega = f dz$ è localmente esatta;*
*(iv) la funzione $f$ ammette primitive olomorfe locali in $A$.*
*(v) la funzione $f$ è di classe $C^\infty$ e soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann: $f_{\overline{z}} = 0$*
*(vi) se $D \subset A$ è un aperto con $\overline{D} \subset A$ e frontiera $\partial D$ di $D$ unione disgiunta di un numero finito di curve semplici chiuse regolari a tratti, allora $\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$.*

*Dimostrazione*: La dimostrazione a questo punto è immediata. Il fatto che $(i) \Longrightarrow (ii)$ è il teorema di Goursat; nel Corollario 3.2.5 abbiamo osservato che $(ii)$ implica le due affermazioni equivalenti $(iii)$ e $(iv)$; se vale $(iv)$ la funzione $f$, nell'intorno di ogni punto, è la derivata di una funzione olomorfa ed è quindi olomorfa su $A$ per il Teorema 3.2.13. Dunque le affermazioni $(i)$, $(ii)$, $(iii)$ e $(iv)$ sono equivalenti. Nel Teorema 3.2.13 si è dimostrato che se $f$ è olomorfa allora è di classe $C^\infty$ e quindi vale $(v)$. Per il Teorema 3.1.8 si ha che $(v) \Longrightarrow (vi)$ e quindi, dato che evidentemente $(vi) \Longrightarrow (ii)$, abbiamo concluso. □

L'implicazione $(ii) \Longrightarrow (i)$ è nota in letteratura come Teorema di Morera ed è molto utile nelle applicazioni. Ne illustreremo una al termine di questo paragrafo. Presentiamo ora alcuni esempi che appartengono a una classe di risultati che vengono chiamati in letteratura di "rimovibilità di singolarità" per funzioni olomorfe. Il primo, molto semplice, di fatto l'abbiamo già dimostrato. Lo enunciamo perchè ci sarà comodo dopo:

Proposizione 3.2.15: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $M \subset A$ un insieme discreto. Se una funzione continua $f\colon A \to \mathbb{C}$ è olomorfa su $A \setminus M$, allora $f$ è olomorfa su $A$.*

*Dimostrazione*: Anche in questo caso, si osservi che una funzione che soddisfa l'ipotesi ha primitive olomorfe locali in $A$. □

Possiamo ora dimostrare l'importante Teorema di Estensione di Riemann:

Teorema 3.2.16: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $z_0 \in A$. Sia $f: A \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa limitata su $\mathbb{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Allora esiste una funzione olomorfa $\hat{f}: A \to \mathbb{C}$ tale che $\hat{f}_{|A\setminus\{z_0\}} = f$.*

*Dimostrazione*: Per $z \in A$ si definisca

$$F(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & \text{se } z \neq z_0 \\ 0 & \text{se } z = z_0 \end{cases}.$$

Allora $F$ è continua su $A$ e olomorfa su $A\setminus\{z_0\}$ e quindi è olomorfa su $A$. Si definisca per $z \in A$

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} & \text{se } z \neq z_0 \\ F'(z_0) & \text{se } z = z_0 \end{cases}.$$

Allora $\hat{f}$ è continua su $A$ e olomorfa su $A \setminus \{z_0\}$ e quindi è olomorfa su $A$. D'altra parte $\hat{f}_{|A\setminus\{z_0\}} = f$. □

Nella situazione del Teorema di Estensione di Riemann 3.2.16, il punto $z_0$ si dice *singolarità removibile* per $f$.

Concludiamo il paragrafo con due altri risultati di estensione per funzioni olomorfe. Cominciamo con risultato di rimovibilità di singolarità nel caso di funzioni continue:

Teorema 3.2.17: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $\beta: I \to A$ una curva semplice $C^1$ regolare, ossia con $\beta'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$. Sia $f$ una funzione continua su $A$ e olomorfa $A \setminus \beta(I)$. Allora*
- *(i) Per ogni triangolo chiuso $\Delta$ contenuto in $A$ con un lato contenuto in $L$, si ha $\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = 0$.*
- *(ii) La funzione $f$ è olomorfa su $A$.*

*Dimostrazione*: (i) La funzione $f$ è continua su $A$ e quindi uniformemente continua sul compatto $\Delta \subset A$. Sia inoltre $M = \max_{\Delta} |f|$. Inoltre, dato che $\beta'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$, si ha che per ogni $t_0 \in I$, esiste un intorno $U$ di $z_0 = \beta(t_0)$ tale che $U \cap \beta(I)$ è o il grafico di una funzione $Imz = h(Rez)$ oppure di una funzione $Rez = g(Imz)$. Infatti, evidenziando mediante $\beta(t) = \beta_1(t) + i\beta_2(t)$ la parte reale e la parte immaginaria di $\gamma(t)$, se $\beta'(t_0) \neq 0$, allora vale almeno uno fra $\beta_1(t) \neq 0$ e $\beta_2(t) \neq 0$ se $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, per qualche $\delta > 0$. Se $\beta_1(t) \neq 0$ per $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, allora, a meno di prendere $\delta > 0$ un po' più piccolo si può supporre che $\beta_1$ ha inversa di classe $C^1$ su $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Se $h = \beta_2 \circ \beta_1^{-1}$, allora l'immagine mediante $\beta$ dell'intervallo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ è il grafico della funzione $Imz = h(Rez)$ sull'intervallo $(\beta_1(t_0 - \delta), \beta_1(t_0 + \delta))$. Sfruttando questo fatto, dato un triangolo $\Delta \subset A$, si possono scegliere un numero finito di punti di $\Delta$, che chiameremo vertici, che, congiunti con segmenti segmenti di retta o con segmenti della curva $\beta$ che chiameremo lati, decompongono $\Delta$ in un numero finito di chiusi $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ con queste proprietà (vedi Fig. 3.5):

(1) per ogni $j = 1, \ldots, N$ o $\Delta_j$ è un triangolo o è la chiusura di un aperto tale che $\partial\Delta_j$ è una curva $C^1$ a tratti ottenuta componendo due segmenti di retta e un segmento della curva $\beta$;

(2) se $i, j = 1, \ldots, N$, allora $\Delta_i \cap \Delta_j$ o è vuoto, o è un vertice – ossia punto di congiunzione di due dei lati che compongono le loro frontiere – o è uno dei lati che compongono le loro frontiere;

(3) per ogni $j = 1, \ldots, N$ o $\Delta_j$ non interseca il sostegno della curva $\beta$ o l'intersezione è uno dei vertici di $\Delta_j$ o è uno dei tre segmenti che compongono la frontiera $\partial\Delta_j$;

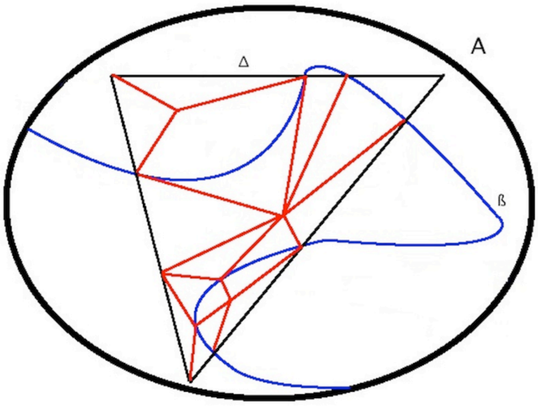


Fig. 3.5

Integrando utilizzando le orientazioni canoniche delle frontiere, abbiamo allora che

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^{N} \int_{\partial\Delta_j} f(\zeta) d\zeta.$$

Per gli indici $j = 1, \ldots, N$ tali che $\partial\Delta_j$ non interseca il sostegno di $\beta$ o lo interseca solo in vertici, si ha $\int_{\partial\Delta_j} f(\zeta)d\zeta = 0$. Dunque per dimostrare la tesi, è sufficiente provare che $\int_{\partial\Delta_j} f(\zeta)d\zeta = 0$ nel caso in cui $\partial\Delta_j$ interseca il sostegno di $\beta$ in un segmento di curva. Possiamo limitarci a considerare la seguente situazione. Siano $z_0, z_1, z_2 \in A$ punti distinti tali che $z_0 = \beta(t_0), z_1 = \beta(t_1) \in \beta(I)$, per $t_0 < t_1$, $z_2 \notin \beta(I)$ tali che i segmenti $[z_1, z_2], [z_2, z_0]$ siano contenuti in $A$ e, l'interno del chiuso $\Delta$ con frontiera orientata $\partial\Delta = \beta_{|[t_0,t_1]}[z_1, z_2][z_2, z_0]$ non interseca il sostegno di $\beta$ (vedi Fig. 3.6).

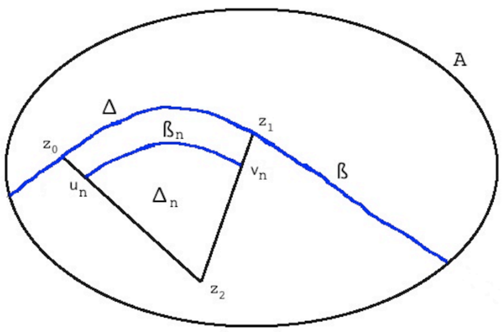


Fig. 3.6

Dimostriamo che $\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = 0$. A tal fine, è comodo – e non restrittivo – supporre che $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$. Denoteremo con $\beta_\infty\colon [0,1] \to A$ la restizione di $\beta$ all'intervallo $[t_0, t_1] = [0, 1]$ cosicché, in particolare, $z_0 = \beta_\infty(0), z_1 = \beta_\infty(1)$. Inoltre per ogni intero $n \geq 2$ definiamo $\beta_n : [0,1] \to A$ mediante:

$$\beta_n(t) = \beta_\infty(t) + \frac{1}{n}(z_2 - \beta_\infty(t)).$$

Siano $u_n = \beta_n(0)$ e $v_n = \beta_n(0)$ e denotiamo $\Delta_n$ il chiuso che per frontiera orientata $\partial\Delta_n = \beta_n[v_n, z_2][z_2, u_n]$. Dato che $\Delta_n$ non interseca il sostegno di $\beta$, allora $\int\limits_{\partial\Delta_n} f(\zeta)d\zeta = 0$ per ogni $n \geq 1$ e quindi

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = \int\limits_{\beta_\infty} f(\zeta)d\zeta + \int\limits_{[z_1,v_n]} f(\zeta)d\zeta - \int\limits_{\beta_n} f(\zeta)d\zeta + \int\limits_{[u_n,z_0]} f(\zeta)d\zeta.$$

Si fissi $\epsilon > 0$ arbitrario. Allora se $n > N_1 = \max\left\{\frac{4M|z_1-z_0|}{\epsilon}, \frac{4M|z_2-z_0|}{\epsilon}\right\}$

$$\left|\int\limits_{[z_1,v_n]} f(\zeta)d\zeta\right| \leq M\frac{|z_1 - z_0|}{n} < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{e} \quad \left|\int\limits_{[u_n,z_0]} f(\zeta)d\zeta\right| \leq M\frac{|z_2 - z_0|}{n} < \frac{\epsilon}{4}.$$

Abbiamo inoltre

$$\begin{aligned}
&\left|\int\limits_{\beta_\infty} f(\zeta)d\zeta - \int\limits_{\beta_n} f(\zeta)d\zeta\right| \\
&= \left|\int\limits_0^1 f(\beta_\infty(t))\beta'_\infty(t)dt - \int\limits_0^1 f\left(\beta_\infty(t) + \frac{1}{n}(z_2 - \beta_\infty(t))\right)\beta'_\infty(t)(1 - \frac{1}{n})dt\right|. \\
&\leq \left|\int\limits_0^1 \left[f(\beta_\infty(t)) - f\left(\beta_\infty(t) + \frac{1}{n}(z_2 - \beta_\infty(t))\right)\right]\beta'_\infty(t)dt\right| \\
&\quad + \frac{1}{n}\left|\int\limits_0^1 f\left(\beta_\infty(t) + \frac{1}{n}(z_2 - \beta_\infty(t))\right)\beta'_\infty(t)dt\right|.
\end{aligned}$$

Per $n > N_2 = \frac{4M}{\epsilon}L(\beta_\infty)$

$$\left|\frac{1}{n}\int\limits_0^1 f(\beta_\infty(t) + \frac{1}{n}(z_2 - \beta_\infty(t)))\beta'_\infty(t)dt\right| \leq \frac{M}{n}L(\beta_\infty) < \frac{\epsilon}{4}.$$

D'altra parte, per l'uniforme continuità di $f$ su $\Delta$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta$ tale che per $a, b \in \Delta$ con $|a - b| < \delta$ si ha $|f(a) - f(b)| < \frac{\epsilon}{4L(\beta_\infty)}$. Dato che, per $n > N_3 = \frac{Diam(\Delta)}{\delta}$, si ha

$$\frac{|(z_2 - \beta_\infty(t))|}{n} < \delta$$

allora $|f(\beta_\infty(t)) - f\left(\beta_\infty(t) + \frac{1}{n}(z_2 - \beta_\infty(t))\right)| < \frac{\epsilon}{4L(\beta_\infty)}$ e quindi, di conseguenza,

$$\left|\int\limits_0^1 \left[f(\beta_\infty) - f\left(\beta_\infty(t) + \frac{1}{n}(z_2 - \beta_\infty(t))\right)\right]\beta'_\infty(t)dt\right| < \frac{\epsilon}{4}$$

per $n > N_3 = \frac{Diam(\Delta)}{\delta}$.

Riassumendo allora, per $n > \max\{N_1, N_2 N_3\}$, si ha

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta\right| \leq \left|\int_{\beta_\infty} f(\zeta)d\zeta - \int_{\beta_n} f(\zeta)d\zeta\right| + \left|\int_{[z_1,v_n]} f(\zeta)d\zeta\right| + \left|\int_{[u_n,z_0]} f(\zeta)d\zeta\right|$$
$$< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$, possiamo concludere che $\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = 0$ come desiderato. Il punto (ii) segue immediatamente dal Teorema di Morera e dal punto (i). $\square$

Si osservi che, a differenza del Teorema di Estensione di Riemann, nel Teorema 3.2.17 si assume – e si usa in modo cruciale – il fatto che la funzione $f$ è continua su tutto l'aperto $A$. Per l'applicazione che presentiamo subito dopo serve la seguente immediata conseguenza del Teorema 3.2.17:

COROLLARIO 3.2.18: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $L$ una retta in $\mathbb{C}$. Sia $f$ una funzione continua su $A$ e olomorfa $A \setminus L$. Allora la funzione $f$ è olomorfa su $A$.*

E ora, come applicazione, un classico risultato di estensione:

TEOREMA 3.2.19: (Principio di riflessione di Schwarz) *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto simmetrico rispetto all'asse reale ossia tale che se $z \in A$ allora $\overline{z} \in A$. Sia $f$ una funzione continua su $\{z \in A \mid Im\,(z) \geq 0\}$, olomorfa su $\{z \in A \mid Im\,(z) > 0\}$ e che assume valori reali su $\{z \in A \mid Im\,(z) = 0\}$. Dimostrare che la funzione $\hat{f}\colon A \to \mathbb{C}$ definita da*

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) \text{ se } Im\,(z) \geq 0 \\ \\ \overline{f(\overline{z})} \text{ se } Im\,(z) \leq 0 \end{cases}$$

*è olomorfa su $A$.*

*Dimostrazione*: La funzione $\hat{f}(z)$ è continua dato che, è ben definita ed è continua su $A^+ = \{z \in A \mid Im\,(z) \geq 0\}$ e su $A^- = \{z \in A \mid Im\,(z) \leq 0\}$ che sono due chiusi di $A$ la cui unione è $A$. Il fatto che $\hat{f}(z)$ è olomorfa è allora conseguenza del Lemma 3.2.18. Infatti $\hat{f}(z)$ è olomorfa su $A^+ \setminus \mathbb{R}$ per ipotesi ed è olomorfa su $A^- \setminus \mathbb{R}$ dato che ivi è di classe $C^1$ e soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann (i semplici dettagli sono lasciati al lettore). $\square$

## APPENDICE

Per la dimostrazione del Teorema di Goursat 3.2.6, è necessario il seguente Teorema di Cantor:

TEOREMA 3.2.20: *Uno spazio metrico* $(X, d)$ *è completo se e solo se per ogni successione di chiusi non vuoti* $\{F_n\}_{n\geq 0}$ *con* $F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$ *esiste* $x \in X$ *tale che si abbia*

$$\bigcap_{n\geq 0} F_n = \{x\}.$$

*Dimostrazione*: Supponiamo che $(X, d)$ sia uno spazio metrico completo. Se $\{F_n\}_{n\geq 0}$ è una successione di chiusi non vuoti con $F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$ e $\lim\limits_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$, si scelga $x_n \in F_n$ per ogni $n \geq 0$. Dato che se $n, m \geq N$ si ha $x_m, x_n \in F_N$, allora

$$0 \leq \lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) \leq \lim_{N\to\infty} diam(F_N) = 0$$

e quindi la successione $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy. Dunque esiste

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X.$$

Dato che per ogni $N$ se $n \geq N$ si ha $x_n \in F_n \subset F_N$ e $F_N$ è chiuso, allora $x \in F_N$ per ogni $N$ e quindi $x \in \bigcap_{N\geq 0} F_N$. Se infine $x' \in \bigcap_{n\geq 0} F_n$, allora per ogni $n$ si ha $x, x' \in F_n$ e $0 \leq d(x, x') \leq diam(F_n) \to 0$ da cui segue che $d(x, x') = 0$.

Supponiamo viceversa che per ogni successione di chiusi non vuoti $\{F_n\}_{n\geq 0}$ con $F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$ e $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$ esista $x \in X$ tale che si abbia

$$\bigcap_{n\geq 0} F_n = \{x\}$$

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy. Per ogni $n$ si definisca $F_n = \overline{\{x_k\}_{k\geq n}}$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N$ tale che se $m, n > N$ si ha $d(x_m, x_n) < \epsilon$ e quindi se $n > N$ si ha $diam(F_n) = diam(\{x_k\}_{k\geq n}) < \epsilon$ e quindi $diam(F_n) \to 0$ per $n \to \infty$. Dato che per costruzione $F_n \supset F_{n+1}$ per ogni $n$, allora $\bigcap_{n\geq 0} F_n = \{x\}$ per qualche $x \in X$. Dato che $x \in F_n$ per ogni $n$ allora $d(x, x_n) \leq diam(F_n) \to 0$. $\square$

**Esercizi.**

**1.** Sia $f$ una funzione olomorfa in un aperto contente un disco chiuso $\overline{\mathbb{D}}$. Calcolare $\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ per $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. *Consiglio: La funzione* $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ *è olomorfa su un disco* $A$ *che contiene* $\overline{\mathbb{D}}$ *e non contiene* $z$. *Allora per il Teorema 3.2.10....*

**2.** Dimostrare che una funzione continua $f$ è olomorfa su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ se e solo se per ogni rettangolo chiuso $R \subset A$ si ha $\int\limits_{\partial R} f(z)dz = 0$. *Consiglio: la parte cruciale è dimostrare che se l'integrale sulla frontiera di un qualunque rettangolo in $A$ è zero, allora la funzione ha primitive olomorfe locali. Questo si dimostra come nelle Proposizione 3.2.2 e Proposizione 3.2.4 osservando che in un disco si possono sempre congiungere due punti mediante spezzate composte di segmenti paralleli agli assi reale e immaginario.*

**3.** Fornire i dettagli della dimostrazione delle affermazioni contenute nell'Osservazione 3.2.11

**4.** Si diano i dettagli necessari per provare che esiste una decomposizione di $\Delta$ come richiesto nella dimostrazione del Teorema 3.2.17.

**5.** Fornire i dettagli mancanti alla dimostrazione del Teorema 3.2.19.

**6.** Dimostrare la seguente variante del Principio di riflessione di Schwarz: Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto simmetrico rispetto all'asse reale ossia tale che se $z \in A$ allora $\overline{z} \in A$. Sia $f$ una funzione continua non nulla su $\{z \in A \mid Im\,(z) \geq 0\}$, olomorfa su $\{z \in A \mid Im\,(z) > 0\}$ e tale che se $z \in \{z \in A \mid Im\,(z) = 0\}$ si ha $|f(z)| = 1$. Allora la funzione $\hat{f}\colon A \to \mathbb{C}$ definita da

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) \text{ se } Im\,(z) \geq 0 \\ \\ \frac{1}{\overline{f(\overline{z})}} \text{ se } Im\,(z) \leq 0 \end{cases}$$

è olomorfa su $A$.

**7.** Dimostrare questa ulteriore variante del Principio di riflessione di Schwarz: Sia $f$ una funzione continua sulla chiusura disco unitario $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ olomorfa sul disco $\mathbb{D}$ e tale che per ogni $z \in \partial\mathbb{D}$ risulti $|f(z)| = 1$. Allora esiste un aperto $A \subset \mathbb{C}$ contenente $\overline{\mathbb{D}}$ e una funzione olomorfa $\hat{f}\colon A \to \mathbb{C}$ che estende $f$ ossia tale che $\hat{f}(z) = f(z)$ per ogni $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

## 3.3. Sviluppi in serie e prolungamento analitico.

In questo paragrafo dimostreremo che ogni funzione olomorfa di può sviluppare localmente in serie di potenze e trarremo da questo fatto alcune immediate conseguenze.

Cominciamo esaminando da vicino il nucleo integrale $\frac{1}{\zeta - z}$ che compare nell'integrale di Cauchy. Fissato $z_0$, per qualche $r > 0$, siano $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$ e $\zeta \in \partial\mathbb{D}(z_0, r)$. Si ha allora,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \frac{1}{\zeta - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Se $f$ è una funzione olomorfa su un aperto contenente $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$ allora

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \tag{3.3.1}$$

dove, dato che $f$ è limitata su $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$ e $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$, la convergenza in (3.3.1) è uniforme sul compatto $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$. Allora utilizzando la formula di Cauchy e scambiando serie e integrale si ha

$$\begin{aligned} f(z) =& \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right] d\zeta \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Posto allora

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

si ha per $|z - z_0| < r$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{3.3.2}$$

e, per il Lemma di Abel, la serie (3.3.2) ha raggio di convergenza $\geq r$. Riassumendo abbiamo dimostrato il seguente

TEOREMA 3.3.1: *Sia $f$ una funzione olomorfa su un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Se $z_0 \in A$ e $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subset A$, allora*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{3.3.3}$$

*dove*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

*e il raggio di convergenza di (3.3.3) è $\geq r$.*

Grazie al teorema 3.3.1 possiamo concludere la seguente caratterizzazione delle funzioni olomorfe che mette insieme tutte i risultati che abbiamo ottenuto:

Teorema 3.3.2: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f: A \to \mathbb{C}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti*
*(i)* $f$ *è olomorfa su* $A$;
*(ii) per ogni triangolo chiuso* $\Delta \subset A$ *risulta* $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$;
*(iii)* $f$ *ammette primitive olomorfe locali in* $A$;
*(iv)* $f$ *è analitica complessa su* $A$;
*(v)* $f$ *è di classe* $C^1$ *e soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann su* $A$.
*(vi) se* $D \subset A$ *è un aperto con* $\overline{D} \subset A$ *e frontiera* $\partial D$ *di* $D$ *unione disgiunta di un numero finito di curve semplici chiuse regolari a tratti, allora* $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$.

Concludiamo il paragrafo con una importante conseguenza del Teorema 3.3.1.

Definizione 3.3.1: Sia $f: A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Si dice che $f$ ha uno *zero di ordine* $n > 0$ (oppure che ha *molteplicità* $n > 0$) in $a \in A$ se

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ e } f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Diremo che $f$ ha uno *zero di ordine* $\infty$ in $a \in A$ se $f^{(n)}(a) = 0$ per ogni $n$.

Teorema 3.3.3: *Sia* $f: A \to \mathbb{C}$ *una funzione olomorfa. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
*(i)* $f$ *ha uno zero di ordine* $n$ *in* $a \in A$;
*(ii) se* $\mathbb{D}(a, r) \subset A$ *e* $z \in \mathbb{D}(a, r)$, *allora* $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^k$ *e* $a_n \neq 0$;
*(iii) esiste una funzione olomorfa* $g: A \to \mathbb{C}$ *tale che* $g(a) \neq 0$ *e* $f(z) = (z-a)^n g(z)$ *per ogni* $z \in A$.

*Dimostrazione*: Esercizio! □

E' molto semplice dimostrare che due polinomi di una variabile complessa sono uguali se e solo se assumono lo stesso valore in un numero abbastanza grande (finito!) di punti oppure se e solo se in un punto hanno le derivate, fino a un ordine sufficientemente alto, coincidenti. Questa proprietà si può opportunamente estendere alle funzioni olomorfe. Abbiamo il seguente importante risultato come *Principio del Prolungamento Analitico*:

Teorema 3.3.4: *Sia* $A \subset \mathbb{C}$ *un aperto connesso e* $f, g$ *due funzioni olomorfe su* $A$. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
*(i)* $f(z) = g(z)$ *per ogni* $z \in A$;
*(ii) esiste* $a \in A$ *tale che* $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ *per ogni* $n$;
*(iii) esiste un sottoinsieme* $N \subset A$ *con un punto d'accumulazione* $a \in A$ *tale che* $f(z) = g(z)$ *per ogni* $z \in N$.

Dimostreremo la seguente formulazione equivalente del Teorema 3.3.4:

Teorema 3.3.5: *Sia* $A \subset \mathbb{C}$ *un aperto connesso e* $f$ *una funzione olomorfa su* $A$. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
*(i)* $f(z) = 0$ *per ogni* $z \in A$;
*(ii) esiste* $a \in A$ *tale che* $f$ *ha uno zero di ordine* $\infty$ *in* $a$;

*(iii) esiste un sottoinsieme $E \subset A$ con un punto d'accumulazione $a \in A$ tale che $f(z) = 0$ per ogni $z \in E$.*

*Dimostrazione*: Evidententemente $(i) \implies (iii)$. Dimostriamo $(iii) \implies (ii)$. Sia $a \in A$ un punto di accumulazione per un insieme $E \subset A$ tale che $f(z) = 0$ per ogni $z \in E$. Esiste allora una successione $z_n$ di punti di $E$ con $z_n \to a$ e $z_n \neq a$ per ogni $n$. Allora $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$. Dunque in un disco centrato in $a$ vale lo sviluppo

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z-a)^k. \tag{3.3.4}$$

Per dimostrare che vale $(ii)$ proveremo per induzione che $a_k = 0$ per ogni $k$. Supponiamo che $a_0 = \ldots = a_{N-1} = 0$. Allora

$$f(z) = \sum_{k=N}^{\infty} a_k (z-a)^k = (z-a)^N (a_N + a_{N+1}(z-a) + \ldots)$$

e quindi, per $n$ sufficientemente grande affinché in $z_n$ valga lo sviluppo (3.3.4),

$$0 = f(z_n) = (z_n - a)^N (a_N + a_{N+1}(z_n - a) + \ldots).$$

Dunque

$$0 = (a_N + a_{N+1}(z_n - a) + \ldots)$$

da cui segue che $a_N = 0$ passando al limite per $n \to \infty$.

Rimane da dimostrare che $(ii) \implies (i)$. Sia $a$ uno zero di ordine $\infty$. Allora $f^{(k)}(a) = 0$ per ogni $k$. Sia

$$M = \{z \in A \mid f^{(k)}(z) = 0 \; \forall\, k \geq 0\}.$$

Allora $M$ è non vuoto dato che $a \in M$. Inoltre, dato che è intersezione di chiusi, $M$ è un chiuso. Sia $z_0 \in M$. Allora in un disco aperto $\mathbb{D}$ centrato in $z_0$ e contenuto in $A$ vale lo sviluppo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

e quindi $\mathbb{D} \subset M$ e, per l'arbitrarietà di $z_0 \in M$, segue che $M$ è aperto. Ma allora dato che $M$ è un sottoinsieme aperto e chiuso non vuoto del connesso $A$, deve essere $A = M$.

$\square$

Concludiamo sottolineando un'importante conseguenza del Principio del Prolungamento Analitico sulla struttura dell'insieme degli zeri di una funzione olomorfa:

COROLLARIO 3.3.6: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $f$ una funzione olomorfa su $A$ non identicamente nulla. L'insieme degli zeri di $f$ è discreto.*

**Esercizi.**

**1.** Dimostrare il Teorema 3.3.3.

**2.** Sia $f$ una funzione intera. Dimostrare che assume valori reali su $\mathbb{R}$, ossia $f(x) \in \mathbb{R}$ se $x \in \mathbb{R}$ se, e solo se, $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

**3.** Sia $\sum_{k\geq 0} b_k z^k$ una serie di potenze uniformemente convergente sui compatti del disco $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ per qualche $r > 0$ e, per $z \in \mathbb{D}$, sia $f(z)$ la sua somma. Se per qualche $\delta \in (0, r)$ si ha $f(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in (-\delta, \delta)$, dimostrare che $b_k \in \mathbb{R}$ per ogni $k \geq 0$.

**4.** Se $f$ è una funzione intera pari, ossia tale che $f(z) = f(-z)$ per ogni $z$, e $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ è il suo sviluppo in serie di potenze nell'origine, dimostrare che $a_{2k+1} = 0$ per ogni $k$. Se, invece, $f$ è una funzione intera dispari, ossia tale che $f(z) = -f(-z)$ per ogni $z$, e $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ è il suo sviluppo in serie di potenze nell'origine, dimostrare che $a_{2k} = 0$ per ogni $k$.

**5.** a) Siano $f$ e $g$ due funzioni olomorfe in un intorno di un punto $z_0$. Dimostrare che

$$\frac{(fg)^{(n)}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!} \frac{g^{(n-k)}}{(n-k)!}.$$

b) Siano $f$ e $g$ due funzioni olomorfe su un disco $\mathbb{D} = \mathbb{D}(z_0, r)$ e siano $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ e $g(z) = \sum_{k\geq 0} b_k z^k$ i loro sviluppi in serie di potenze su $\mathbb{D}$. Se $f(z)g(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ è lo sviluppo in serie di potenze nell'origine del prodotto, dimostrare che $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

**6.** Dimostrare che non esiste una funzione olomorfa $f$ definita sul disco $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ tale che per ogni intero $n \geq 2$ si abbia

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} = f\left(-\frac{1}{n}\right).$$

**7** a) Dimostrare che non esiste una funzione olomorfa $f$ sul disco unitario $\mathbb{D}$ tale che per ogni intero $n \geq 2$ si abbia $f(\frac{1}{n}) = e^{-n}$. *(Consiglio: cercare di capire come si dovrebbe comportare $f$ in 0)*

b) Trovare tutte le funzioni olomorfe $g$ sul disco unitario $\mathbb{D}$ tale che per ogni intero $n \geq 2$ si abbia $\left|g(\frac{1}{n})\right| \leq e^{-n}$.

CAPITOLO 4

# Formula di Cauchy globale, Singolarità, Residui

## 4.1. La formula di Cauchy per funzioni di classe $C^1$

Dopo aver dimostrato che le funzioni olomorfe sono di classe $C^1$, anzi in effetti di classe $C^\infty$, possiamo approfittare in pieno della formula di Gauss-Green, che ricordiamo, nella notazione complessa presentata nel Teorema 3.1.7 ci assicura che per un aperto $A \subset \mathbb{C}$ limitato tale che la frontiera $\partial A$ di $A$ è unione disgiunta finita di curve semplici chiuse $C^1$ a tratti, se $f \in C^1(\overline{A})$ è una funzione a valori complessi, allora

$$\int_{\partial A} f(z)dz = 2i \int_{A} f_{\overline{z}}(z)dxdy. \tag{4.1.1}$$

e quindi, di conseguenza, implica il Teorema di Cauchy 3.1.8 che asserisce che se $f \in C^1(\overline{A})$ è olomorfa su $A$, allora

$$\int_{\partial A} f(z)dz = 0. \tag{4.1.2}$$

In particolare dal Teorema 3.1.7 si ottienne la seguente utilissima *formula integrale di Cauchy per funzioni $C^1$*:

Teorema 4.1.1: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato tale che la frontiera $\partial A$ di $A$ sia unione disgiunta finita di curve semplici chiuse $C^1$ a tratti. Se $f \in C^1(\overline{A})$, allora, denotando $\zeta = \xi + i\eta$, per ogni $z \in A$ si ha*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_{A} \frac{f_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta. \tag{4.1.3}$$

*Dimostrazione*: Sia $z \in A$ fissato e sia $r > 0$ tale che $\mathbb{D}_r = \mathbb{D}(z,r) \subset \overline{\mathbb{D}(z,r)} \subset A$. Se si definisce $A_r = A \setminus \overline{\mathbb{D}_r}$ allora, come catene, $\partial A_r = \partial A - \partial\mathbb{D}_r$, dove nell'ultima eguaglianza si è tenuto conto dell'orientazione. Allora applicando la formula di Gauss-Green, si ottiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{\pi}\int_{A_r} \frac{f_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta. \tag{4.1.4}$$

Si osservi che la funzione $\frac{f_{\overline{z}}(\zeta)}{\zeta-z}$ è continua su $\overline{A_r}$ per ogni $r>0$, che

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{A_r}\frac{f_{\overline{z}}(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta=\frac{1}{\pi}\int\limits_{A}\frac{f_{\overline{z}}(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta \tag{4.1.5}$$

e che il limite è finito. Inoltre

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta.$$

Si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{f(z)}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=f(z)$$

mentre

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\right|\leq\frac{1}{2\pi}L(\partial\mathbb{D}_r)\max_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta-z|}=\max_{\partial\mathbb{D}_r}|f(\zeta)-f(z)|.$$

Dunque

$$f(z)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{4.1.6}$$

e quindi, da (4.1.4), (4.1.5), (4.1.6), si ottiene

$$f(z)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial A}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int\limits_{A}\frac{f_{\overline{z}}(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta.$$

□

Dal Teorema 4.1.1 segue immediatamente la *formula integrale di Cauchy per funzioni olomorfe*:

TEOREMA 4.1.2: *Sia $A\subset\mathbb{C}$ un aperto limitato tale che la frontiera $\partial A$ di $A$ sia unione disgiunta finita di curve semplici chiuse $C^1$ a tratti. Se $f\in C^1(\overline{A})$ è una funzione olomorfa su $A$, allora per ogni $z\in A$ e $n\geq 0$ si ha*

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial A}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta. \tag{4.1.7}$$

Concludiamo il paragrafo con un'altra semplice conseguenza del Teorema 4.1.1 che è rivolta a possibili applicazioni per funzioni solo di classe $C^1$:

COROLLARIO 4.1.3: *Sia $\phi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ una funzione di classe $C^1$ a supporto compatto ossia tale che supp$(\phi)=\overline{\{z\in\mathbb{C}\mid\phi(z)\neq 0\}}$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{C}$. Allora per ogni $z\in\mathbb{C}$ si ha*

$$\phi(z)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}}\frac{\phi_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta. \tag{4.1.8}$$

*Dimostrazione*: Per $z\in\mathbb{C}$, sia $\mathbb{D}$ un disco aperto tale che *supp*$(\phi)\cup\{z\}\subset\mathbb{D}$. Dato che $\phi=0$ su $\partial\mathbb{D}$ e $\phi_{\overline{\zeta}}=0$ sul complemento di $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$, la conclusione è immediata da (4.1.3). □

## 4.2. Sviluppi di Laurent

Come, utilizzando la formula di Cauchy per i dischi abbiamo ottenuto lo sviluppo in serie potenze di una funzione olomorfa nel disco, in questo paragrafo, utilizzando la formuyla di Cauchy più generalenel caso di anelli, faremo vedere come sia possibile ottenere uno sviluppo in serie di potenze in presenza singolarità di una funzione olomorfa. L'idea chiave è di cercare uno sviluppo che coinvolga sia potenze con esponente positivo sia potenze con esponente negativo. Siano $a \in \mathbb{C}$ e $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$. Sia

$$A(a, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z - a| < r_2\}$$

la corona circolare centrata in $a$ con raggi $r_1, r_2$. Utilizzando la formula di Cauchy dimostreremo che una funzione olomorfa $f$ su una corona circolare $A(a, r_1, r_2)$ ammette uno *sviluppo in serie di Laurent* per $z \in A(a, r_1, r_2)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Precisamente abbiamo il seguente

Teorema 4.2.1: *Siano $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ e $f$ una funzione olomorfa sulla corona circolare $A(a, r_1, r_2)$. Allora per $z \in A(a, r_1, r_2)$ si ha*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{4.2.1}$$

*dove la serie (4.2.1) converge uniformemente sui compatti contenuti in $A(a, r_1, r_2)$. Inoltre i coefficienti $c_n$ che compaiono in (4.2.1) sono unicamente determinati da*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \tag{4.2.2}$$

*con $r_1 < r < r_2$ arbitrario.*

*Dimostrazione*: Per semplificare le notazioni, diamo la dimostrazione per $a = 0$ e denotiamo $A(r_1, r_2) = A(0, r_1, r_2)$. Preliminarmente osserviamo che i coefficienti $c_n$ definiti in (4.2.2) non dipendono da $r$. Infatti, dato che la funzione $\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$ è olomorfa su $A(r_1, r_2)$, se $r, r' \in (r_1, r_2)$ con $r' < r$, allora, per il Teorema di Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = 0.$$

Sia $z \in A(r_1, r_2)$. Allora esistono numeri $\rho_1, \rho_2$ tali che $r_1 < \rho_1 < |z| < \rho_2 < r_2$. Allora, la formula integrale di Cauchy assicura che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = \rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Come nel caso degli sviluppi in serie di Taylor, cercheremo di sviluppare in serie gli integrali che appaiono nella formula di Cauchy.

Sia allora $|\zeta| = \rho_2$. Se $|z| < \rho_2 < r_2$ allora $\left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1$ e si ha:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

e la serie converge uniformemente sul compatto $\{|\zeta| = \rho_2\}$. Integrando la serie, possiamo allora concludere che

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}z^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta\right] z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

dove la serie converge uniformemente in ogni compatto contenuto in $|z| < \rho_2$ e quindi, dato che $\rho_2 < r_2$ è arbitrario, in ogni compatto contenuto in $|z| < r_2$.

Supponiamo ora che $|\zeta| = \rho_1$. Allora, per $r_1 < \rho_1 < |z|$, si ha $\left|\frac{\zeta}{z}\right| < 1$ e quindi:

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m}{z^{m+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

dove si è posto $n = -m - 1$. Si osservi che la serie converge uniformemente sul compatto $\{|\zeta| = \rho_1\}$. Integrando la serie, possiamo allora concludere che

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho_1}\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}z^n\right] d\zeta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta\right] z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n\end{aligned}$$

dove la serie converge uniformemente in ogni compatto contenuto $|z| > \rho_1$ e quindi, dato che $r_1 < \rho_1$ è arbitrario, in ogni compatto contenutoin $|z| > r_1$. Dunque possiamo concludere che per ogni $z \in A(r_1, r_2)$ sia ha

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

dove i $c_n$ sono dati dalla (4.2.2) e che la serie converge uniformemente sui compatti contenuti in $A(r_1, r_2)$.

Rimane da dimostrare che i coefficienti di una serie di Laurent sono unicamente determinati. Supponiamo che lo sviluppo in serie di Laurent di una funzione olomorfa $f$ su $A(r_1, r_2)$ sia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Dato che

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

se $r_1 < r < r_2$, per ogni $m \in \mathbb{Z}$ abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{m+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi r^m} \int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-im\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r^m} \int\limits_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^n e^{i(n-m)\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{n-m} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = a_m. \end{aligned}$$

$\square$

## 4.3. Singolarità di funzioni olomorfe e funzioni meromorfe

In questo paragrafo ci occuperemo di funzioni olomorfe con singolarità isolate ossia olomorfe sul complemento di un sottoinsieme discreto di un aperto. Cominciamo definendo la nozione di funzione meromorfa:

Definizione 4.3.1: Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una *funzione meromorfa* su $A$ è una funzione olomorfa $f: A \setminus E \to \mathbb{C}$, dove $E$ è un sottoinsieme discreto di $A$, tale che per ogni punto $a \in E$ esistono un disco $\mathbb{D}_a = \mathbb{D}(a, r)$ tale che $\mathbb{D}_a \subset A$ e $\mathbb{D}_a \cap E \subset \{a\}$ e due funzioni $g, h$ olomorfe su $\mathbb{D}_a$, con $h$ non identicamente nulla, tali che si abbia $hf = g$ su $\mathbb{D}_a \setminus \{a\}$. Gli elementi dell'insieme $E$ si dicono *poli* di $f$.

In parole povere, una funzione meromorfa è una funzione olomorfa sul complemento di un insieme discreto che localmente si può scrivere come quoziente di due funzioni olomorfe. È inoltre evidente dalla definizione che per verificare che una fuzione è meromorfa si procede localmente. Infatti se $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f$ è una funzione a valori complessi definita sul complemento in $A$ di un insieme discreto, allora $f$ è una funzione meromorfa se per ogni punto $a \in A$ esiste un intorno aperto $V$ tale che o $f$ ha una estensione olomorfa su tutto $V$ oppure $f$ è meromorfa su $V$.

Ovviamente una funzione olomorfa è meromorfa: per insieme $E$ dei poli si può scegliere un arbitrario insieme discreto e si prendono $h \equiv 1$ e $g \equiv f$.

Un esempio più interessante è dato dalle funzioni razionali. Siano $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ due polinomi complessi, e supponiamo che $Q(z) = b(z - b_1)^{m_1} \ldots (z - b_k)^{m_k}$ dove $b_1, \ldots, b_k$ sono gli zeri di $Q$ di molteplicità rispettivamente $m_1, \ldots, m_k$. Allora la funzione $f = \frac{P}{Q}$ è olomorfa sul complemento in $\mathbb{C}$ dell'insieme discreto $E = \{b_1, \ldots, b_k\}$. Ovviamente nell'intorno di ogni punto si ha $Qf = P$ e quindi la funzione $f$ è meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli esattamente gli zeri del polinomio $Q$. È inoltre semplice avere informazioni sullo sviluppo di Laurent della funzione $f$ centrato in uno dei poli. Infatti, fissato uno dei suoi poli $b_j$, sia $\mathbb{D}$ un disco centrato in $b_j$ che non contiene altri poli di $f$. Allora per $z \in \mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{b_j\}$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{(z - b_j)^{m_j}} g(z)$$

dove $g$ è una funzione olomorfa su $\mathbb{D}$. Allora, dato che $g$ ha uno sviluppo in serie di Taylor centrato in $b_j$ che converge uniformemente sui compatti contenuti in $\mathbb{D}$, si ha per $z \in \mathbb{D}^*$:

$$f(z) = \frac{1}{(z - b_j)^{m_j}} g(z) = \frac{1}{(z - b_j)^{m_j}} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{c}_k (z - b_j)^k = \sum_{n=-m_j}^{\infty} c_n (z - b_j)^n$$

dove si è posto $c_n = \hat{c}_{n+m_j}$. In particolare la serie di Laurent di una funzione razionale centrata in un polo ha solo un numero finito di termini con esponente negativo. Questa è una caratteristica precisa dei poli di una funzione meromorfa:

Teorema 4.3.1: *Sia $a \in \mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ un disco centrato in $a$ e $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{a\}$. Sia $f$ una funzione olomorfa su $\mathbb{D}^*$ e sia $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$ il suo sviluppo di Laurent centrato in $a$. Allora $f$ è meromorfa su $\mathbb{D}$ se e solo se esiste un intero positivo $N \geq 0$ tale che $c_n = 0$ per ogni $n < -N$.*

*Dimostrazione*: Supponiamo che $f$ sia meromorfa su $\mathbb{D}$. Allora esistono un disco $U$ centrato in $a$ e funzioni olomorfe $g, h$ su $U$ con $h \not\equiv 0$, tali che su $U^* = U \setminus \{a\}$ si ha $hf = g$. Dato che $h \not\equiv 0$, per qualche intero $N \geq 0$ si ha $h(z) = (z-a)^N \phi(z)$ dove $\phi$ è una funzione olomorfa che, a meno di prendere $U$ con un raggio un po' più piccolo, non ha zeri in $U$. La funzione $\frac{g}{\phi}$ è olomorfa su $U$ e ha uno sviluppo in serie di Taylor uniformemente convergente sui compatti contenuti in $U$:

$$\frac{g(z)}{\phi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k.$$

Dunque, lo sviluppo in serie di Laurent di $f$ su $U^*$, e quindi su $\mathbb{D}^*$ è dato da

$$f(z) = (z-a)^{-N} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k = \sum_{n=-N}^{\infty} \tilde{a}_n (z-a)^n$$

dove si è posto $\tilde{a}_n = a_{n+N}$ e quindi la prima implicazione è dimostrata.

Viceversa se, per $z \in \mathbb{D}^*$ vale lo sviluppo $f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z-a)^n$, allora $(z-a)^N f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-N} (z-a)^n$ è una funzione olomorfa su $\mathbb{D}$ e quindi $f$ è meromorfa su $\mathbb{D}$. $\square$

Come immediata conseguenza, deduciamo la seguente caratterizzazione delle funzioni meromorfe:

COROLLARIO 4.3.2: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $E \subset A$ un sottoinsieme discreto. Sia $f\colon A \setminus E \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora $f$ è una funzione meromorfa se e solo se, per ogni $a \in E$, lo sviluppo in serie di Laurent centrato in $a$ ha solo numero finito di termini con esponente negativo.*

DEFINIZIONE 4.3.2: Sia $f$ una funzione meromorfa e sia $a$ un suo polo. Sia $f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z-a)^n$ il suo sviluppo di Laurent dove $c_{-N} \neq 0$. Il numero $N = ord_a(f)$ si dice ordine del polo $a$.

OSSERVAZIONE. Se per un polo $a$ di una funzione meromorfa $f$ si ha $ord_a(f) = 0$, allora $a$ è una singolarità removibile per $f$.

Una caratterizzazione delle funzioni meromorfe più esplicita, in termini di limiti di funzioni, si ottiene con un poco più di lavoro:

TEOREMA 4.3.3: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $E \subset A$ un sottoinsieme discreto. Sia $f\colon A \setminus E \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora $f$ è una funzione meromorfa se e solo se, per ogni $a \in E$, vale una delle due seguenti condizioni:*

*(i) Esiste un intorno aperto $U$ di $a$ tale che $f_{|U \setminus \{a\}}$ è una funzione limitata (e in questo caso esiste $\lim_{z \to a} f(z) \in \mathbb{C}$ e $f$ si estende olomorficamente su tutto $U$).*

*(ii) $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$.*

*Dimostrazione*: Se si verifica $(i)$ allora, per il Teorema di estensione di Riemann, $f$ ha un'estensione olomorfa su $a$ e quindi in particolare la serie di Laurent di $f$ centrata in $a$ non ha termini con potenze di esponente negativo. Se si verifica $(ii)$ invece, allora esiste un intorno aperto $V$ di $a$ tale che, se $z \in V \setminus \{a\}$, allora $|f(z)| > 1$. Dunque la funzione $g = 1/f$ è olomorfa e limitata su $V \setminus \{a\}$ e quindi si estende a una funzione, che chiamiamo ancora $g$, olomorfa su tutto $V$. Ma allora $f$ è meromorfa su $V$ dato che per $z \in V \setminus \{a\}$ si ha $g(z)f(z) = 1$.

Assumiamo viceversa che $f$ sia meromorfa e sia $E$ l'insieme dei poli di $f$. Se $f \equiv 0$ non vi è nulla da dimostrare. Altrimenti sia $a \in E$; esistono un intorno aperto $U$ di $a$ tale che $U \cap E = \{a\}$ e due funzioni $g, h$ olomorfe su $U$, con $h \not\equiv 0$, tali che si abbia $hf = g$ su $U^* = U \setminus \{a\}$. Dato che $h \not\equiv 0$ e $f \not\equiv 0$ allora anche $g \not\equiv 0$ e quindi per due interi $h, k \geq 0$ e due funzioni $\phi, \psi$ olomorfe su $U$ e tali che $\phi(a), \psi(a) \neq 0$, si ha

$$h(z) = (z-a)^l \phi(z) \text{ e } g(z) = (z-a)^k \psi(z) \quad \forall z \in U.$$

Ma allora per $z \neq a$ vicino ad $a$ abbiamo

$$f(z) = (z-a)^{k-l} \frac{\psi(z)}{\phi(z)}$$

Se $k - l \geq 0$, allora $f$ è limitata in un intorno di $a$, mentre, se $k - l < 0$, allora $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$. □

Per come è stata costruita la topologia sulla sfera di Riemann, dal Teorema 4.3.3 segue immediatamente il seguente:

TEOREMA 4.3.4: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $E \subset A$ un sottoinsieme discreto. Sia $f \colon A \setminus E \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora $f$ è una funzione meromorfa se e solo se esiste una funzione continua $\hat{f} \colon A \to \hat{\mathbb{C}}$ tale che $\hat{f}_{|A \setminus E} \equiv f$*

Vogliamo ora investigare un ultimo tipo di singolarità isolata per una funzione olomorfa.

DEFINIZIONE 4.3.3: Siano $A$ un aperto, $a \in A$ un suo punto e $f$ una funzione olomorfa su $A \setminus \{a\}$. Se $f$ non è meromorfa su $A$, il punto $a$ si dice *singolarità essenziale* di $f$.

È immediato riconoscere le singolarità essenziali dalla serie di Laurent: occorre che ci siano infiniti termini con potenze di esponente negativi. Questo fatto suggerisce anche come costruire esempi. Per costruire una funzione con singolarità essenziale nell'origine, basta prendere una funzione trascendente (ossia intera non polinomiale), che quindi ha sviluppo in serie di potenze centrata nell'origine con raggio di convergenza infinito e comporla con l'applicazione $z \mapsto \frac{1}{z}$. Per esempio la funzione $e^{\frac{1}{z}}$ ha singolarità essenziale nell'origine. Infatti, per $z \neq 0$,

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{(-n)!}$$

dove l'ultima serie converge uniformemente sui compatti contenuti in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Abbiamo infatti il seguente

Teorema 4.3.5: (di Casorati-Weierstass) *Siano $A$ un aperto, $a \in A$ un suo punto e $f$ una funzione olomorfa su $A \setminus \{a\}$. Se $a$ è una singolarità essenziale di $f$, allora per ogni $r > 0$ tale che $\mathbb{D}(a, r) \subset A$, se $\mathbb{D}_r^* = \mathbb{D}(a, r) \setminus \{a\}$, l'insieme $f(\mathbb{D}_r^*)$ è denso in $\mathbb{C}$.*

*Dimostrazione*: Supponiamo che per qualche $r > 0$ tale che $\mathbb{D}(a, r) \subset A$ l'insieme $f(\mathbb{D}_r^*)$ non sia denso in $\mathbb{C}$. Allora esiste $c \in \mathbb{C}$ e $\delta > 0$, tale che $|f(z) - c| \geq \delta$ per ogni $z \in \mathbb{D}_r^*$. Allora la funzione $g$ definita da $g(z) = \frac{1}{f(z)-c}$ è olomorfa su $\mathbb{D}_r^*$ e limitata dato che, per $z \in \mathbb{D}_r^*$, si ha

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - c|} \leq \frac{1}{\delta}.$$

Allora per il Teorema di estensione di Riemann, la funzione $g$ si estende olomorfa a tutto $\mathbb{D}(a, r)$ e quindi, dato che su $\mathbb{D}_r^*$, si ha $gf \equiv 1 + cg$, segue, contro l'ipotesi, che $f$ è meromorfa. □

Alla luce di quanto dimostrato, il comportamento di una funzione olomorfa in un intorno di una sua singolarità si può allora riassumere in questo modo:

Teorema 4.3.6: *Siano $A$ un aperto, $a \in A$ un suo punto e $f$ una funzione olomorfa su $A \setminus \{a\}$. Ci sono tre possibilità mutualmente esclusive:*

*(i)* *Esiste un intorno aperto $U$ di $a$ tale che $f_{|U \setminus \{a\}}$ è una funzione limitata: in questo caso $f$ si estende olomorficamente su tutto $U$ e $a$ è una singolarità eliminabile per $f$.*

*(ii)* $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$, *$f$ è meromorfa e $a$ è un polo di $f$.*

*(iii)* *Non esiste* $\lim_{z \to a} |f(z)|$ *e $a$ è una singolarità essenziale per $f$.*

## 4.4. Il Teorema dei Residui e alcune applicazioni.

In questa sezione diamo la versione più semplice del Teorema dei residui e alcune importanti applicazioni.

**Definizione.** Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $E \subset \Omega$ un insieme discreto. Sia $f$ una funzione olomorfa su $\Omega \setminus E$. Sia $z_0 \in E$ e $r > 0$ tale che per $0 < |z - z_0| < r$ la funzione $f$ abbia lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{4.4.1}$$

Il numero $Res_{z_0}(f) = c_{-1}$ si dice *residuo* di $f$ in $z_0$.

Ricordando come si calcolano i coefficienti di una serie di Laurent, abbiamo immediatamente la seguente:

PROPOSIZIONE 4.4.1: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $E \subset \Omega$ un insieme discreto e $f$ una funzione olomorfa su $\Omega \setminus E$. Sia $z_0 \in E$ e $\rho > 0$ tale che $D(z_0, \rho) \subset \overline{D(z_0, \rho)} \subset \Omega$ e $\overline{D(z_0, \rho)} \cap E = \{z_0\}$. Allora*

$$Res_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z)\, dz. \tag{4.4.2}$$

Per una funzione meromorfa il residuo in un polo si calcola in un modo semplice:

PROPOSIZIONE 4.4.2: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $f$ una funzione meromorfa su $\Omega$ e sia $z_0$ un polo di ordine $N$ per $f$. Allora*

$$Res_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(N-1)!} \frac{\partial^{(N-1)}}{\partial z^{(N-1)}} [f(z)(z - z_0)^N]. \tag{4.4.3}$$

*Dimostrazione*: Se $f$ ha un polo di ordine $N$ in $z_0$, $f$ in un intorno di $z_0$ ha uno sviluppo di Laurent del tipo

$$f(z) = c_{-N}(z - z_0)^{-N} + \ldots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n \tag{4.4.4}$$

e quindi per il teorema di estensione di Riemann $g(z) = (z - z_0)^N f(z)$ definisce una funzione olomorfa in un intorno di $z_0$. Allora, vicino a $z_0$, la $g$ ha uno sviluppo di Taylor

$$g(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^n \tag{4.4.5}$$

dove $a_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} [g(z)]_{|z=z_0}$. La (4.4.3) segue allora dal confronto di (4.4.4) e (4.4.5). $\square$

In molti casi è utile anche la seguente immediata osservazione:

Lemma 4.4.3: *Siano $g, h$ due funzioni olomorfe su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ e $z_0 \in A$. Se $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ e $h'(z_0) \neq 0$, allora la funzione $f = g/h$ ha un polo di ordine 1 in $z_0$ e*

$$Res_{z_0}(f) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

*Dimostrazione*: Per $z$ sufficientemente vicino $z_0$, si ha $h(z) = h'(z_0)(z-z_0)+H(z)(z-z_0)^2$ per qualche funzione $H$ olomorfa in un intorno di $z_0$. Dunque la funzione $f = g/h$ ha un polo di ordine 1 in $z_0$ e, usando (4.4.3), abbiamo

$$\begin{aligned} Res_{z_0}(f) &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h'(z_0)(z - z_0) + H(z)(z - z_0)^2} \\ &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \end{aligned}$$

□

Come conseguenza quasi immediata della formula di Cauchy, possiamo ora dimostrare il Teorema dei Residui in una versione molto semplice ma comunque sufficiente per le applicazioni.

Teorema 4.4.4: (dei Residui) *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $E \subset \Omega$ un insieme discreto e $f$ una funzione olomorfa su $\Omega \setminus E$. Sia $D \subset \Omega$ un aperto limitato con $\overline{D} \subset \Omega$ e con frontiera $\Gamma = \partial D$ unione finita di curve $C^1$ a tratti semplici chiuse disgiunte . Supponiamo che $E \cap \Gamma = \emptyset$ e che $D \cap E = \{z_1, \ldots, z_N\}$. Allora si ha*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{N} Res_{z_k}(f). \tag{4.4.6}$$

*Dimostrazione*: Siano $\rho_1, \ldots, \rho_N > 0$ tali che si abbia

$$\overline{\mathbb{D}_k} = \overline{\mathbb{D}(z_k, \rho_k)} \subset D$$

per ogni $k = 1, \ldots, N$, e

$$\overline{\mathbb{D}_k} \cap \overline{\mathbb{D}_l} = \emptyset$$

per ogni $k, l = 1, \ldots, N$ con $k \neq l$. Dunque se $D' = D \setminus \bigcup_{k=1}^N \overline{\mathbb{D}_k}$ e $\Gamma_k = \partial \mathbb{D}_k$ (con l'orientazione positiva), il bordo orientato di $D'$ è dato da $\partial D' = \Gamma - \Gamma_1 - \ldots - \Gamma_N$. Dato che $f$ è olomorfa su $D'$, si ha

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D'} f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\, dz - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} f(z)\, dz$$

e quindi (4.4.6) segue da (4.4.2). □

Il teorema dei residui fornisce uno straordinario strumento per il calcolo di molti integrali reali. Senza alcuna pretesa di voler essere esaustivi, diamo alcuni esempi per indicare il tipo di procedimento.

**Esempio 1.** Si consideri l'integrale del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx \tag{4.4.7}$$

dove $P(x), Q(x)$ sono polinomi con coefficienti reali tali che $Q$ non ha radici reali e $deg(Q) \geq deg(P) + 2$. In particolare allora l'integrale (4.4.7) esiste finito. Sia $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ la funzione razionale che estende a $\mathbb{C}$ la funzione $\frac{P(x)}{Q(x)}$ e siano $b_1, \dots, b_N$ i poli di $f(z)$ contenuti nel semipiano superiore $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} | Imz > 0\}$. Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} Res_{b_k}(f). \tag{4.4.8}$$

Per dimostrare (4.4.8) si procede nel modo seguente. Siano $\alpha_R \colon [-R, R] \to \mathbb{C}$ e $\beta_R \colon [0, \pi] \to \mathbb{C}$ le curve definite da

$$\alpha_R(t) = t \quad \text{e} \quad \beta_R(t) = Re^{it}$$

e sia $\gamma_R = \beta_R \alpha_R$ il cammino chiuso ottenuto componendoli. Esiste $R_0$ tale che per $R > R_0$ i punti $b_1, \dots, b_N$ sono tutti contenuti nell'aperto che ha frontiera parametrizzata da $\beta_R$. Allora per il teorema dei residui, per $R > R_0$, si ha

$$\int_{\alpha_R} f(z)\, dz + \int_{\beta_R} f(z)\, dz = \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} Res_{b_k}(f).$$

D'altra parte

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\alpha_R} f(z)\, dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx.$$

Ci è utile la seguente semplice osservazione sul comportamento asintotico dei polinomi:

Lemma 4.4.5: *Sia $p(z) = a_0 + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n$ un polinomio di grado $n$. Per ogni $1 > \epsilon > 0$ esiste $R_\epsilon \geq 1$ tale che se $|z| \geq R_\epsilon$ si ha*

$$(1 - \epsilon)|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq (1 + \epsilon)|a_n||z|^n. \tag{4.4.9}$$

*Dimostrazione*: Per $n = 0$ la stima è ovvia. Se $n \geq 1$, sia $q(z) = a_0 + \ldots + a_{n-1}z^{n-1}$, in modo che $p(z) = q(z) + a_n z^n$. Ovviamente si ha

$$|a_n||z|^n - |q(z)| \leq |p(z)| \leq |a_n||z|^n + |q(z)|.$$

D'altra parte, per $|z| > 1$, si ha

$$|q(z)| \leq |a_0| + \ldots + |a_{n-1}||z|^{n-1} \leq (|a_0| + \ldots + |a_{n-1}|)|z|^{n-1} = \frac{|a_0| + \ldots + |a_{n-1}|}{|z|}|z|^n.$$

Per $\epsilon \in (0, 1)$ si scelga $R_\epsilon = \max\left\{1, \frac{|a_0|+\ldots+|a_{n-1}|}{\epsilon|a_n|}\right\}$. Allora, se $|z| \geq R_\epsilon$, si ha

$$|q(z)| \leq \frac{|a_0| + \ldots + |a_{n-1}|}{|z|}|z|^n \leq \epsilon|a_n||z|^n$$

e quindi

$$(1 - \epsilon)|a_n||z|^n \leq |a_n||z|^n - |q(z)| \leq |p(z)| \leq |a_n||z|^n + |q(z)| \leq (1 + \epsilon)|a_n||z|^n.$$

□

Siano allora $m = deg(P)$ e $n = deg(Q)$. Allora, per ipotesi, $n \geq m + 2$. Inoltre, per il Lemma 4.4.5 esiste $R_1$ tale che, per opportune costanti $C_1, C_2 > 0$, se $|z| > R_1$, si ha

$$|P(z)| \leq C_1|z|^m \quad \text{e} \quad |Q(z)| \geq C_2|z|^n.$$

Dunque

$$0 \leq \lim_{R\to\infty} \left| \int_{\beta_R} f(z)\, dz \right| \leq \lim_{R\to\infty} \max_{|z|=R} |f(z)|\pi R \leq \lim_{R\to\infty} \frac{C_1\pi}{C_2 R} = 0$$

e quindi (4.4.8) segue.

**Esempio 2.** Siano $P(x,y), Q(x,y)$ polinomi con coefficienti reali tali che $Q(\cos t, \sin t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e se $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$. mediante il teorema dei residui si può calcolare

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt. \tag{4.4.10}$$

In effetti, se si pone $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$, allora $z^{-1} = \overline{z} = e^{-it} = \cos t - i \sin t$ e quindi

$$\cos t = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) = \frac{z^2+1}{2z} \quad \text{e} \quad \sin t = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}) = \frac{z^2-1}{2iz}.$$

Dunque

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{1}{iz}\, dz$$

Allora, se $f(z) = \frac{1}{iz} R(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz})$ e $a_1, \ldots, a_N$ sono i poli della funzione $f(z)$ contenuti nel disco unitario $\{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$, per il teorema dei residui si ha

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int_{|z|=1} f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^N Res_{a_k}(f). \tag{4.4.11}$$

**Esempio 3.** Molti altri integrali reali possono essere calcolati utilizzando il teorema dei residui con metodi simili a quelli applicati sopra. Ad esempio, se $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ è una funzione razionale con $P(x), Q(x)$ sono polinomi con coefficienti reali tali che $Q$ non ha radici reali e $deg(Q) \geq deg(P) + 2$, Allora gli integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos x\, dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin x\, dx$$

sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ix}\, dx. \tag{4.4.12}$$

Sia $f(z) = R(z)e^{iz}$ l'estensione dell'integrando in (4.4.12) a una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ e siano $b_1, \ldots, b_N$ i poli di $f(z)$ contenuti nel semipiano superiore $\mathbb{H}^+$. Allora, ripetendo parola per parola l'argomento dell'esempio 1, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N Res_{b_k}(f). \tag{4.4.13}$$

Anche in questo caso, dato che gli integrali si calcolano prendendo i limiti per $R \to \infty$ dell'integrale $\int_{-R}^{R} R(x)e^{ix}\,dx$ dunque facendo il limite su un intervallo simmetrico, è cruciale il fatto che, per l'ipotesi sulla funzione razionale, l'integrale è assolutamente convergente.

Argomenti simili ma applicati con molta più prudenza, si possono adoperare nel caso in cui $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ è una funzione razionale con $P(x), Q(x)$ sono polinomi con coefficienti reali tali che $Q$ non ha radici reali e $deg(Q) \geq deg(P) + 1$. In questi casi è utile avere un argomento generale che permette di stimare integrali lungo le semicirconferenze. Il seguente lemma è utile per calcolare altri integrali con il metodo illustrato sopra:

LEMMA 4.4.6: (di Jordan) *Si denotino* $\overline{\mathbb{H}}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) \geq 0\}$ *e* $\delta_R = \{z = Re^{i\theta} \mid \theta \in [0, \pi]\}$. *Per ogni* $\alpha > 0$, *se* $h$ *è una funzione olomorfa su un aperto contenente* $\overline{\mathbb{H}}_+$ *tranne al più che per un numero finito di singolarità. Se*

$$\lim_{\overline{\mathbb{H}}_+ \ni z \to \infty} h(z) = 0,$$

*allora*

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\delta_R} e^{i\alpha z} h(z) dz \right| = 0.$$

*Dimostrazione*: Si ha

$$I_R = \int_{\delta_R} e^{i\alpha z} h(z) = \int_0^{\pi} h(Re^{i\theta}) e^{i\alpha R(\cos\theta + i\sin\theta)} iRe^{i\theta} d\theta.$$

Se $M_R = \max_{\delta_R} |h|$, dall'ipotesi su $h$, segue che $|M_R| \to 0$ per $R \to \infty$. Dunque ricordando che vale la stima $\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin\theta \leq \theta$ se $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, si ha

$$\begin{aligned} |I_R| &\leq RM_R \int_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin\theta} d\theta = 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin\theta} d\theta \leq 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-\alpha R 2\theta}{\pi}} d\theta \\ &= 2RM_R \frac{\pi}{2\alpha R}[1 - e^{-\alpha R}] = M_R \frac{\pi}{\alpha}[1 - e^{-\alpha R}] \leq M_R \frac{\pi}{\alpha} \end{aligned}$$

e quindi $|I_R| \to 0$ per $R \to 0$. $\square$

Per esemplificare, esaminiamo un caso nel quale si verifica che l'integrale esiste come integrale di Riemann improprio. Consideriamo l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \tag{4.4.14}$$

Si osservi per cominciare che l'integrale (4.4.14) esiste finito. Infatti a funzione $\frac{\sin x}{x}$ ha estensione continua su tutto $\mathbb{R}$ e quindi è integrabile su qualunque intervallo limitato. D'altra parte

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\cos x}{x^2} dx$$

e, dato che $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, l'integrale (4.4.14) esiste come integrale improprio su tutta la retta. Si osservi che è in questo caso non esiste l'integrale improprio del del modulo della funzione!

Consideriamo la funzione $g(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. La funzione $g(z)$ è una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con unico polo nell'origine e tale che $\frac{\sin x}{x} = \operatorname{Im} g(z)$. Consideriamo per ogni $R > 0$ le curve

$$\alpha_R(t) = t \quad \text{per}\, t \in [-R, -\frac{1}{R}] \qquad\qquad \beta_R(t) = \frac{e^{it}}{R} \quad \text{per}\, t \in [\pi, 2\pi]$$

$$\gamma_R(t) = t \quad \text{per}\, t \in [\frac{1}{R}, R] \qquad\qquad \delta_R(t) = Re^{it} \quad \text{per}\, t \in [0, \pi]$$

e $\phi_R = \delta_R\gamma_R\beta_R\alpha_R$. L'integrale (4.4.14) esiste finito e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \operatorname{Im}\left[\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{\alpha_R} g(z)\, dz + \int_{\gamma_R} g(z)\, dz\right)\right].$$

D'altra parte

$$\int_{\alpha_R} g(z)\, dz + \int_{\beta_R} g(z)\, dz + \int_{\gamma_R} g(z)\, dz + \int_{\delta_R} g(z)\, dz = \int_{\phi_R} g(z)\, dz = 2\pi i Res_0(g) = 2\pi i$$

dato che $Res_0(g) = 1$ come si vede subito dallo sviluppo di Laurent in 0 della funzione $g(z)$:

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i)^k}{k!}z^k = \frac{1}{z} + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(i)^{l+1}}{(l+1)!}z^l.$$

Per quanto riguarda l'integrale di $g(z)$ lungo $\delta_R$, come diretta conseguenza del Lemma 4.4.6, segue che

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\delta_R} g(z)\, dz\right| = 0.$$

Infine

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\beta_R} g(z)\, dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{i\frac{e^{it}}{R}}}{\frac{e^{it}}{R}}i\frac{e^{it}}{R}\, dt = \lim_{R\to\infty} i\int_{\pi}^{2\pi} e^{i\frac{e^{it}}{R}}\, dt = \pi i.$$

Ricapitolando, dunque:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\, dx &= \operatorname{Im}\left[\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{\alpha_R} g(z)\, dz + \int_{\gamma_R} g(z)\, dz\right)\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{\alpha_R} g(z)\, dz + \int_{\beta_R} g(z)\, dz + \int_{\gamma_R} g(z)\, dz + \int_{\delta_R} g(z)\, dz\right) - \pi i\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{\phi_R} g(z)\, dz\right) - \pi i\right] = \operatorname{Im}\left[\lim_{R\to+\infty}(2\pi i) - \pi i\right] = \pi.
\end{aligned}$$

**Esempio 4.** Un'altra applicazione tipica del calcolo dei residui è la somma di serie numeriche. Illustriamo qui con un esempio il tipo di tecniche che si usano. Si consideri la funzione meromorfa $\cot \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$. Dunque $\cot \pi z$ ha poli esattamente do ve $\sin \pi z = 0$ e quindi per $z = n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Dato che $(\sin \pi z)' = \cos \pi z$ non si annulla per $z = n \in \mathbb{Z}$, usando il Lemma 4.4.3 si ha immediatamente che ogni $n \in \mathbb{Z}$ è un polo di ordine 1 per $\cot \pi z$ e che

$$Res_n(\cot \pi z) = \left[\frac{\cos \pi z}{\pi \cos \pi z}\right]_{z=n} = \frac{1}{\pi}. \tag{4.4.15}$$

La formula (4.4.15), vista nell'ottica del teorema dei residui, suggerisce un "metodo" per sommare serie numeriche del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Sia infatti $f(z)$ una funzione meromorfa tale che $f(n) = a_n$. Allora si vede subito che

$$Res_n(f(z)\cot \pi z) = \frac{1}{\pi} a_n.$$

Vogliamo usare questo fatto e il teorema dei residui per calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ per interi $k \geq 1$. È necessario un risultato preliminare. Per ogni intero $N \geq 0$,

$$\mathcal{Q}_N = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \max(|Rez|, |Imz|) < N + \frac{1}{2} \right\} \tag{4.4.16}$$

è l'interno del quadrato rappresentato in Figura 4.1 di vertici $\left(N + \frac{1}{2}\right) - i\left(N + \frac{1}{2}\right)$, $\left(N + \frac{1}{2}\right) + i\left(N + \frac{1}{2}\right)$, $-\left(N + \frac{1}{2}\right) + i\left(N + \frac{1}{2}\right)$, $-\left(N + \frac{1}{2}\right) - i\left(N + \frac{1}{2}\right)$.

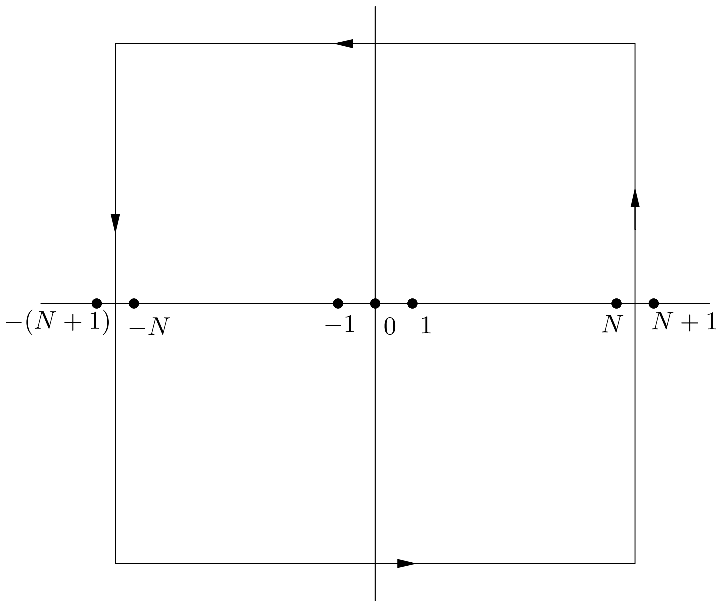


Fig. 4.1

LEMMA 4.4.7: *Esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni intero positivo $N$ per $z \in \partial\mathcal{Q}_N$ si ha $|\cot \pi z| \leq M$.*

*Dimostrazione*: Sia $z = x + iy \in \partial\mathcal{Q}_N$ un punto che giace su uno dei lati del quadrato parallelo all'asse reale. Allora $|y| = N + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$. Allora:

$$|\cot \pi z| = \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \leq \left| \frac{\left|e^{i\pi z}\right| + \left|e^{-i\pi z}\right|}{\left|e^{i\pi z}\right| - \left|e^{-i\pi z}\right|} \right|$$

$$= \left| \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{-\pi y} - e^{\pi y}} \right| = \coth |\pi y| \leq \coth \frac{\pi}{2}$$

dove abbiamo usato $\left|e^{i\pi z}\right| = \left|e^{i\pi x - \pi y}\right| = e^{-\pi y}$, $\left|e^{-i\pi z}\right| = \left|e^{-i\pi x + \pi y}\right| = e^{\pi y}$ il fatto che $\coth t$ è monotona decrescente per $t > 0$.

Se invece $z = x + iy \in \partial Q_N$ è un punto che giace su uno dei lati del quadrato parallelo all'asse immaginario, allora $|x| = N + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$. Ricordando che in questo caso $e^{2i\pi x} = e^{i\pi} = -1$, abbiamo

$$|\cot \pi z| = \left|\frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}\right| = \left|\frac{e^{2i\pi z} + 1}{e^{2i\pi z} - 1}\right| = \left|\frac{-e^{-2\pi y} + 1}{-e^{-2\pi y} - 1}\right| = \frac{1 - e^{-2\pi y}}{e^{-2\pi y} + 1} \leq 1 :$$

Dunque basta scegliere $M = \max\{1, \coth \frac{\pi}{2}\} = \coth \frac{\pi}{2}$ e il Lemma è dimostrato. $\square$

Consideriamo ora la funzione meromorfa definita da $g(z) = \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z$. Come già osservato per ogni intero $n \neq 0$ si ha

$$Res_n(g) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n^{2k}}.$$

Sia

$$\cot \pi z = \sum_{n=-1}^{\infty} b_n z^n$$

lo sviluppo in serie di Laurent di $\cot \pi z$ nell'origine. Dato che $\cot \pi z$ è una funzione dispari, ossia tale che $\cot \pi(-z) = -\cot \pi z$, segue immediatamente che $b_n = 0$ per ogni $n$ pari e quindi

$$\cot \pi z = \sum_{m=-1}^{\infty} b_{2m-1} z^{2m-1}.$$

Inoltre lo sviluppo in serie di Laurent di $g(z) = \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z$ in 0 è dato da

$$g(z) = \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z = \frac{1}{z^{2k}} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m-1} z^{2m-1}$$

$$= b_{-1} z^{-2k-1} + b_1 z^{-2k+1} + \ldots + b_{2k-1} z^{-1} + \sum_{m=k+1}^{\infty} b_{2m-1} z^{2m-2k-1}$$

da cui segue che

$$Res_0(g) = b_{2k-1}.$$

Siamo ora pronti a dimostrare la seguente

Proposizione 4.4.8: *Per ogni intero $k \geq 1$, se $\cot \pi z = \sum_{m=-1}^{\infty} b_{2m-1} z^{2m-1}$ è lo sviluppo di Laurent di $\cot \pi z$ in 0, si ha*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{\pi}{2} b_{2k-1}$$

*Dato che*

$$\cot \pi z = \frac{1}{\pi z} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi^3}{45} - \frac{2\pi^5}{945} - \ldots$$

*in particolare si ha che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

*Dimostrazione*: Si osservi che se $\mathcal{Q}_N$ è il quadrato aperto definito in (4.4.16), per $N \geq 1$, allora la funzione $g(z) = \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z$ ha poli in $\mathcal{Q}_N$ nei punti $-N, \dots, 0, \dots, N$. Dunque, per il teorema dei residui

$$\int_{\partial \mathcal{Q}_N} \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z dz = \sum_{n=-N}^{N} Res_n \left[ \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right].$$

D'altra parte, usando il Lemma 4.4.7, e osservando che il perimetro del quadrato $\partial \mathcal{Q}_N$ è $4(2N+1)$ e che, se $z \in \partial \mathcal{Q}_N$, allora $\frac{1}{|z|^{2k}} \leq \frac{1}{N^{2k}}$, dato che $\mathbb{D}(0,N) \subset \mathcal{Q}_N$, abbiamo

$$\left| \int_{\partial \mathcal{Q}_N} \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z dz \right| \leq \frac{M}{N^{2k}} 4(2N+1).$$

Dunque

$$0 = \lim_{N \to \infty} \int_{\partial \mathcal{Q}_N} \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z dz = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} Res_n \left[ \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right] \tag{4.4.17}$$

e quindi

$$\sum_{n=-N}^{N} Res_n \left[ \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right]$$

$$= \sum_{n=-N}^{-1} Res_n \left[ \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right] + Res_0 \left[ \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right] + \sum_{n=1}^{N} Res_n \left[ \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right]$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\pi} \frac{1}{n^{2k}} + b_{2k-1}.$$

Questo fatto insieme a (4.4.17) implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{\pi}{2} b_{2k-1}.$$

Il resto dell'enunciato si ottiene trovando i primi termini della serie di Laurent di $\cot \pi z$ nell'origine. Ad esempio si può procedere nel modo seguente usando metodi elementari, anche se un po' laboriosi. Se $(\sin \pi z)^{-1} = \sum_{m=-1}^{\infty} c_{2m-1} z^{2m-1}$ è lo sviluppo di Laurent nell'origine, ricordando lo sviluppo $\sin \pi z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1}$, i primi coefficienti della serie di Laurent di $(\sin \pi z)^{-1}$ si possono calcolare per iterazione moltiplicando e eguagliando i coefficienti dello stesso grado nella relazione:

$$1 = \sin \pi z (\sin \pi z)^{-1} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} \right) \left( \sum_{m=-1}^{\infty} c_{2m-1} z^{2m-1} \right)$$

$$= \left( \pi z - \frac{\pi^3}{(3)!} z^3 + \frac{\pi^5}{(5)!} z^5 - \dots \right) \left( c_{-1} z^{-1} + c_1 z^1 + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots \right)$$

ottenendo: $c_{-1} = \frac{1}{\pi}, c_1 = \frac{\pi}{6}, c_3 = \frac{7\pi^3}{360}, c_5 = \frac{31\pi^5}{15120}$. Lo stesso metodo applicato a

$$\sum_{m=-1}^{\infty} b_{2m-1} z^{2m-1} = \cot \pi z = \cos \pi z ((\sin \pi z)^{-1}$$

$$= \left(1 - \frac{\pi^2}{2!} z^2 + \frac{\pi^4}{4!} z^4 - \frac{\pi^6}{6!} z^6 + \dots\right) \left(\frac{1}{\pi} z^{-1} + \frac{\pi}{6} z^1 + \frac{7\pi^3}{360} z^3 + \frac{31\pi^5}{15120} z^5 + \dots\right)$$

permette di calcolare i coefficienti $b_{-1}, b_1, b_3, b_3$ della serie di Laurent di $\cot \pi z$. $\square$

**Osservazione.** I coefficienti $b_{2k-1}$ della serie di Laurent di di $\cot \pi z$ nell'origine sono correlati alla successione $B_n$ dei numeri di Bernoulli, molto importanti in molti contesti matematici, mediante la formula:

$$b_{2k-1} = \frac{2^{2k}}{(2k)!} \pi^{2k-1} B_{2k}.$$

**Esercizi**

**1.** Verificare che

$$a) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx = \frac{5}{6}\pi;$$

$$b) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^5} = \frac{8!}{(4!)^2} \frac{\pi}{2^8};$$

$$c) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a^4 + x^4)^2} = \frac{3}{8} \frac{\sqrt{2}}{a^7} \pi \quad \text{per} \quad a > 0.$$

**2.** Verificare che

$$a) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \qquad \text{per}\, a > b > 0;$$

$$b) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{2 + \cos \theta} d\theta = 2\pi \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

**3.** Calcolare

$$a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + 1} dx \qquad b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^4 + 1} dx.$$

**4.** Verificare che, per $a > 0$, si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2}\, dx = \pi e^{-a}$

*Consiglio: Si consideri la funzione* $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}$ *che per* $x \in \mathbb{R}$ *ha parte immaginaria uguale all'integrando, ricordare il Lemma di Jordan e la tecnica usuale...*

**5.** Sia $f$ una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ con unici in $z = 1$ di molteplicità 3 e in $z = -1$ di molteplicità 1. Calcolare

$$\int_\gamma z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

dove $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ è la curva definita da $\gamma(t) = \begin{cases} -1 + e^{2it} & \text{se} \quad t \in [0, \pi] \\ \\ 1 + e^{i(3\pi - 2t)} & \text{se} \quad t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$

## 4.5. Residui e formule per l'inversa di un biolomorfismo.

In questo paragrafo illustreremo come il Teorema dei Residui permetta di trovare formule e sviluppi per la funzione inversa di un biolomorfismo. Cominciamo con la seguente osservazione:

PROPOSIZIONE 4.5.1: *Siano $A, A'$ aperti di $\mathbb{C}$ e $f: A \to A'$ un biolomorfismo. Se $\mathbb{D}$ è un disco arbitrario tale che $\overline{\mathbb{D}} \subset A$, per ogni $w \in f(\mathbb{D})$ vale la seguente rappresentazione integrale:*

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta. \tag{4.5.1}$$

*Dimostrazione*: Sia $w \in f(\mathbb{D}) \subset A'$ e sia $c = f^{-1}(w)$. Dato che necessariamente $f'(c) \neq 0$ e che $f$ è iniettiva, allora $c$ è un polo semplice della funzione $g(z) = z \frac{f'(z)}{f(z)-w}$ ed è l'unico polo di $g$ in $\mathbb{D}$. Dal Lemma 4.4.3 si ha immediatamente

$$Res_c(g) = c \frac{f'(c)}{f'(c)} = c.$$

Dunque possiamo concludere:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta = Res_c(g) = c = f^{-1}(w).$$

□

Ripetendo l'argomento utilizzato per dimostrare a partire dalla formula di Cauchy che una funzione olomorfa ammette uno sviluppo in serie di potenze in un intorno di un punto, si può utilizzare la formula (4.5.1) per ottenre uno sviluppo in serie dell'inversa:

PROPOSIZIONE 4.5.2: *Siano $A, A'$ aperti di $\mathbb{C}$, $f: A \to A'$ un biolomorfismo e $\mathbb{D}$ un disco arbitrario tale che $\overline{\mathbb{D}} \subset A$. Per ogni $w_0 \in f(\mathbb{D})$, se $w$ è un punto di un disco $\mathbb{D}(w_0, r)$ tale che $\mathbb{D}(w_0, r) \subset \overline{\mathbb{D}(w_0, r)} \subset f(\mathbb{D})$, vale il seguente sviluppo in serie di potenze:*

$$f^{-1}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta) - w)^{n+1}} d\zeta \right] (w - w_0)^n \tag{4.5.2}$$

*dove la serie converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{D}(w_0, r)$.*

*Dimostrazione*: Si cominci osservando che, fissato $w_0 \in f(\mathbb{D})$, per $w \in \mathbb{D}(w_0, r) \subset f(\mathbb{D})$, allora, se $\zeta \in \partial \mathbb{D}$, si ha $|f(\zeta) - w_0| \geq r$ e

$$\frac{1}{f(\zeta) - w} = \frac{1}{f(\zeta) - w_0 - (w - w_0)} = \frac{1}{f(\zeta) - w_0} \frac{1}{1 - \frac{w - w_0}{f(\zeta) - w_0}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f(\zeta) - w_0} \left( \frac{w - w_0}{f(\zeta) - w_0} \right)^n.$$

Dato che $\left| \frac{w - w_0}{f(\zeta) - w_0} \right| \leq \left| \frac{w - w_0}{r} \right| < 1$ la serie converge uniformemente su $\partial \mathbb{D}$ e quindi possiamo concludere usando (4.5.1):

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \zeta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-w_0}\left(\frac{w-w_0}{f(\zeta)-w_0}\right)^n d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta)-w_0)^{n+1}}d\zeta\right](w-w_0)^n$$

dove la convergenza è uniforme su ogni compatto di $\mathbb{D}(w_0, r)$. □

Dallo sviluppo (4.5.2) di $f^{-1}$ si ricava usando il calcolo dei residui il seguente

TEOREMA 4.5.3: (Sviluppo di Lagrange dell'inversa) *Siano $A, A'$ aperti di $\mathbb{C}$, $f\colon A \to A'$ un biolomorfismo e $\mathbb{D}$ un disco arbitrario tale che $\overline{\mathbb{D}} \subset A$. Per ogni $w_0 = f(z_0) \in f(\mathbb{D})$, se $w$ è un punto di un disco $\mathbb{D}(w_0, r)$ centrato in $w_0$ e contenuto in $f(\mathbb{D})$ vale il seguente sviluppo in serie di potenze:*

$$f^{-1}(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^{(n-1)}}{\partial z^{(n-1)}}\left(\frac{z-z_0}{f(z)-w_0}\right)^n\right]_{z=z_0}(w-w_0)^n \tag{4.5.3}$$

*dove la serie converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{D}(w_0, r)$.*

*Dimostrazione*: Per provare l'affermazione occorre calcolare gli integrali

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta)-w)^{n+1}}d\zeta$$

che compaiono in (4.5.2) per ogni $n \geq 0$. Per $n = 0$ basta utilizzare (4.5.1):

$$z_0 = f^{-1}(w_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w_0}d\zeta.$$

Per $n > 0$, si osservi che

$$\left(\frac{\zeta}{(f(\zeta)-w_0)^n}\right)' = -n\frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta)-w_0)^{n+1}} + \frac{1}{(f(\zeta)-w_0)^n}$$

e quindi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta)-w)^{n+1}}d\zeta = -\frac{1}{2n\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\left(\frac{\zeta}{(f(\zeta)-w_0)^n}\right)' d\zeta$$

$$+ \frac{1}{2n\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{(f(\zeta)-w_0)^n}d\zeta$$

$$= \frac{1}{2n\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{(f(\zeta)-w_0)^n}d\zeta.$$

Dato che la funzione $\frac{1}{(f(\zeta)-w_0)^n}$ ha in $\mathbb{D}$ un solo polo in $z_0$ e questo è di ordine $n$, possiamo concludere:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta)-w)^{n+1}}d\zeta = \frac{1}{2n\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{(f(\zeta)-w_0)^n}d\zeta$$

$$= \frac{1}{n}Res_{z_0}\left(\frac{1}{(f(\zeta)-w_0)^n}\right) \tag{4.5.4}$$

$$= \frac{1}{n}\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\partial^{(n-1)}}{\partial z^{(n-1)}}\left(\frac{z-z_0}{f(z)-w_0}\right)^n\right]_{z=z_0}$$

e dunque la tesi. □

Diamo ora un'applicazione di questo circuito di idee alle equazioni algebriche. Come è ben noto, mentre ci sono formule che risolvono equazioni algebriche fino al quarto grado mediante radicali, non possono esistere per equazioni dal quinto grado in poi. Questo è un teorema di Abel (1823) e la questione è completamente chiarita dalla Teoria di Galois (1830-32). Prima del che Abel dimostrasse l'impossibilità di risolvere per radicale la quintica, la questione era molto studiata e, in sintonia con quanto fatto per equazioni di terzo e quarto grado, il primo passo che era ritenuto necessario era ridurre, mediante opportuni cambi di variabili, la ricerca delle radici di una quintica generale

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \tag{4.5.5}$$

allo studio di quintica più semplice, possibilmente una per la quale fosse possibile calcolare per radicali una radice. In questo modo il problema sarebbe stato riducendosi per divisione a un'equazione di grado al più 4 per la quale era disponibile una formula. Ovviamente quest'idea non poteva avere successo ma alcuni progressi furono fatti. In particolare Bring nel 1786 dimostrò il seguente risultato successivamente riscoperto indipendentemente da Jerrard nel 1836:

Proposizione 4.5.4: (Riduzione di Bring-Jerrard di una quintica) *L'equazione*

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \tag{4.5.6}$$

*è equivalente a un'equazione*

$$y^5+y+A=0 \tag{4.5.7}$$

*dove $A$ è esprimibile mediante radicali in funzione di $a, b, c, d, e$.*

Per una dimostrazione della Proposizione 4.5.4 si può vedere: J. Stillwell, *Eisenstein's Footnote*, The Mathematical Intelligencer, **17** (1995), 58-62. L'espressione (4.5.7) è stata oggetto di studio come applicazione elementare di diverse raffinate teorie. Seguendo un'idea di Eisenstein (1844), è possibile affrontare in modo elementare l'equazione 4.5.4 utilizzando le idee che abbiamo presentato in questo paragrafo. In realtà questo tipo di applicazioni, con metodi più o meno ortodossi, erano ben presenti a Lagrange e altri suoi contemporanei nel secolo XVIII.

L'idea per trovare radici di un'equazione del tipo (4.5.7) è quella di considerare la funzione $f(z) = z^5 + z$ e per $w \in \mathbb{C}$ trovare $z$ tale che $f(z) = w$. Dato che $f'(0) = 1 \neq 0$, allora $f$ è un biolomorfismo di un aperto $A$ che contiene 0 con $A' = f(A)$ un aperto che contiene $0 = f(0)$. Dunque per $w \in A'$, ossia sufficientemente vicino a 0, possiamo usare quanto fatto sopra per calcolare la radice $z = f^{-1}(w)$ dell'equazione $z^5 + z = w$. Non sara' una risuluzione per "radicali", sarà una risoluzione per "serie". L'idea ovviamente è quella di utilizzare il Teorema 4.5.3 per calcolare $f^{-1}$. In effetti il calcolo dei coefficienti utilizzando la formula (4.5.3) presenta difficoltà combinatorie che si possono evitare utilizzando l'espressione dei coefficienti data in (4.5.4) calcolando direttamente i residui. Questa è l'idea che sembra risalire a Eisenstein. Abbiamo il seguente:

PROPOSIZIONE 4.5.5: (Risoluzione per serie di una quintica) *Per* $w \in \mathbb{D}(0, \frac{4}{5\sqrt[4]{5}})$ *l'equazione* $f(z) = z^5 + z = w$ *ha radice*

$$z = f^{-1}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1} \binom{5k}{k} w^{4k+1} \tag{4.5.8}$$

*dove la serie converge uniformemente sui compatti di* $\mathbb{D}(0, \frac{4}{5\sqrt[4]{5}})$.

*Dimostrazione*: Dato che $f^{-1} = 0$, la funzione $f^{-1}$ ha sviluppo $f^{-1}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^n$ dove, usando (4.5.4), si calcolano i coefficienti mediante

$$c_n = \frac{1}{n} Res_0 \left( \frac{1}{f(z)^n} \right) = Res_0 \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{1}{z^5 + z} \right)^n \right].$$

Pertanto il coefficiente $c_n$ è dato dal coefficiente $a_{-1}$ del seguente sviluppo di Laurent:

$$\sum_{l=-n}^{\infty} a_l z^l = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{z^5 + z} \right)^n = \frac{1}{n} \frac{1}{z^n} \left(1 + z^4\right)^{-n}.$$

Ricordando la serie binomiale, che converge uniformemente sui compatti contenuti nel disco $\mathbb{D}(0, 1)$, abbiamo allora :

$$\sum_{l=-n}^{\infty} a_l^{(n)} z^l = \frac{1}{n} \frac{1}{z^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} z^{4k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} z^{4k-n}.$$

Confrontando i termini, si vede subito che ci sono due possibilità. Se $n - 1$ non è multiplo di 4, allora $a_{-1}^{(n)} = 0$. Se invece $n - 1 = 4k$ per qualche $k$, allora

$$c_n = a_{-1}^{(n)} = \frac{1}{n} \binom{-n}{k} = \frac{1}{n} \frac{-n(-n-1)(-n-2)\dots(-n-k+1)}{k!}$$

$$= (-1)^k \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \frac{(4k+2)(4k+3)\dots(5k)}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^k}{4k+1} \binom{5k}{k}.$$

Abbiamo dunque calcolato i coefficienti di (4.5.8). Per calcolare il raggio di convergenza della (4.5.8), occorre verificare che

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{4k+1}\binom{5k}{k}\right)^{\frac{1}{4k+1}}=\frac{5\sqrt[4]{5}}{4}. \tag{4.5.9}$$

Questo si dimostra utilizzando la formula di Stirling per $n!$ o la stima più grossolana ma elementare

$$\frac{n^n}{e^{n-1}}\le n!\le n\frac{n^n}{e^{n-1}} \tag{4.5.10}$$

per $n\ge 1$. Illustriamo qui come ottenere questa stima. Per $t\in\mathbb{R}$ denotiamo con $[t]$ e $\{t\}=t-[t]$ rispettivamente la parte intera e la parte frazionaria di $t$:

$$\ln n!=\sum_{k=1}^{n}\ln k=\sum_{k=1}^{n}k\ln k-\sum_{k=1}^{n}(k-1)\ln k=n\ln n-\sum_{k=1}^{n-1}k\left[\ln(k+1)-\ln k\right]$$

$$=n\ln n-\sum_{k=1}^{n-1}k\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}=n\ln n-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{[t]}{t}dt=n\ln n-\int_1^n\frac{[t]}{t}dt$$

$$=n\ln n-\int_1^n dt+\int_1^n\frac{\{t\}}{t}dt=n\ln n-(n-1)+\int_1^n\frac{\{t\}}{t}dt$$

da cui, dato che $0\le\int_1^n\frac{\{t\}}{t}dt\le\int_1^n\frac{1}{t}dt=\ln n$ segue immediatamente che

$$n\ln n-(n-1)\le\ln n!\le n\ln n-(n-1)+\ln n$$

che è equivalente, esponenziando, alla (4.5.10). Per calcolare (4.5.9), basta osservare che, per (4.5.10), si ha

$$\frac{1}{e}\frac{(5k)^{5k}}{(4k)^{4k}k^k}\le\frac{(5k)!}{(4k)!k!}\le\frac{k}{e}\frac{(5k)^{5k}}{(4k)^{4k}k^k}$$

ossia

$$\frac{1}{e}\frac{5^{5k}}{4^{4k}}\le\frac{(5k)!}{(4k)!k!}\le\frac{n}{e}\frac{5^{5k}}{4^{4k}}$$

da cui è facile ottenere il limite desiderato. □

# CAPITOLO 5

# Topologia e teoria di Cauchy

## 5.1. La versione omotopica della formula di Cauchy.

Cominciamo ricordando la nozione di omotopia di cammini. Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e siano $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to A$ due cammini (ossia due applicazioni continue) tali che

(i) $\gamma_0, \gamma_1$ hanno gli stessi estremi ossia $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ e $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$
oppure

(ii) $\gamma_0, \gamma_1$ sono cammini chiusi ossia $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$ e $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$.

I cammini $\gamma_0, \gamma_1$ si dicono *omotopi (in $A$)* se esiste una *omotopia da $\gamma_0$ a $\gamma_1$* ossia un'applicazione continua $H \colon [0,1] \times [a,b] \to A$ tale che nel caso (i) sia una *omotopia con estremi fissati*

$$\begin{cases} H(0,t) = \gamma_0(t) \quad \text{e} \quad H(1,t) = \gamma_1(t) \quad \text{per} \quad t \in [a,b] \\ \\ H(s,a) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a) \quad \text{e} \quad H(s,b) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b) \quad \text{per} \quad s \in [0,1] \end{cases} \tag{5.1.1}$$

e nel caso (ii) sia una *omotopia di cammini chiusi*

$$\begin{cases} H(0,t) = \gamma_0(t) \quad \text{e} \quad H(1,t) = \gamma_1(t) \quad \text{per} \quad t \in [a,b] \\ \\ H(s,a) = H(s,b) \quad \text{per} \quad s \in [0,1]. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Diremo che un cammino $\gamma \colon [a,b] \to A$ è *omotopo a costante* se per qualche punto $z \in A$ il cammino $\gamma \colon [a,b] \to A$ è omotopo al cammino costante $\gamma_z \colon [a,b] \to A$ definito da $\gamma_z(t) = z$. Lasciamo per esercizio la (facile) dimostrazione della seguente

PROPOSIZIONE 5.1.1: *L'omotopia è una relazione d'equivalenza.*

La seguente definizione è fondamentale:

DEFINIZIONE 5.1.1: Una aperto connesso $A \subset \mathbb{C}$ si dice *semplicemente connesso* se ogni cammino chiuso $\gamma \colon [a,b] \to A$ è omotopo a costante in $A$.

Non è facile dare in modo rigoroso una caratterizzazione geometrica degli aperti semplicemente connessi. Intuitivamente il fatto che ogni cammino chiuso sia omotopo a costante suggerisce che il suo sostegno sia deformabile con continuità a un punto. A sua volta questo suggerisce che l'aperto $A$ "non può avere buchi" ossia che il suo complemento $\mathbb{C} \setminus A$ non ha componenti connesse limitate. Questo fatto si può infatti dimostrare utilizzando la teoria delle funzioni olomorfe che stiamo presentando. Per il momento ci accontentiamo di osservare che ogni aperto convesso $A \subset \mathbb{C}$ è semplicemente connesso. Questo si vede facilmente nel modo seguente. Siano $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a, b] \to A$ due cammini di un aperto $A \subset \mathbb{C}$ chiusi tali che per ogni $t \in [a, b]$ il segmento $[\gamma_0(t)\gamma_1(t)]$ sia contenuto in $A$. Allora $\gamma_0$ e $\gamma_1$ sono omotopi mediante *l'omotopia lineare* $H \colon [0, 1] \times [a, b] \to A$ definita da

$$H(s, t) = \gamma_0(t) + s(\gamma_1(t) - \gamma_0(t)).$$

Se dunque $A$ è convesso ogni cammino chiuso è omotopo a costante mediante un'omotopia lineare.

In questa sezione vogliamo studiare a meno della relazione di omotopia l'integrale di funzioni olomorfe lungo le curve. Una difficoltà che si incontra subito nel confrontare integrali lungo curve $C^1$ a tratti omotope è che l'omotopia è una nozione "continua" e quindi la nostra definizione di integrale lungo una curva non sembra essere adeguata. Uno dei modi per risolvere questo problema si basa su un risultato di interpolazione. Prima di tutto una definizione. Diciamo che un cammino (continuo) $\alpha \colon [a, b] \to A$ è *lineare a tratti* se esiste una partizione $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$ dell'intervallo $[a, b]$ tale che per ogni $j = 0, \ldots, n-1$ la restrizione $\alpha_{|[t_j, t_{j+1}]}$ è la restrizione di una funzione affine ossia $\alpha_{|[t_j, t_{j+1}]}(t) = tz_j + w_j$ per opportuni $z_j$ e $w_j$. È immediato osservare che un cammino lineare a tratti è una curva $C^1$ a tratti.

TEOREMA 5.1.2: *Siano $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a, b] \to A$ due cammini omotopi. Allora esiste un numero finito di cammini $\alpha_0, \ldots, \alpha_N \colon [a, b] \to A$ tali che*
*(i) $\alpha_0 = \gamma_0$ e $\alpha_N = \gamma_1$;*
*(ii) $\alpha_j$ è lineare a tratti per ogni $j = 1, \ldots, N-1$;*
*(iii) $\alpha_j$ è linearmente omotopa a $\alpha_{j+1}$ per ogni $j = 0, \ldots, N-1$.*

*Dimostrazione*: Sia $H \colon [0, 1] \times [a, b] \to A$ un'omotopia fra i cammini $\gamma_0$ e $\gamma_1$. Dato che $[0, 1] \times [a, b]$ è compatto allora $H$ è uniformemente continua e $H([0, 1] \times [a, b])$ è un compatto contenuto in $A$. Allora

$$r = \frac{1}{2} dist(H([0,1]\times[a,b]), \mathbb{C}\setminus\overline{A}) = \frac{1}{2} \min\{dist(H(s,t), \mathbb{C}\setminus\overline{A}) \mid (s,t) \in [0,1]\times[a,b]\} > 0$$

e esiste un intero positivo $n$ tale che, per $(s, t), (s', t') \in [0, 1] \times [a, b]$ con $|s - s'| < \frac{1}{n}$ e $|t - t'| < \frac{1}{n}$, risulti

$$|H(s, t) - H(s', t')| < r.$$

Siano $s_0 = 0 < s_1 < \ldots, s_N = 1$ e $t_0 = a < t_1 < \ldots, t_N = b$ partizioni rispettivamente di $[0, 1]$ e $[a, b]$ tali che $|s_j - s_{j+1}| < \frac{1}{n}$ e $|t_j - t_{j+1}| < \frac{1}{n}$ per ogni $j = 0, \ldots, N-1$. Infine per $0 \le j, k \le N$ si definiscano $z_{j,k} = H(s_j, t_k)$ e per $0 \le j, k \le N-1$ siano $Q_{j,k} = [s_j, s_{j+1}] \times [t_k, t_{k+1}]$. Allora

$$H(Q_{j,k}) \subset \mathbb{D}(z_{j,k}, r) \subset A.$$

Per ogni $0 < j < N$ sia $\alpha_j \colon [a, b] \to A$ il cammino a lineare a tratti ottenuto componendo successivamente i segmenti $[z_{j,k}, z_{j,k+1}]$ per $k = 0, \ldots, N-1$. Inoltre poniamo $\alpha_0 = \gamma_0$ e $\alpha_N = \gamma_1$.

Per ogni $j, k = 0, \ldots, N-1$ i quattro punti $a_j(t_k) = z_{j,k}$, $a_j(t_{k+1}) = z_{j,k+1}$, $a_{j+1}(t_k) = z_{j+1,k}$, $a_{j+1}(t_{k+1}) = z_{j+1,k+1}$ sono tutti nel disco $D(z_{j,k}, r)$ che è convesso.

Dunque per ogni $j, k = 0, \ldots, N-1$ se $t \in [t_k, t_{k+1}]$ il segmento che congiunge $a_j(t)$ a $a_{j+1}(t)$ è tutto contenuto nel disco $\mathbb{D}(z_{j,k}, r)$ e quindi in $A$. Dunque per ogni $t \in [a, b]$ il segmento che congiunge $a_j(t)$ a $a_{j+1}(t)$ è tutto contenuto in $A$. Come già osservato allora i cammini $\alpha_j$ e $a_{j+1}$ sono omotopi mediante un'omotopia lineare.

$\square$

Utilizziamo ora questo processo di interpolazione lineare dell'omotopia per dimostrare il risultato principale di questo paragrafo.

TEOREMA 5.1.3: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a, b] \to A$ due cammini $C^1$ a tratti omotopi (come cammini chiusi o con estremi fissati). Allora se $f \colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa, si ha*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz. \tag{5.1.3}$$

*Dimostrazione*: Grazie al Teorema 5.1.2 possiamo ridurci al caso in cui che esista un'omotopia lineare fra $\gamma_0$ e $\gamma_1$. In fatti se il risultato è vero in questo caso, siano $\alpha_0 = \gamma_0, \ldots, \alpha_N = \gamma_1$ i cammini a due a due linearmente omotopi trovati grazie al Teorema 5.1.2; allora

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\alpha_0} f(z)dz = \int_{\alpha_1} f(z)dz = \ldots = \int_{\alpha_N} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Assumiamo dunque $\gamma_0$ e $\gamma_1$ siano omotopi mediante l'omotopia lineare $H$ definita, per $(s, t) \in [0, 1] \times [a, b]$, da

$$H(s, t) = \gamma_0(t) + s(\gamma_1(t) - \gamma_0(t)).$$

Posto $\gamma_s(t) = H(s, t) = \gamma_0(t) + s(\gamma_1(t) - \gamma_0(t))$, allora $\gamma_s \colon [a, b] \to A$ è una curva $C^1$ a tratti per ogni $s \in [0, 1]$. Per semplicità denotiamo $\delta(t) = \gamma_1(t) - \gamma_0(t)$ e quindi avremo $\gamma_s(t) = H(s, t) = \gamma_0(t) + s\delta(t)$. Se definiamo per $s \in [0, 1]$

$$\phi(s) = \int_{\gamma_s} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma_s(t))\gamma_0'(t)dt + s\int_a^b f(\gamma_s(t))\delta'(t)dt,$$

dimostriamo ora che $\phi$ è costante da cui ovviamente segue il risultato. La funzione $\phi$ è continua su $[0, 1]$ e derivabile su $(0, 1)$ e la derivata si calcola differenziando sotto il segno di integrale e osservando che $\frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t) = \delta(t)$:

$$\begin{aligned}
\phi'(s) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}[f(\gamma_s(t))\gamma_0'(t)]dt + \int_a^b f(\gamma_s(t))\delta'(t)dt + s\int_a^b \frac{\partial}{\partial s}[f(\gamma_s(t))\delta'(t))]dt \\
&= \int_a^b f'(\gamma_s(t))\delta(t)\gamma_0'(t)dt + \int_a^b f(\gamma_s(t))\delta'(t)dt + s\int_a^b f'(\gamma_s(t))\delta(t)\delta'(t)dt \\
&= \int_a^b \delta(t)f'(\gamma_s(t))\gamma_s'(t)dt + \int_a^b f(\gamma_s(t))\delta'(t)dt \\
&= \int_a^b [\delta(t)\frac{d}{dt}f(\gamma_s(t)) + f(\gamma_s(t))\delta'(t)]dt = \int_a^b \frac{d}{dt}[\delta(t)f(\gamma_s(t))]dt \\
&= \delta(b)f(\gamma_s(b)) - \delta(a)f(\gamma_s(a)).
\end{aligned}$$

Se $\gamma_0$ e $\gamma_1$ sono due curve con estremi coincidenti allora

$$\delta(a) = \gamma_1(a) - \gamma_0(a) = 0 \quad \text{e} \quad \delta(b) = \gamma_1(b) - \gamma_0(b) = 0.$$

Se $\gamma_0$ e $\gamma_1$ sono due curve chiuse allora $H$ è un'omotopia tra tra curve chiuse. Allora posto $z_s = H(s,a) = H(s,b)$ per ogni $s \in [0,1]$ si ha

$$\delta(b)f(\gamma_s(b)) - \delta(a)f(\gamma_s(a)) = (z_1 - z_0)f(z_s) - (z_1 - z_0)f(z_s) = 0.$$

In tutti i casi concludiamo $\phi'(s) = 0$ e quindi che $\phi$ è costante. □

Come corollario si ottiene immediatamente la versione omotopica del Teorema di Cauchy:

Teorema 5.1.4: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $\gamma\colon [a,b] \to A$ un cammino chiuso $C^1$ a tratti omotopo a costante. Allora se $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa, si ha*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0. \tag{5.1.4}$$

*In particolare allora la (5.1.4) vale per ogni cammino chiuso $\gamma$ se $A$ è semplicemente connesso.*

Per aperti convessi, dal Teorema di Goursat e dalla Proposizione 3.2.4, segue che una funzione olomorfa ammette primitiva olomorfa globale. Usando il Teorema 5.1.4 si dimostra che in effetti questa è una proprietà che vale per aperti semplicemente connessi:

Teorema 5.1.5: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso e sia $f$ una funzione olomorfa su $A$. Allora $f$ ha una primitiva olomorfa su $A$ ossia esiste $F$ olomorfa su $A$ tale che $F' = f$. La funzione $F$ è unica a meno di costanti. In altre parole per ogni* *funzione $f$ una funzione olomorfa su un aperto semplicemente connesso $A$, la forma $f dz$ è esatta.*

*Dimostrazione*: È una conseguenza immediata della Proposizione 3.2.2 e del Teorema di Cauchy 5.1.4. Dato che due funzioni olomorfe su un aperto connesso con derivata coincidente differiscono per una costante, è immediato ossevare che la primitiva è unica a meno di costanti. □

Come abbiamo già osservato, l'intuizione suggerisce che un dominio in $A \subset \mathbb{C}$ è semplicemente connesso se e solo se il suo complemento $\mathbb{C} \setminus A$ non ha componenti connesse limitate. Questo si può effettivamente dimostrare e lo faremo più tardi.

## 5.2. Il numero d'avvolgimento.

Definizione 5.2.1: Siano $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva chiusa $C^1$ a tratti e $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\gamma([a, b])$ un punto non appartenente al sostegno di $\gamma$. Il *numero d'avvolgimento* (o *indice*) di $\gamma$ rispetto a $z_0$ è definito da

$$n(z_0, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta. \tag{5.2.1}$$

Se $\Gamma = \sum_{j=1}^{n} m_j \gamma_j$ è una catena e $z_0$ è nel complemento di ogni curva $\gamma_j$, si definisce il *numero d'avvolgimento* (o *indice*) di $\Gamma$ rispetto a $z_0$ il numero

$$n(z_0, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = \sum_{i=1}^{n} m_j n(z_0, \gamma_j). \tag{5.2.2}$$

Il numero di avvolgimento ha un importante significato geometrico. Conta, tenendo conto del verso di percorrenza, il numero di volte che si "gira attorno" $z_0$ mentre si percorre la curva $\gamma$. Per convicersi di questo si può procedere nel modo seguente. Per $\zeta$ che varia lungo il sostegno della curva $\gamma$ si ponga

$$\zeta = z_0 + \rho(\zeta) e^{i\theta(\zeta)} = z_0 + \rho e^{i\theta}$$

dove evidentemente

$$\rho = \rho(\zeta) = |\zeta - z_0| \quad \text{e} \quad e^{i\theta} = e^{i\theta(\zeta)} = \frac{\zeta - z_0}{|\zeta - z_0|}.$$

Dunque differenziando

$$d\zeta = e^{i\theta} d\rho + i\rho e^{i\theta} d\theta = \frac{\zeta - z_0}{|\zeta - z_0|} d(|\zeta - z_0|) + i(\zeta - z_0) d\theta$$

e quindi
$$\frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} d\log(|\zeta - z_0|) + \frac{1}{2\pi} d\theta.$$
Integrando, allora,
$$n(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma d\log(|\zeta - z_0|) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_\gamma d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\gamma d\theta$$
e l'ultimo integrale in effetti misura l'angolo totale spazzato dal segmento che congiunge $z_0$ al punto che varia lungo tutto il percorso della curva $\gamma$.

L'argomento che abbiamo presentato, pur intuitivamente corretto, non è però rigoroso. Infatti abbiamo utilizzato la funzione argomento $\theta$ con grande disinvoltura senza preoccuparci del fatto che non è ben definita su un qualunque aperto. In realtà la forma differenziale $d\theta$ si può definire anche quando la funzione $\theta$ non è ben definita e questo fatto rende ragionevole quello che abbiamo fatto. Piuttosto che seguire questa direzione di lavoro, dimostreremo le proprietà del numero di avvolgimento in modo diverso e più semplice. Prima di tutto osserviamo che è un intero:

Teorema 5.2.1: *Sia $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un cammino chiuso $C^1$ a tratti e sia $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$. Allora*
$$n(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta \in \mathbb{Z}.$$
*Inoltre la funzione $n(\bullet,\gamma)\colon \mathbb{C}\setminus\gamma([a,b]) \to \mathbb{Z}$ è continua ed è quindi costante su ogni componente connessa di $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$. In particolare $n(\bullet,\gamma)$ è identicamente nulla sulla componente connessa illimitata di $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$. Infine se $\gamma_1,\gamma_2\colon [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ sono cammini chiusi $C^1$ a tratti omotopi (in $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$) allora $n(z_0,\gamma_1) = n(z_0,\gamma_2)$.*

*Dimostrazione*: Si definisca per $x \in [a,b]$
$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt. \tag{5.2.3}$$
Dato che
$$n(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt,$$
dobbiamo dimostrare che $F(b) \in \mathbb{Z}$. La funzione $F$ definita da (5.2.3) è continua su $[a,b]$ e ha derivata (nei punti dove $\gamma$ è di classe $C^1$):
$$F'(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\gamma'(x)}{\gamma(x) - z_0}.$$
Allora la funzione $G$ definita su $[a,b]$ da
$$G(x) = e^{-2\pi i F(x)}(\gamma(x) - z_0)$$
è continua e, nel complemento in $[a,b]$ del numero finito di punti dove $\gamma$ non è di classe $C^1$ ha derivata data da:

$$G'(x) = -2\pi i F'(x) e^{-2\pi i F(x)}(\gamma(x) - z_0) + e^{-2\pi i F(x)}\gamma'(x) = 0.$$

Allora $G$ è continua e costante a tratti e quindi è costante. In particolare possiamo concludere che

$$e^{-2\pi i F(b)}(\gamma(b) - z_0) = G(b) = G(a) = e^{-2\pi i F(a)}(\gamma(a) - z_0) = \gamma(a) - z_0.$$

Dato che $\gamma(a) = \gamma(b) \neq z_0$, allora segue che $e^{2\pi i F(b)} = 1$ da cui segue la tesi.

La funzione $n(\bullet, \gamma)$ è continua dato che l'integrando $\frac{1}{\zeta - z}$ è continuo in $z$ per $z \notin \gamma([a,b])$. Inoltre la funzione continua $n(\bullet, \gamma)$ a valori in $\mathbb{Z}$ necessariamente è costante sulle componenti connesse del suo dominio di definizione. Infine si osservi che, dato che $\gamma([a,b])$ è un compatto, esiste un disco $\mathbb{D}(0,R)$ tale che $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{D}(0,R)$. Dunque la componente connessa $U$ di $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ che contiene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(0,R)$ è l'unica illimitata. Sia allora $z \in U$ con $|z| > R$. Allora per $\zeta \in \gamma([a,b])$ si deve avere

$$|\zeta - z| \geq |z| - R$$

e quindi

$$|n(z,\gamma)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{L(\gamma)}{|z| - R}$$

da cui segue che $|n(z,\gamma)| \to 0$ per $|z| \to \infty$. Questo può succedere solo se $n(z,\gamma) = 0$ per ogni $z \in U$. Infine il Teorema 5.1.3 implica immediatamente che $n(z_0, \gamma_1) = n(z_0, \gamma_2)$ se $\gamma_1, \gamma_2 \colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ sono cammini chiusi $C^1$ a tratti omotopi in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. $\square$

Per le frontiere di aperti limitati il numero di avvolgimento ha la seguente semplice interpretazione:

TEOREMA 5.2.2: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato con frontiera $\partial A$ unione finita di curve semplici chiuse $C^1$ a tratti a due a due disgiunte. Allora, inteso che si integra lungo la frontiera orientata $\partial A$ di $A$,*

$$n(z, \partial A) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{A} \\ 1 & \text{se } z \in A. \end{cases}$$

*Dimostrazione*: Si osservi che il risultato è immediato nel caso in cui $A = \mathbb{D}$ sia un disco. Sia $A$ arbitrario e sia $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{A}$. Allora esiste un aperto $U$ con $A \subset U$ e con $z \notin U$. Allora la funzione $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ è olomorfa su $U$ e quindi dal Teorema di Cauchy 3.1.8 segue che:

$$n(z, \partial A) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial A} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

Supponiamo che $z \in A$. Allora sia $r > 0$ tale che $\mathbb{D} = \mathbb{D}(z,r) \subset \overline{\mathbb{D}(z,r)} \subset A$ e si definisca $A' = A \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Allora $z \notin A'$ e $\partial A' = \partial A - \partial \mathbb{D}$ e quindi possiamo concludere

$$0 = n(z, \partial A') = n(z, \partial A) - n(z, \partial \mathbb{D}) = n(z, \partial A) - 1$$

e quindi la tesi segue. $\square$

Come conseguenza del Teorema di Cauchy 5.1.4, si dimostra la seguente versione della formula di Cauchy:

TEOREMA 5.2.3: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $\gamma\colon [a,b] \to A$ un cammino chiuso $C^1$ a tratti omotopo a costante in $A$. Allora se $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa, per ogni $z \in A \setminus \gamma([a,b])$ si ha*

$$n(z,\gamma)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta. \tag{5.2.4}$$

*Dimostrazione*: Si fissi $z \in A \setminus \gamma([a,b])$ e si definisca una funzione $F$ su $A$ mediante

$$F(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{se } w \neq z \\ f'(z) & \text{se } w = z. \end{cases}$$

Allora, per costruzione, $F$ è continua e olomorfa per $w \neq z$. Segue allora che $F$ è olomorfa su $A$ e, per il Teorema di Cauchy, si ha

$$0 = \int_\gamma F(\zeta)d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - f(z)\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}d\zeta,$$

da cui segue la tesi. □

## 5.3. Logaritmi e radici

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso. Una funzione $f \in C^0(\Omega)$ si dice *ramo di logaritmo* (o semplicemente un *logaritmo*) in $\Omega$ se si ha

$$e^{f(z)} = z \qquad \forall z \in \Omega. \tag{5.3.1}$$

Evidentemente, dato che $e^{f(z)} \neq 0$, è necessario supporre che $0 \notin \Omega$. Vedremo che questa condizione necessaria non è affatto sufficiente, ma intanto alcune osservazioni preliminari indispensabili. E' evidente, per cominciare, che a causa della periodicità della fuzione esponenziale, non si ha "unicità" del logaritmo. Infatti se vale (5.3.1) per $f \in C^0(\Omega)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ la funzione $f + 2k\pi i$ è un logaritmo. D'altra parte questa è l'unica possibile indeterminatezza se $\Omega$ è connesso. Infatti se $f, g \in C^0(\Omega)$ sono due logaritmi allora

$$e^{f(z)-g(z)} = \frac{e^{f(z)}}{e^{g(z)}} = 1$$

per ogni $z \in \Omega$ e quindi

$$\frac{1}{2\pi i}(f(z) - g(z)) \in \mathbb{Z}.$$

Dunque $\frac{1}{2\pi i}(f - g)$ è una funzione continua su un connesso a valori in $\mathbb{Z}$ e pertanto costante. In conclusione deve essere $g = f + 2k\pi i$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

Cerchiamo ora di definire un logaritmo su una parte di $\mathbb{C}$ che sia più estesa possibile.

**Definizione.** L'*argomento principale* di $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è l'unico numero $Arg(z) = \theta \in (-\pi, \pi]$ tale che $z = |z|e^{i\theta}$.

Si vede subito che la funzione $Arg$ non è continua su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma è di classe $C^\infty$ su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Se per $r \in (0, +\infty)$ denotiamo con $\log r$ l'usuale logaritmo naturale, è immediato verificare che la funzione definita da

$$Log\, z = \log|z| + iArg(z) \tag{5.3.2}$$

è un ramo di logaritmo su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Ci riferiremo alla funzione $Log$ definita in (5.3.2) come *logaritmo principale*. Si osservi che il logaritmo principale è di classe $C^\infty$. Evidentemente allo stesso modo si può definire un ramo di logaritmo sul complemento di ogni semiretta uscente dall'origine. A tal fine basta definire l'argomento in modo che assuma valori compresi in $(\alpha - 2\pi, \alpha]$, dove $\alpha$ è l'angolo fra l'asse reale e la semiretta in questione. Procedendo come prima si ottiene un altro ramo di logaritmo. In generale abbiamo la seguente:

PROPOSIZIONE 5.3.1: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un aperto connesso e $f \in C^0(\Omega)$ un logaritmo. Allora $f$ è una funzione olomorfa con derivata $f'(z) = \frac{1}{z}$. Fissato $a \in \Omega \setminus (-\infty, 0]$, esiste una costante $k \in \mathbb{Z}$ tale che per ogni $z \in \Omega$, si ha*

$$f(z) = Log\, a + \int_{\gamma_z} \frac{dz}{z} + 2k\pi i \tag{5.3.3}$$

*dove $Log$ è il logaritmo principale e $\gamma_z$ è una qualunque curva $C^1$ a tratti con primo estremo in $a$ e secondo in $z$.*

*Dimostrazione*: Per definizione la funzione $f\colon \Omega \to f(\Omega)$ è biettiva con inversa la funzione esponenziale. Siano $z, z_0 \in \Omega$ e $w = f(z), w_0 = f(z_0)$. Allora per $z \neq z_0$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{w \to w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}.$$

Per concludere la dimostrazione basta osservare che per qualche intero $k$ si deve avere $f(a) = Log\, a + 2k\pi i$ e che, dato che $f$ è una primitiva olomorfa di $\frac{1}{z}$ , allora $f(z) = f(a) + \int_{\gamma_z} \frac{dz}{z}$. □

Il seguente risultato caratterizza gli aperti sui quali è definito un ramo di logaritmo:

TEOREMA 5.3.2: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un aperto connesso, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
*(i) Esiste un ramo di logaritmo su $\Omega$.*
*(ii) La funzione $\frac{1}{z}$ ha una primitiva olomorfa su $\Omega$.*
*(iii) per ogni curva chiusa $C^1$ a tratti $\gamma$ con sostegno in $\Omega$ si ha $n(\gamma, 0) = 0$.*

*In particolare, se $\Omega$ è semplicemente connesso, allora esiste un ramo di logaritmo su $\Omega$.*

*Dimostrazione*: In Proposizione 5.3.1 è dimostrato che (i) $\Rightarrow$ (ii). Dimostriamo che che (ii) $\Rightarrow$ (i): Se $g$ è una primitiva olomorfa di $\frac{1}{z}$ su $\Omega$, allora

$$(ze^{-g(z)})' = e^{-g(z)} - zg'(z)e^{-g(z)} = 0$$

e quindi, dato che $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ è connesso, $ze^{-g(z)}$ è una funzione costante non nulla. Allora per qualche $c$ su $\Omega$ si ha $ze^{-g(z)} = e^c$ da cui segue che $f(z) = g(z) + c$ è un ramo di logaritmo.

Se vale la (iii) ovviamente $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$ per ogni curva chiusa $C^1$ a tratti $\gamma$ con sostegno in $\Omega$. Quest'ultimo fatto sappiamo che implica l'esistenza di una primitiva olomorfa di $\frac{1}{z}$ su $\Omega$ ossia a (ii).

Infine se $\Omega$ è semplicemente connesso allora ogni curva chiusa $C^1$ a tratti $\gamma$ con sostegno in $\Omega$ è omotopa a costante in $\Omega$ e quindi si ha $n(\gamma, 0) = 0$. $\square$

Più in generale su un aperto semplicemente connesso esiste sempre un logaritmo olomorfo di una funzione olomorfa che non si annulla:

TEOREMA 5.3.3: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso e sia $f\colon \Omega \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una funzione olomorfa. Allora esiste una funzione olomorfa $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ tale che $e^g = f$*

*Dimostrazione*: Se $f$ non si annulla mai, allora la funzione olomorfa $h = f'/f$ ha una primitiva olomorfa $F$ su $\Omega$ per il Teorema 5.1.5. Dato che $\Omega$ è connesso e che $(fe^{-F})' = 0$ si ha che $fe^{-F} = k \neq 0$ per qualche costante $k$. Se $k = e^c$ allora $f = e^{c+F}$ e quindi $g = c + F$. $\square$

Si osservi che, nel caso in cui sull'immagine $f(\Omega)$ della funzione $f$ sia definito un ramo di logaritmo $Log\, z$, allora come logaritmo olomorfo della funzione $f$ si può scegliere semplicemente $g = Log \circ f$. D'altro canto il Teorema 5.3.3 si può applicare a situazioni più generali. Ad esempio alla funzione $f(z) = z^2$ definita sul complemento dell'asse reale negativo $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ si applica il Teorema 5.3.3 mentre su $\mathbb{C}^* = f(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ non è definito alcun ramo di logaritmo.

Esattamente come si procede per definire le potenze reali di esponente arbitrario, una volta in possesso di una buona nozione di logaritmo, si può provare a definire potenze con esponente complesso arbitrario.

Siano $a \in \mathbb{C}^*$, e $b \in \mathbb{C}$. Se $Log\, a$ è un qualsiasi valore del logaritmo di $a$, definiamo *un valore della potenza $b$-esima di $a$* il numero complesso

$$a^b = e^{bLog\, a}. \tag{5.3.4}$$

Naturalmente, dato che $Log\, a$ è determinato a meno di multipli interi di $2\pi i$, il numero $a^b$ definito da (5.3.4) è determinato a meno di un fattore del tipo $e^{2kb\pi i}$ per qualche intero $k$. A causa di questo fatto occorre essere prudenti nell'utilizzare la definizione (5.3.4). Ad esempio se $b \in \mathbb{Z}$ è un intero, allora vi è un solo valore per $a^b$ e questo è l'usuale potenza $b$-esima di $a$. Nel caso in cui $b \in \mathbb{Q}$ è razionale, allora vi sono un numero finito di valori per $a^b$. Per convincersene basta considerare il caso $b = \frac{1}{n}$ per $n$ intero positivo. In questo caso si ha

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} = e^{\frac{2l\pi i}{n}} \iff k - l = 0 \ (\mathrm{mod}\, n)$$

e $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ può assumere esattamente $n$ valori distinti, le radici $n$-esime dell'unità:

$$\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \zeta_n^2 = e^{\frac{4k\pi i}{n}}, \dots, \zeta_n^{n-1} = e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}, \zeta_n^n = 1$$

Pertanto $a^{\frac{1}{n}}$ assume $n$ valori:

$$e^{\frac{Log\, a}{n}}, \zeta_n e^{\frac{log\, a}{n}}, \dots, \zeta_n^{n-1} e^{\frac{Log\, a}{n}}$$

dove $Log\, a$ è un qualunque valore del logaritmo di $a$. In questo caso allora, come ci si poteva aspettare la potenza con esponente $\frac{1}{n}$ è esattamente la radice $n$-esima di un numero complesso. Se invece $b \notin \mathbb{Q}$ non è un numero razionale, allora, al variare di $k \in \mathbb{Z}$ l'esponenziale $e^{2kb\pi i}$ assume infiniti valori e quindi, in questo caso vi sono infiniti valori per $a^b$.

Ricordiamo infine che per un intero positivo $b = 1, 2, \dots$ si ha $0^b = 0$ e che si pone $0^0 = 1$. Chiariti questi preliminari è possibile considerare funzioni definite per mezzo di potenze. Per ogni fissato logaritmo $Log$ su un aperto contenente $a$, la *funzione esponenziale $z \mapsto a^z$ con base $a \in \mathbb{C}^*$* è definita su tutto $\mathbb{C}$ ed è olomorfa con derivata data da $(a^z)' = Log\, a\, a^z$. Si osservi che, dalle proprietà dell'esponenziale, segue immediatamente che $a^{z+w} = a^z a^w$. Evidentemente per diverse scelte del valore del logaritmo di $a$ si ottengono esponenziali diversi che differiscono l'uno dall'altro per un fattore del tipo $e^{2k\pi i z}$ per un opportuno $k \in \mathbb{Z}$.

Per definire in modo appropriato la funzione potenza $b$-esima, dato che in generale si tratta di invertire una funzione non iniettiva, si incontrano le stesse difficoltà incontrate per il logaritmo. In effetti per superare il problema ci riconduciamo alla la costruzione fatta per i logaritmi. Sia $b \in \mathbb{C}$ fissato e sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto su cui è definito un ramo di logaritmo $Log\, z$. La funzione definita $f$ su $A$ da $f(z) = e^{bLog\, z}$ si dice *ramo della potenza $b$-esima*. Se non ci sono ambiguità scriveremo semplicemente $f(z) = z^b$ per un ramo di potenza $b$-esima. Qualunque ramo di potenza è una funzione olomorfa e per la derivata si ha:

$$(z^b)' = \frac{b}{z} e^{bLog\, z} = be^{(b-1)Log\, z} = bz^{b-1}$$

dove evidentemente $z^{b-1}$ è il ramo della potenza $(b-1)$-esima definito su $A$ dallo stesso ramo di logaritmo che definisce $z^b$. Si osservi che l'usuale relazione $(zw)^b = z^b w^b$ non vale per tutti i rami di potenza $b$-esima ma solo se per il ramo di logaritmo utilizzato nella definizione si ha $Log(zw) = Log\, z + Log\, w$.

Naturalmente in generale bisogna aspettarsi molti rami per la stessa potenza, il più delle volte infiniti. Per un esponente intero, dalla discussione fatta, segue che c'è un solo ramo di potenza che è esattamente la funzione $z \mapsto z^n$ usuale. È utile sottolineare il caso delle radici ossia delle potenze $\frac{1}{n}$-esime per $n$ intero positivo. Se come prima denotiamo $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, fissato su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ un ramo $Logz$ di logaritmo, allora

$$e^{\frac{Log\, z}{n}}, \zeta_n e^{\frac{Log\, z}{n}}, \dots, \zeta_n^{n-1} e^{\frac{Log\, z}{n}} \tag{5.3.5}$$

definiscono $n$ rami della potenza $z^{\frac{1}{n}}$

Proposizione 5.3.4: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso sul quale è definito un ramo di logaritmo $Log\, z$. Se $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua tale che $(f(z))^n = z$ per ogni $z \in A$, allora $f$ è una delle funzioni definite in (5.3.5).*

*Dimostrazione*: Sia $r_0(z) = e^{\frac{Log\, z}{n}}$. Allora per ogni $z \in A$ si ha $\left(\frac{f(z)}{r_0(z)}\right)^n = 1$. Dunque per qualche $j = 0, \dots, n-1$ si ha $\frac{f(z)}{r_0(z)} = \zeta_n^j$. In altre parole la fuzione continua $\frac{f(z)}{r_0(z)}$ definita su un aperto connesso à valori nello spazio discreto $\{1, \zeta_n, \dots, \zeta_n^{n-1}\}$. Dunque $\frac{f(z)}{r_0(z)}$ è costante e quindi $f$ è una delle funzioni definite in (5.3.5). □

Questa osservazione è spesso molto utile:

PROPOSIZIONE 5.3.5: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto tale che per ogni funzione olomorfa che non si annulla ammette un logaritmo olomorfo. Allora ogni funzione olomorfa su $\Omega$ che non si annulla ammette una radice $n$-esima olomorfa ossia per ogni funzione olomorfa $g$ su $\Omega$ con $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$, esiste $h$ olomorfa su $\Omega$ con $h^n = g$. L'ipotesi vale se $\Omega$ è semplicemente connesso.*

*Dimostrazione*: Se $g$ non si annulla mai, sia $f$ la funzione olomorfa su $\Omega$ con $g = e^f$. Allora $h = e^{f/n}$ è la radice $n$-esima olomorfa cercata. □

La funzione $f(z) = z^2$ ha ovviamente una radice quadrata olomorfa anche su $\mathbb{C}^*$ che non è semplicemente connesso. Vedremo più tardi che se invece su un aperto ogni funzione olomorfa che non si annulla ammette radice $n$-esima olomorfa per ogni $n$, allora ogni funzione olomorfa che non si annulla ammette logaritmo olomorfo e l'aperto è necessariamente semplicemente connesso.

Chiudiamo il paragrafo con un'applicazione della Proposizione 5.3.5 allo studio locale delle funzioni olomorfe.

TEOREMA 5.3.6: *Sia $f$ una funzione olomorfa su un aperto $A$. Siano $z_0 \in A$ e $w_0 = f(z_0)$. Se $n \geq 1$ è la molteplicità dello zero della funzione $f(z) - w_0$ in $z_0$, allora esistono un aperto $U \ni z_0$, un disco $V$ centrato nell'origine* 0 *e un biolomorfismo $H\colon V \to U$ tali che per ogni $\zeta \in V$ si ha:*

$$f \circ H(\zeta) = f(H(\zeta)) = \zeta^n + w_0. \tag{5.3.6}$$

*Dimostrazione*: Esiste un disco aperto $\mathbb{D} \subset A$ centrato in $z_0$ tale che su $\mathbb{D}$ si ha $f(z) - w_0 = (z - z_0)^n g(z)$ con $g$ olomorfa con $g(z_0) \neq 0$ e quindi, se $\mathbb{D}$ ha raggio sufficientemente piccolo, con $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. Per la Proposizione 5.3.5, esiste una funzione olomorfa $h$ su $\mathbb{D}$ tale che $h^n = g$. Segue allora che, per $z \in \mathbb{D}$ si ha $f(z) - w_0 = [(z - z_0)h(z)]^n$. Si definisca $G(z) = (z - z_0)h(z)$. Allora $G$ è olomorfa su $\mathbb{D}$, $G(z_0) = 0$ e $G'(z_0) = h(z_0) \neq 0$. Dunque, per il teorema dell'applicazione inversa, esistono aperti $U \ni z_0$, $V \ni 0$ tali che $G_{|U}\colon U \to V$ è un biolomorfismo. Evidentemente si può sempre scegliere $V$ come un disco centrato nell'origine. L'inverso $H = \left(G_{|U}\right)^{-1}$ è il biolomorfismo richiesto. Infatti per $\zeta \in V$ si ha:

$$f(H(\zeta)) = [(G(H(\zeta))]^n + w_0 = \zeta^n + w_0.$$

□

Il teorema Teorema 5.3.6 ci permette di trarre alcune importanti conclusioni sul comportamento locale di funzioni olomorfe intese come trasformazioni di sottoinsiemi di $\mathbb{C}$. Alla prima parte del seguente risultato ci si riferisce in letteratura come il *Teorema dell'applicazione aperta*. Ne daremo ulteriore dimostrazione più tardi in un contesto differente.

Teorema 5.3.7: *Sia $f$ una funzione olomorfa non costante su un aperto connesso $A$. Allora $f(A)$ è un aperto di $\mathbb{C}$. Inoltre per ogni $z_0 \in A$, se $w_0 = f(z_0)$ la molteplicità dello zero della funzione $f(z) - w_0$ in $z_0$ è $n \geq 1$ e esistono aperti $U \subset A$ contente $z_0$, $W \subset f(A)$ contente $w_0 = f(z_0)$ tali che:*
*(i) il valore $w_0$ non è assunto da $f$ in altri punti di $U$ oltre $z_0$;*
*(ii) ogni altro valore $w \neq w_0$ di $W$ è assunto esattamente in $n$ punti distinti $z_1, \ldots, z_n$ di $V$ e la molteplicità degli zeri di $f(z) - f(z_j)$ è 1 per ogni $j = 1, \ldots, n$.*

*Dimostrazione*: Si osservi preliminarmente che l'applicazione $p_n(\zeta) = \zeta^n$ per $n \geq 1$ trasforma dischi centrati nell'origine in dischi centrati nell'origine. Dato che $f$ è non costante e $A$ è connesso, allora per ogni $z_0 \in A$ la molteplicità dello zero di $f(z) - f(z_0)$ è $n \geq 1$. Siano dunque l'aperto $U \ni z_0$, il disco $V$ centrato nell'origine 0 e il biolomorfismo $H: V \to U$ trovati nel Teorema 5.3.6 tali che per ogni $\zeta \in V$ si abbia:

$$f(H(\zeta)) = \zeta^n + w_0.$$

Se $W = f(U)$, allora $W = \{w = \zeta^n + w_0 \mid \zeta \in V\}$ è un disco centrato in $w_0$ contenuto in $f(A)$. Per l'arbitrarietà di $z_0 \in A$, abbiamo allora che $f(A)$ è un aperto. Inoltre, dato che $H$ è biettiva allora $(i)$ e $(ii)$ seguono immediatamente dal fatto che l'unica radice $n$-esima di 0 è 0 (con molteplicità $n$) e mentre ogni altro numero complesso ha $n$ radici $n$-esime ciascuna di molteplicità 1. □

**Esercizi**

**1.** Dimostrare che l'argomento principale non ha estensione continua su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma è di classe $C^\infty$ su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

**2.** Dimostrare che, per $|z| < 1$, vale il seguente sviluppo di Taylor:

$$Log(1 + z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k.$$

**3.** Siano $f, g$ funzioni intere (ossia olomorfe su $\mathbb{C}$). Dimostrare che $f^2 + g^2 \equiv 1$ su $\mathbb{C}$ se e solo se esiste una funzione intera $h$ tale che $f = \cos h$ e $g = \sin h$. *Consiglio: se $1 \equiv f^2 + g^2 = (f + ig)(f - ig)$ allora la funzione $f + ig$ è olomorfa e mai nulla su $\mathbb{C}$ che è semplicemente connesso....*

## 5.4. Proprietà topologiche di aperti semplicemente connessi.

In questo paragrafo studiamo l'equivalenza di proprietà geometriche e proprietà analitiche che valgono per aperti semplicemente connessi. Ci occorre, per cominciare, il seguente risultato sul quale torneremo in seguito:

Teorema 5.4.1: (di Liouville) *Una funzione intera limitata è costante.*

*Dimostrazione*: . Sia $f(z)$ una funzione intera (ossia olomorfa su tutto $\mathbb{C}$) limitata e sia $M > 0$ tale che $|f(z)| < M$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Dunque per ogni $z \in \mathbb{C}$ vale lo viluppo di Taylor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

D'altra parte, se $R > 0$, per ogni $k \geq 1$, utilizzando la formula di Cauchy per le derivate di $f$, abbiamo

$$0 \leq \left| f^{(k)}(0) \right| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{R^{k+1}} 2\pi R = k! \frac{M}{R^k}.$$

Dato che $R > 0$ è arbitrario, necessariamente deve essere $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \geq 0$ e quindi $f$ è costante. $\square$

Possiamo ora generalizzare il Teorema 5.2.3:

Teorema 5.4.2: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $\gamma: [a, b] \to A$ un cammino chiuso $C^1$ a tratti tale che $n(z, \gamma) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus A$. Allora se $f: A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa,*

$$\int\limits_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0 \tag{5.4.1}$$

*e per ogni $z \in A \setminus \gamma([a, b])$ si ha*

$$n(z, \gamma) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{5.4.2}$$

*Dimostrazione*: Siano $\gamma: [a, b] \to A$ un cammino chiuso $C^1$ a tratti tale che $n(z, \gamma) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus A$ e $f$ una funzione olomorfa su $A$. Definiamo:

$$B = \{z \in \mathbb{C} \setminus Im(\gamma) \mid n(z, \gamma) = 0\}.$$

Dato che per ipotesi se $z \in \mathbb{C} \setminus A$ si ha $n(z, \gamma) = 0$, si osservi che si ha $\mathbb{C} \setminus A \subset B$ e quindi $\mathbb{C} = A \cup B$. Inoltre $B$ è un aperto. Infatti siano $z_0 \in B$ e $z_1 \neq z_0$. Allora

$$\begin{aligned}
|n(z_0, \gamma) - n(z_1, \gamma)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0)} d\zeta - \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_1} d\zeta \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \left[ \frac{1}{\zeta - z_0} - \frac{1}{\zeta - z_1} \right] d\zeta \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{z_0 - z_1}{(\zeta - z_0)(\zeta - z_1)} d\zeta \right| \\
&\leq |z_0 - z_1| \frac{L(\gamma)}{2\pi} \max_\gamma \frac{1}{|(\zeta - z_0)(\zeta - z_1)|}.
\end{aligned}$$

Se
$$R < \left[\frac{L(\gamma)}{2\pi}\max_{\gamma}\frac{1}{|(\zeta - z_0)(\zeta - z_1)|}\right]^{-1},$$
allora per ogni $z \in \mathbb{D}(z_0, R)$ si ha $|n(z_0, \gamma) - n(z_1, \gamma)| < 1$. Dato che il numero di avvolgimento è sempre un intero, deve essere $n(z_1, \gamma) = 0$ e quindi $\mathbb{D}(z_0, R) \subset B$. Per l'arbitrarietà di $z_0 \in B$ segue che $B$ è aperto.

Definiamo una funzione $g\colon A \times A \to \mathbb{C}$ mediante:
$$g(\zeta, z) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \text{se } \zeta \neq z \\ \\ f'(z) & \text{se } \zeta = z. \end{cases}$$
Allora si si vede subito che $g$ è continua su $A \times A$ e che, per ogni fissato $\zeta \in A$, la funzione $z \mapsto g(\zeta, z)$ è olomorfa su $A$.

Se $z \in A \cap B$ e $\zeta \in Im(\gamma)$, allora necessariamente $\zeta \neq z$ e quindi $g(\zeta, z) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$ e
$$\int_\gamma g(\zeta, z)d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - (2\pi i)n(z, \gamma)f(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta. \tag{5.4.3}$$
È allora ben definita e olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ la funzione $h(z)$ data da
$$h(z) = \begin{cases} \int_\gamma g(\zeta, z)d\zeta & \text{se } z \in A \\ \\ \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta & \text{se } z \in B. \end{cases}$$
Se $|z|$ è sufficientemente grande, deve essere $n(z, \gamma) = 0$. Quindi $z \in B$ e $h(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$. Dato che per qualche $r > 0$ si deve avere $Im(\gamma) \subset \mathbb{D}(0, r)$ e
$$\left|\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right| \leq L(\gamma)\frac{\max_\gamma |f|}{|z| - r},$$
da cui segue che $\lim\limits_{z\to\infty} |h(z)| = 0$ e quindi che $h$ è limitata. Ma allora, per il Teorema di Liouville, $h$ è costante e, di nuovo dato che $\lim\limits_{z\to\infty} |h(z)| = 0$, deve essere $h \equiv 0$. Se $z \in A \setminus Im(\gamma)$, come in (5.4.3), calcoliamo:
$$0 = h(z) = \int_\gamma g(\zeta, z)d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - (2\pi i)n(z, \gamma)f(z)$$
e quindi (5.4.2) è provata. La (5.4.1) segue scegliendo un qualunque $z \in A \setminus Im(\gamma)$ e applicando (5.4.2) alla funzione definita per $w \in A$ da $\phi(w) = (w - z)f(w)$:
$$0 = n(z, \gamma)\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta.$$

$\square$

Si osservi che il Teorema 5.4.2 è più generale di Teorema 5.2.3. In effetti mentre se una curva chiusa è $\gamma$ omotopa a costante in $A$ si ha $n(z, \gamma) = 0$ per $z \notin A$, non è vero il viceversa. Si può dimostrare che la curva $\gamma$ in $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ in Figura 5.1 non è omotopa a costante in $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ ma $n(0,\gamma) = n(1,\gamma) = 0$.

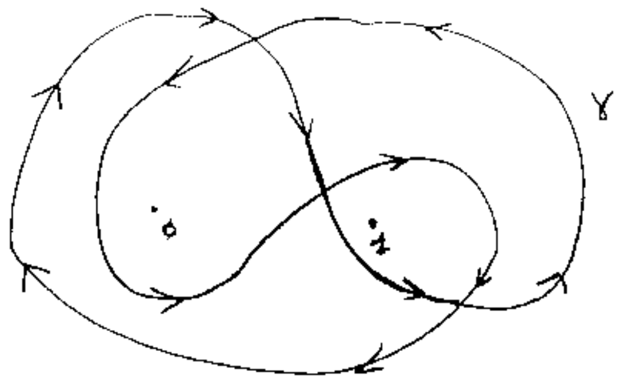


Fig. 5.1

D'altra parte dimostreremo più avanti che un aperto $A$ tale che si abbia $n(z,\gamma) = 0$ per $z \notin A$ per ogni curva chiusa $C^1$ a tratti $\gamma$ in $A$ è semplicemente connesso e quindi ogni tale $\gamma$ è omotopa a costante.

Ricordando che denotiamo la sfera di Riemann con $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, abbiamo il seguente:

Teorema 5.4.3: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Allora $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ è connesso se e solo se per ogni catena $\Gamma$ di curve chiuse $C^1$ a tratti di $A$ e per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus A$ si ha $n(z,\Gamma) = 0$.*

*Dimostrazione*: Se $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ è connesso e $z \in \mathbb{C} \setminus A$, allora $z$ è nella componente connessa illimitata del complemento (in $\mathbb{C}$) di $A$ e abbiamo già dimostrato che $n(z,\gamma) = 0$ per ogni curva chiusa $C^1$ a tratti $\gamma$ di $A$. Supponiamo, viceversa che $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ non sia connesso. Dobbiamo dimostrare che esiste una catena $\Gamma$ di curve chiuse $C^1$ a tratti di $A$ tale che si abbia $n(z,\Gamma) \neq 0$ per qualche $z \in \mathbb{C} \setminus A$. Se $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ non è connesso esistono chiusi disgiunti $K, L \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus A$ tali che $K \cup L = \hat{\mathbb{C}} \setminus A$. Allora $K$ e $L$ sono compatti dato che $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ è chiuso in $\hat{\mathbb{C}}$ e quindi compatto. Uno fra $K$ e $L$ contiene il punto $\{\infty\}$: supponiamo $\{\infty\} \in L$. Dunque $K$ è un compatto contenuto in $\mathbb{C}$ e quindi chiuso e limitato. Dato che $A' = A \cup K = \hat{\mathbb{C}} \setminus L = \mathbb{C} \setminus L$ è un aperto di $\hat{\mathbb{C}}$ che non contiene $\infty$, $A' = A \cup K$ è un aperto di $\mathbb{C}$ che contiene il compatto $K$. Allora, grazie al Lemma 2.4.1, esiste un aperto $D$ tale che $K \subset D \subset \overline{D} \subset A'$ con $\overline{D}$ compatto e $\partial D$ lineare a tratti costituita da poligoni ottenuti come unione finita di segmenti paralleli o all'asse reale o all'asse immaginario.

Sia $z \in K \subset D$. Allora per il Teorema 5.2.2 abbiamo che $n(z, \partial D) = 1$.

$\square$

Per la dimostrazione del Teorema 5.4.3 è comodo utilizzare la sfera di Riemann ma è utile riformulare il fatto che $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ sia connesso per un aperto $A$ di

$\hat{\mathbb{C}}$ senza fare riferimento a $\mathbb{C}$. Infatti il complemento in $\mathbb{C}$ di un aperto semplicemente connesso può essere sconnesso. Si consideri ad esempio il caso di una "striscia" $S = \{z \in \mathbb{C} \mid a < Rez < b\}$ per $a < b$. Quello che si può provare è che i complementi degli aperti semplicemente connessi in $\mathbb{C}$ non possono avere "isole" ossia componenti connesse compatte. Questo fatto, molto intuitivo, richiede una dimostrazione non completamente immediata:

Proposizione 5.4.4: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Allora $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ è connesso se e solo $\mathbb{C} \setminus A$ non ha componenti connesse compatte.*

*Dimostrazione*: Supponiamo che $\mathbb{C} \setminus A$ non abbia componenti connesse compatte. Se $\{C_j\}_{j\in J}$ è l'insieme delle componenti connesse illimitate di $\mathbb{C} \setminus A$, definiamo

$$L_\infty = \{\infty\} \cup (\cup_{j\in J} C_j)\,.$$

Dunque

$$\mathbb{C} \setminus A = \bigcup_{j\in J} C_j \qquad \text{e} \qquad \hat{\mathbb{C}} \setminus A = \{\infty\} \cup \mathbb{C} \setminus A = L_\infty$$

dove le unioni sono tutte unioni disgiunte. Per dimostrare che $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ è connesso basterà provare che $L_\infty$ è connesso.

Supponiamo che esistano aperti disgiunti $U_1, U_2$ di $\hat{\mathbb{C}}$ tali che

$$L_\infty = (U_1 \cap L_\infty) \cup (U_2 \cap L_\infty)$$

e che $\infty \in U_1$. In questo caso $\infty \notin U_2$ e quindi $U_2$ è un aperto di $\mathbb{C}$. Inoltre, dato che $U_1$ è un aperto di $\hat{\mathbb{C}}$ che contiene $\infty$, esiste $R > 0$ tale che $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}(0, R)} \subset U_1$. Abbiamo allora che $U_2 \cap L_\infty \subset \mathbb{D}(0, R)$ e quindi che $U_2 \cap L_\infty$ è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{C}$. Ma allora ogni per ogni componente illimitata $C_j$ di $\mathbb{C} \setminus A$ si ha $C_j \subset U_1 \cap L_\infty$ e quindi $U_2 \cap L_\infty = \emptyset$ e $L_\infty$ è connesso.

Supponiamo ora che $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ sia connesso e che esista una componente connessa compatta $K$ di $\mathbb{C} \setminus A$. Per il Lemma 5.4.6 che dimostreremo al termine del paragrafo, esiste un intorno $N$ di $K$ in $\mathbb{C} \setminus A$ che è sia aperto che chiuso in $\mathbb{C} \setminus A$ e limitato in $\mathbb{C}$. Dato che $N$ è chiuso in $\mathbb{C} \setminus A$, è chiuso anche in $\mathbb{C}$ e quindi compatto e chiuso in $\hat{\mathbb{C}}$. D'altra parte $N$ è aperto in $\mathbb{C} \setminus A$ che è aperto in $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$. Dunque $N$ è anche aperto in $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$. Dato che $N$ è aperto e chiuso in $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ e che, essendo limitato in $\mathbb{C}$ non contiene $\infty$, segue che $N$ è unione di componenti connesse di $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ che non contengono $\infty$. Ma allora $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ non sarebbe connesso, contro l'ipotesi.

□

Possiamo ora dimostrare il seguente:

Teorema 5.4.5: *Per un aperto $A \subset \mathbb{C}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- *(i)* *$\mathbb{C} \setminus A$ non ha componenti connesse compatte;*
- *(ii)* *$\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ è connesso;*
- *(iii)* *per ogni catena $\Gamma$ di curve chiuse $C^1$ a tratti di $A$ e per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus A$ si ha $n(z, \Gamma) = 0$;*
- *(iv)* *per ogni curva chiusa $C^1$ a tratti di $A$ e per ogni funzione olomorfa $f$ su $A$ sia ha $\int_\gamma f(z)dz = 0$;*

(v) *ogni funzione olomorfa su $A$ ha una primitiva olomorfa su $A$;*
(vi) *ogni funzione olomorfa mai nulla su $A$ ha un logaritmo olomorfo su $A$;*
(vii) *per ogni intero positivo $n$, ogni funzione olomorfa mai nulla su $A$ ha una radice $n$-esima olomorfa su $A$.*

*Tutte queste condizioni sono soddisfatte quando $A$ è semplicemente connesso.*

*Dimostrazione*: Abbiamo dimostrato in Proposizione 5.4.4 che $(i)$ e $(ii)$ sono equivalenti e in Teorema 5.4.3 che $(ii)$ equivale a $(iii)$. Dal Teorema 5.4.2 segue che $(iii)$ implica $(iv)$. Dai risultati del Capitolo 3 segue che $(iv)$ implica $(v)$. Ripetendo parola per parola la dimostrazione del Teorema 5.3.3, abbiamo che $(v)$ implica $(vi)$ e con la dimostrazione di Proposizione 5.3.4 si ha che $(vi)$ implica $(vii)$.

Supponiamo che valga $(vii)$. Sia $f$ una funzione olomorfa mai nulla su $A$. Per ogni intero positivo $n$ sia $g_n$ una funzione olomorfa tale che $(g_n)^n = f$. Allora per ogni $n$
$$\frac{g_n'(z)}{g_n(z)} = \frac{1}{n}\frac{f'(z)}{f(z)}$$
e di conseguenza, se $\gamma$ è una curva chiusa $C^1$ a tratti e $\gamma_n = g_n \circ \gamma$ è la curva ottenuta componendo $\gamma$ con $g_n$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(0,\gamma_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{d\zeta}{\zeta} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_n'(z)}{g_n(z)}dz \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0\end{aligned}.$$

D'altra parte $n(0,\gamma_n) \in \mathbb{Z}$ per ogni $n$ e quindi, necessariamente, per $n$ grande abbastanza si deve avere $n(0,\gamma_n) = 0$ da cui segue $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n(0,\gamma_n) = 0$. Dato che $\gamma$ è una curva chiusa $C^1$ a tratti arbitaria di $A$, allora la funzione $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ha una primitiva olomorfa $F$. Allora, procedendo come nel Teorema 5.3.3, si trova una costante $c \in \mathbb{C}$ in modo che $c + F$ sia un logaritmo olomorfo di $f$ e quindi $(vi)$ vale.

Per concludere che le affermazioni sono tutte equivalenti, basta dimostrare che $(vi)$ implica $(iii)$. Sia $z_0 \in \mathbb{C} \setminus A$ e si consideri la funzione $f(z) = z - z_0$. Allora $f$ è olomorfa e non nulla su $A$. Dunque $f$ ha un logaritmo olomorfo $F$ su $A$ tale che $F'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_0}$. Dunque se $\gamma$ è una curva chiusa $C^1$ a tratti arbitaria di $A$, abbiamo:
$$n(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F'(z)dz = 0.$$
Infine se $A$ è semplicemente connesso si ha che la $(iii)$ vale dato che ogni curva chiusa $C^1$ a tratti di $A$ è omotopa a costante in $A$. □

**Osservazione.** Dimostreremo che se per $A$ vale $(vii)$ allora $A$ è semplicemente connesso. In effetti è sufficiente che valga $(vii)$ per $n = 2$.

Rimane da provare il seguente Lemma utilizzato nella dimostrazione della Proposizione 5.4.4:

Lemma 5.4.6: *Sia $A$ un aperto in $\mathbb{C}$ e $K$ una componente connessa compatta di $\mathbb{C} \setminus A$. Esiste un intorno $N$ di $K$ in $\mathbb{C} \setminus A$ che è sia aperto sia chiuso in $\mathbb{C} \setminus A$ e limitato in $\mathbb{C}$.*

*Dimostrazione*: Ci si può limitare a dimostrare il lemma nel caso nel quale $\mathbb{C} \setminus A$ sia compatto. Infatti ci si può sempre ridurre a tale situazione nel modo seguente. Sia $R > 0$ tale che $K \subset \mathbb{D}(0,R) \subset \overline{\mathbb{D}(0,R)}$ e sia $A^R = A \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$. Allora $B = \overline{\mathbb{D}(0,R)} \cap \mathbb{C} \setminus A = \mathbb{C} \setminus A^R$ è un compatto complemento di un aperto di $\mathbb{C}$. Inoltre $K \subset B$ è una componente connessa di $B$ dato che qualunque connesso contente $K$ e contenuto in $B$ sarebbe contenuto anche in $\mathbb{C} \setminus A$ e quindi coinciderebbe con $K$. Supponiamo che la proposizione valga per le componenti connesse compatte di $B = \overline{\mathbb{D}(0,R)} \cap \mathbb{C} \setminus A = \mathbb{C} \setminus A^R$. Siano $U, V$ aperti di $\mathbb{C} \setminus A$ tali che $K \subset V \subset U \cap B$. Si osservi che in questo caso d $V$ è anche un aperto di $B$ che contiene $K$. Dunque, se la Proposizione vale per $K$ in $B$, esiste un insieme $N \subset B$ aperto e chiuso in $B$ con $K \subset N \subset V$. Evidentemente $N$ è limitato. Dato che $B$ è chiuso in $\mathbb{C} \setminus A$ e $N$ è chiuso in $B$, allora $N$ è un chiuso di $\mathbb{C} \setminus A$. D'altra parte $N$ è aperto in $B$ e $N = N \cap V$ è aperto in $V$ che a sua volta è aperto in $\mathbb{C} \setminus A$. Pertanto $N$ è aperto anche in $\mathbb{C} \setminus A$.

Dimostriamo allora la Proposizione sotto l'ipotesi che $\mathbb{C} \setminus A$ sia compatto. Sia

$$\mathcal{S} = \{N \subset \mathbb{C} \setminus A \mid N \,\text{aperto e chiuso in}\, \mathbb{C} \setminus A\}.$$

Evidentemente $\mathbb{C} \setminus A \in \mathcal{S} \neq \emptyset$. Definiamo $L = \bigcap_{N \in \mathcal{S}} N$. Allora $K \subset L$ e, dato che ciascun $N \in \mathcal{S}$ è chiuso, $L$ è chiuso nel compatto $\mathbb{C} \setminus A$ e quindi a sua volta compatto. Dimostriamo ora che per ogni aperto $W$ di $\mathbb{C} \setminus A$ che contiene $L$ esiste un intorno $N_0$ di $L$ aperto e chiuso tale che $L \subset N_0 \subset W$. Sia $W$ aperto di $\mathbb{C} \setminus A$ che contiene $L$. Allora $N \cap ((\mathbb{C} \setminus A) \setminus W)$ per ogni $N \in \mathcal{S}$ e

$$\bigcap_{N \in \mathcal{S}} [N \cap ((\mathbb{C} \setminus A) \setminus W)] = L \cap ((\mathbb{C} \setminus A) \setminus W) = \emptyset.$$

Dato che $(\mathbb{C} \setminus A) \setminus W$ è compatto perché chiuso in un compatto, allora esistono $N_1, \ldots, N_r \in \mathcal{S}$ tali che

$$\bigcap_{j=1}^{r} [N_j \cap ((\mathbb{C} \setminus A) \setminus W)] = \emptyset.$$

Se $N_0 = N_1 \cap \ldots \cap N_r$ allora è sia aperto sia chiuso in $\mathbb{C} \setminus A$ e $L \subset N_0 \subset W$.

La dimostrazione sarà completa se dimostriamo che $K = L$. Per fare questo basta dimostrare che $L$ è connesso dato che contiene $K$ che è una componente connessa di $\mathbb{C} \setminus A$. Siano allora $F, G$ chiusi tali che

$$L = F \cup G \qquad \text{e} \qquad F \cap G = \emptyset.$$

Dato che $K \subset L$ è connesso, deve essere contenuto in uno solo fra $F$ e $G$: supponiamo $K \subset F$. Dato che $\mathbb{C} \setminus A$ è compatto e $F, G$ sono chiusi, esistono aperti $U, V$ con

$$F \subset U, \quad G \subset V \quad \text{e} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Per quanto provato sopra, esiste $N_0$ tale che $L \subset N_0 \subset U \cup V$. Dato che $N_0$ e $U$ sono aperti in $\mathbb{C} \setminus A$ allora $N_0 \cap U$ è aperto in $\mathbb{C} \setminus A$. D'altra parte $N_0 \cap U = N_0 \cap ((\mathbb{C} \setminus A) \setminus V)$ e quindi è chiuso in $\mathbb{C} \setminus A$ perché intersezione di chiusi.

Si ha allora che $K \subset L \subset N_0$ e $K \subset F \subset U$ e quindi $K \subset N_0 \cap U$. Dunque $N_0 \cap U$ è un aperto e chiuso di $\mathbb{C} \setminus A$ che contiene $K$ ossia $N_0 \cap U \in \mathcal{S}$ e di conseguenza $L \subset N_0 \cap U$. Allora $L \cap V = \emptyset$ e pertanto deve essere $G \subset L \cap V = \emptyset$ da cui segue che $L$ è connesso.

□

**Osservazione.** Il Lemma 5.4.6 è essenziale nella dimostrazione della dimostrazione della Proposizione 5.4.4 dato che nel caso $\mathbb{C} \setminus A$ ha infinite componenti connesse, mentre sicuramente queste sono chiuse in $\mathbb{C} \setminus A$ non è detto che siano anche aperte. Nel caso nel quale le componenti connesse $\mathbb{C} \setminus A$ siano aperte – è questo il caso ovviamente quando sono in numero finito – la dimostrazione della seconda parte della Proposizione 5.4.4 è quasi immediata. Infatti, se $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ è connesso, in questo caso e una componente connessa compatta $K$ di $\mathbb{C} \setminus A$ è un sottoinsieme connesso aperto, chiuso e limitato di $\mathbb{C} \setminus A$ che non contiene $\infty$. Dunque $K$ è un sottoinsieme connesso aperto e chiuso in $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ che non contiene $\infty$ ed è contenuto pertanto in una componente connessa di $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ che non contiene $\infty$: $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ non sarebbe connesso contro l'ipotesi.

CAPITOLO 6

# Diseguaglianze di Cauchy: convergenza e geometria di funzioni olomorfe

## 6.1. Diseguaglianze di Cauchy e convergenza di successioni di funzioni olomorfe.

Una proprietà caratteristica delle funzioni olomorfe – diretta conseguenza delle formule integrali di Cauchy per una funzione olomorfa e per le sue derivate – consiste nella possibilità di stimare le derivate in termini della funzione stessa. Il prossimo risultato fornisce la versione base delle fondamentali *diseguaglianze di Cauchy*:

TEOREMA 6.1.1: *Sia $f$ una funzione olomorfa in un intorno del disco chiuso $\overline{D(z_0,r)}$. Se $0<\delta<r$, allora per ogni $z\in\overline{D(z_0,r-\delta)}$ si ha*

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq r\frac{n!}{\delta^{n+1}}\max_{|\zeta-z_0|=r}|f(\zeta)|. \tag{6.1.1}$$

*Inoltre*

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{r^n}\max_{|\zeta-z_0|=r}|f(\zeta)|. \tag{6.1.2}$$

*Dimostrazione*: Ricordiamo che vale la seguente formula di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa (3.2.3):

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(z_0,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta.$$

Dunque se per $0<\delta<r$ si prende $z\in\overline{D(z_0,r-\delta)}$, si deve avere $|\zeta-z|\geq\delta$ per $\zeta\in\partial D(z_0,r)$ e quindi

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{2\pi}L(\partial D(z_0,r))\frac{\max\limits_{|\zeta-z_0|=r}|f(\zeta)|}{\delta^{n+1}}$$

ossia (6.1.1). La (6.1.2) si ottiene immediatamente dalla (6.1.1) per $z\to z_0$ e $\delta\to r$. □

Dalle diseguaglianze di Cauchy si ottiene la seguente stima che è molto utile nelle applicazioni:

Teorema 6.1.2: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $K \subset A$ un sottoinsieme compatto. Per ogni intero positivo $n$ esiste una costante $C_n$, che dipende solo da $n$, $K$ e $A$, tale che per ogni funzione $f$ olomorfa su $A$ si abbia*

$$\sup_K \left| f^{(n)} \right| \leq C_n \sup_A |f| \,. \tag{6.1.3}$$

*Dimostrazione*: Sia $d = \frac{1}{2} \min_{z \in K} dist(z, \partial A)$. Dato che $K$ è un compatto contenuto in $A$ e che la distanza da un chiuso è una funzione continua, si osservi che $d > 0$. Si ponga $C_n = \frac{n!}{d^n}$. Allora, fissato arbitrariamente $z_0 \in K$, si ha $\overline{D(z_0, d)} \subset A$. Dato che evidentemente

$$\sup_{\overline{D(z_0,d)}} |f| \leq \sup_A |f|,$$

allora da (6.1.2):

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{d^n} \max_{|z - z_0| = d} |f(z)| \leq C_n \sup_A |f|$$

e quindi, passando al sup per $z_0 \in K$, (6.1.3) segue immediatamente. $\square$

Prima di presentare le prime applicazioni delle diseguaglianze di Cauchy, diamo un ultimo risultato che presenta delle diseguaglianze ancora più raffinate e sorprendenti. Il Teorema 6.1.2 mostra come, per funzioni olomorfe sia possibile ottenere stime a priori per le norme delle derivate di ogni ordine in termini della sola norma uniforme della funzione. Nel prossimo teorema dimostreremo che in effetti si possono ottenere lo stesso tipo di stime in termini della norma $L^1$ della funzione.

Teorema 6.1.3: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $K \subset A$ un sottoinsieme compatto. Per ogni intero positivo $n$ esiste una costante $c_n$, che dipende solo da $n$, $K$ e $A$, tale che per ogni funzione $f$ olomorfa su $A$ si abbia*

$$\sup_K \left| f^{(n)} \right| \leq c_n \int_A |f(z)| dx dy. \tag{6.1.4}$$

*Dimostrazione*: Fissato il compatto $K \subset A$, siano $U, V$ aperti limitati tali che

$$K \subset U \subset \overline{U} \subset V \subset \overline{V} \subset A$$

e sia $\varphi \in \mathbb{C}_o^\infty(A)$ una funzione a valori reali di classe $C^\infty$ a supporto compatto su $A$ con $\varphi(z) = 1$ per ogni $z \in V$. Infine sia $D$ un aperto con frontiera orientata $\partial D$ unione finita di curve semplici, chiuse, disgiunte, $C^1$ a tratti tale che

$$\overline{V} \subset supp(\varphi) = \overline{\{z \mid \varphi(z) \neq 0\}} \subset D \subset \overline{D} \subset A.$$

Allora, se $f$ è una funzione olomorfa su $A$ arbitraria, posto $g = \varphi f$, si ha:

$$g \equiv 0 \ \text{ su } \ \partial D, \qquad g_{\overline{z}} = (\varphi f)_{\overline{z}} = \varphi_{\overline{z}} f \ \text{ su } \ D, \quad \text{ e } \quad \varphi_{\overline{z}} \equiv 0 \ \text{ su } \ A \setminus supp(\varphi).$$

Usando la formula di Cauchy per funzioni di classe $C^1$, per $z \in D$ abbiamo:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{g_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{g_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta = -\frac{1}{\pi} \int_A \frac{\varphi_{\overline{\zeta}}(\zeta) f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta.$$

D'altra parte, dato che $\varphi \equiv 1$ su $V$, si deve avere $\varphi_{\overline{\zeta}} \equiv 0$ su $V$ e $\varphi \equiv 1$ su $U \subset V$. Per ogni $z \in U$, possiamo dunque concludere che

$$f(z) = \varphi(z)f(z) = g(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{A \setminus V} \frac{\varphi_{\overline{\zeta}}(\zeta)f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta. \tag{6.1.5}$$

Se $\delta = dist(\overline{U}, \mathbb{C} \setminus V)$, per $\zeta \in A \setminus V$ e $z \in U$, abbiamo:

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[ \frac{\varphi_{\overline{\zeta}}(\zeta)f(\zeta)}{\zeta - z} \right] \right| = n! \left| \frac{\varphi_{\overline{\zeta}}(\zeta)f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{\delta^{n+1}} \max_{supp(\varphi)} \left| \varphi_{\overline{\zeta}} f \right| \tag{6.1.6}$$

Grazie alla (6.1.6) possiamo derivare sotto il segno di integrale la (6.1.5) per $z \in U$:

$$f^{(n)}(z) = -\frac{n!}{\pi} \int\limits_{A \setminus V} \frac{\varphi_{\overline{\zeta}}(\zeta)f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\xi d\eta.$$

Dunque, posto

$$c_n = \frac{n!}{\pi \delta^{n+1}} \max_{supp(\varphi)} \left| \varphi_{\overline{\zeta}} \right|,$$

per $z \in K \subset U$ si ha:

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq c_n \int\limits_{A \setminus V} |f| d\xi d\eta \leq c_n \int\limits_{A} |f| d\xi d\eta$$

e quindi la stima (6.1.4).

$\square$

Vediamo ora come questi risultati siano utili per studiare la convergenza di successioni di funzioni olomorfe. Il primo risultato che dimostriamo, in termini topologici afferma che, nella topologia della convergenza uniforme sui compatti, l'insieme delle funzioni olomorfe è un chiuso nello spazio delle funzioni continue su un aperto. In effetti si riesce a dimostrare di più: anche le successioni delle derivate di ogni ordine convergono uniformemente sui compatti alle derivate corrispondenti della funzione limite:

Teorema 6.1.4: (di Weierstrass) *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ uniformemente convergente sui compatti di $A$ a una funzione $f$. Allora $f$ è olomorfa e le successsioni delle derivate di ogni ordine di $\{f_n\}$ convergono uniformemente sui compatti di $A$ alle corrispondenti derivate di $f$.*

*Dimostrazione*: Dato che $f_n$ converge uniformemente sui compatti di $A$ a $f$, allora $f$ è continua. Sia $\Delta$ un triangolo chiuso contenuto in $A$. Allora passando al limite sotto il segno d'integrale

$$\int\limits_{\partial \Delta} f(z) dz = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\partial \Delta} f_n(z) dz = 0$$

e quindi, per il teorema di Morera, $f$ è olomorfa su $A$.

Sia $K$ un compatto contenuto in $A$ e sia $B$ un aperto limitato tale che $K \subset B \subset \overline{B} \subset A$. Allora per qualche costante $C_{p+q} > 0$

$$\sup_K \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial y^q} f_n - \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial y^q} f \right| = \sup_K \left| i^q (f_n - f)^{(p+q)} \right| \leq C_{p+q} \sup_{\overline{B}} |f_n - f| \to 0$$

e quindi anche la seconda parte della tesi è dimostrata. □

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni a valori complessi definite su un sottoinsieme $B \subset \mathbb{R}^n$. La successione $\{f_n\}$ si dice *equilimitata* se esiste una costante $M$ tale che per ogni $n$ e per ogni $x \in B$ si ha $|f_n(x)| \leq M$. La successione $\{f_n\}$ si dice *equicontinua* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x, y \in B$ e $|x - y| < \delta$ allora per ogni $n$ si ha $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$.

Nei corsi di Analisi si dimostra *Teorema di Ascoli-Arzelà* che noi sevirà nella seguente formulazione:

TEOREMA 6.1.5: *Una successione di funzioni $\{f_n\}$ a valori complessi definite su un sottoinsieme compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ equilimitata e equicontinua ammette una sottosuccessione uniformemente convergente a una funzione continua $f$.*

Per applicare il Teorema 6.1.5 allo studio di successioni di funzioni olomorfe, è utile la seguente osservazione:

LEMMA 6.1.6:
*(i) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ tale che la successione delle derivate $f'_n$ sia equilimitata su ogni compatto contenuto in $A$. Allora $\{f_n\}$ è equicontinua sui compatti di $A$.*
*(ii) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ equilimitate su ogni compatto contenuto in $A$. Allora $\{f_n\}$ è equicontinua su ogni compatto contenuto in $A$.*

*Dimostrazione*: Sia $K \subset A$ un compatto. Per ogni $z \in K$ esiste $r_z > 0$ tale che $\mathbb{D}(z, r_z) \subset \overline{\mathbb{D}(z, r_z)} \subset A$. Dato che $K$ è compatto, esistono $z_1, \ldots, z_N \in K$ tali che, se $\mathbb{D}_j = \mathbb{D}(z_j, r_{z_j})$, allora

$$K = \mathbb{D}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{D}_N \subset \overline{\mathbb{D}_1} \cup \ldots \cup \overline{\mathbb{D}_N} = E \subset A.$$

Dunque $E$ è un compatto. Sia $M$ tale che per ogni $n$ e per ogni $z \in E$ si abbia $|f'_n(z)| < M$. Sia $r = \min_{z \in K} dist(z, \partial E)$. Se $z_1, z_2 \in K$ con $|z_1 - z_2| < r$ allora tutto il segmento che li congiunge è contenuto in $E$: $[z_1, z_2] \subset E$. Allora

$$|f_n(z_2) - f_n(z_1)| = \left| \int_{[z_1, z_2]} f'_n(z) dz \right| \leq |z_2 - z_1| \max_{[z_1, z_2]} |f'_n| < M |z_2 - z_1|$$

da cui la $(i)$ segue immediatamente. La $(ii)$ segue da $(i)$ e dal Teorema 6.1.2. □

Dunque il Lemma 6.1.6 permette di ridurre considerevolmente le ipotesi necessarie per applicare il Teorema di Ascoli-Arzelà a successioni di funzioni olomorfe ed risulta cruciale nella dimostrazione del seguente risultato:

Teorema 6.1.7: (di Montel) *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ equilimitata su ogni compatto contenuto in $A$. Allora $\{f_n\}$ ha una sottosuccessione uniformemente convergente sui compatti di $A$ a una funzione olomorfa.*

*Dimostrazione*: Per il Lemma 2.4.1, esiste una successione $\{A_k\}_{k\geq 1}$ di aperti tali che

$$\overline{A}_k \text{ è compatto per ogni } k \geq 1, \quad \overline{A}_k \subset A_{k+1} \text{ per ogni } k \geq 1, \quad A = \bigcup_{n\geq 1} A_k.$$

D'altra parte, la Proposizione 6.1.6 assicura che la successione $\{f_n\}$ è equicontinua su ogni compatto contenuto in $A$. Per il teorema di Ascoli-Arzelà allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k^1}\} = f_{n_1^1}, \ldots, f_{n_k^1}, \ldots$ di $\{f_n\}$ che converge uniformemente su $\overline{A_1}$. Sempre per il teorema di Ascoli-Arzelà allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k^2}\} = f_{n_1^2}, \ldots, f_{n_k^2}, \ldots$ di $\{f_{n_k^1}\}$ che converge uniformemente su $\overline{A_2}$. Per induzione costruiamo in questo modo sottosuccessioni $\{f_{n_k^l}\}$ con la proprietà che per ogni $l$ la successione $\{f_{n_k^l}\}$ è sottosuccessione della $\{f_{n_k^{l-1}}\}$ e converge uniformemente su $\overline{A_l}$. Si consideri la sottosuccessione $\{f_{n_k^k}\}$ di $\{f_n\}$. Per costruzione se $j > l$ allora $f_{n_j^j} \in \{f_{n_k^l}\}$ e quindi, per ogni $l$ la $\{f_{n_k^k}\}$ è sottosuccessione della $\{f_{n_k^l}\}$ e converge uniformemente su $\overline{A_l}$. La $\{f_{n_k^k}\}$ converge allora uniformemente su ogni compatto di $A$ dato che, se $K \subset A$ è un compatto, esisterà un $l_0$ tale che $K \subset A_{l_0}$. Per il Teorema 6.1.4, il limite uniforme della $\{f_{n_k^k}\}$ è una funzione olomorfa. □

Chiudiamo il paragrafo introducendo alcune nozioni che useremo più tardi. Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $C(A, \mathbb{C})$ lo spazio delle funzioni continue definite su $A$ a valori in $\mathbb{C}$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti. Un sottoinsieme $\mathcal{F} \subset C(A, \mathbb{C})$ si dice *famiglia normale* se ogni successione $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ ammette una sottosuccessione convergente uniformemente sui compatti a una funzione $f \in C(A, \mathbb{C})$. Questa nomenclatura è tradizionale nella teoria delle funzioni olomorfe e la adotteremo anche in queste note. D'altra parte si vede subito che $\mathcal{F}$ è una *famiglia normale* se e solo se la chiusura di $\mathcal{F}$ è compatta in $C(A, \mathbb{C})$ nella topologia della convergenza uniforme sui compatti.

Dal teorema di Montel 6.1.7 si ottiene immediatamente una caratterizzazione delle famiglie normali di funzioni olomorfe. Si dice che una famiglia di funzioni $\mathcal{F}$ su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ è *equilimitata sui compatti* (o anche *localmente equilimitata*) se per ogni compatto $K \in A$ esiste una costante $M$ tale che per ogni $f \in \mathcal{F}$ e per ogni $x \in K$ si ha $|f(x)| \leq M$. Dunque se $\mathcal{F}$ è una famiglia di funzioni localmente limitate allora ogni successione $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ è equilimitata su ogni compatto contenuto in $A$. Dunque abbiamo il seguente:

Teorema 6.1.8: *Una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni olomorfe su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ è normale se e solo se è equilimitata sui compatti di $A$.*

*Dimostrazione*: Dobbiamo solo dimostrare che una famiglia normale è equilimitata sui compatti, l'altra implicazione è immediata dal Teorema di Montel. Supponiamo per assurdo che una famiglia normale $\mathcal{F}$ non sia equilimitata sui compatti di $A$. Allora esiste un compatto $K \subset A$ tale che

$$\sup_{\mathcal{F}}\{|f(z)| \mid z \in K\} = +\infty.$$

Dunque esistono successioni $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ e $\{z_n\} \subset K$ tali che per ogni $n$ risulti $|f_n(z_n)| \geq n$. D'altra parte, per ipotesi, esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ di $\{f_n\}$

uniformemente convergente sui compatti a una funzione olomorfa $f$. Se $M = \max_K |f|$, allora per ogni $n_k$ e per ogni $z \in K$ si ha

$$|f_{n_k}(z)| \leq |f_{n_k}(z) - f(z)| + |f(z)| \leq |f_{n_k}(z) - f(z)| + M.$$

Dato che $f_{n_k}$ converge uniformente a $f$ su $K$, allora per $n_k$ sufficientemente grande, per ogni $z \in K$, si ha $|f_{n_k}(z) - f(z)| < 1$. Ma allora

$$n_k \leq |f_{n_k}(z_{n_k})| \leq |f_{n_k}(z_{n_k}) - f(z_{n_k})| + |f(z_{n_k})| \leq 1 + M.$$

Contraddizione! □

**Esercizi.**

**1.** Sia $E \subset \mathbb{C}$ un chiuso e si consideri la funzione $d_E$ la funzione distanza da $E$ definita da $d_E(z) = \inf_{a \in E} |z - a|$. Dimostrare che $d_E$ è una funzione continua. *Consiglio: Per $z, w \in \mathbb{C}$ e $a \in E$ si ha $|z - a| \leq |z - w| + |w - a|$ e quindi passando all'estremo inferiore $d_E(z) \leq |z - w| + d_E(w)$. Scambiando i ruoli di $z, w$ stabilire che $|d_E(z) - d_E(w)| \leq |z - w|$...*

**2.** Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni olomorfe su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ e sia $\mathcal{F}' = \{f' \mid f \in \mathcal{F}\}$. Dimostrare che se $\mathcal{F}$ è una famiglia normale allora $\mathcal{F}'$ è una famiglia normale. Dimostrare che non vale il viceversa. Sia $A$ convesso. Per $z_0 \in A$, si definisca $\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(z_0) = 0\}$. Se $\mathcal{F}'$ è una famiglia normale anche $\mathcal{F}_0$ è una famiglia normale.

**3.** (Teorema di Vitali) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe su un aperto connesso $A \subset \mathbb{C}$ equilimitate sui compatti di $A$. Se esiste un sottoinsieme $E \subset A$ con un punto di accumulazione in $A$ tale che la successione $\{f_n(z)\}$ converge per ogni $z \in E$, allora $\{f_n\}$ converge uniformemente sui compatti di $A$. *Consiglio: Se $\{f_n\}$ non converge uniformemente sui compatti di $A$, allora c'è un compatto $K \subset A$, $\delta > 0$ e sottosuccessioni $\{f_{n_k^1}\}$, $\{f_{n_k^2}\}$ di $\{f_n\}$ e una successioni di punti $z_k$ in $K$, tale che*

$$|f_{n_k^1}(z_k) - f_{n_k^2}(z_k)| \geq \delta. \qquad (*)$$

*Le successioni $\{f_{n_k^1}\}$ e $\{f_{n_k^2}\}$ hanno sottosuccessioni convergenti a funzioni olomorfe distinte a causa di $(*)$ (perché?) ma che a causa dell'ipotesi coincidono su $E$: contraddizione! (perché?)*

## 6.2. Funzioni intere: polinomi e funzioni trascendenti

Un'altra conseguenza delle diseguaglianze di Cauchy è la seguente versione del Teorema di Liouville che caratterizzaza i polinomi:

Teorema 6.2.1: *Sia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione intera. Se esistono un intero $n \geq 0$ e costanti $R > 0$ e $M > 0$ tali che*

$$|f(z)| \leq M|z|^n$$

*per $|z| > R$ allora $f$ è un polinomio di grado al più $n$. Dunque per $n = 0$, segue che una funzione intera limitata $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è costante.*

*Dimostrazione*: Dato che $f$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ allora vale per ogni $z$ lo sviluppo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

dove $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Allora, usando (6.1.2), se $r > R$ e $k > n$,

$$0 \leq |a_k| \leq \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{r^k} \leq \frac{Mr^n}{r^k} \to 0 \quad \text{per } r \to \infty$$

e quindi necessariamente $a_k = 0$ se $k > n$. $\square$

Un'immediata conseguenza del Teorema di Liouville è ll dimostrazione dell'esistenza di zeri per polinomi complessi non costanti. Cominciamo ricordando una stima sul comportamento asintotico dei polinomi già dimostrata nel Capitolo 4:

Lemma 6.2.2: *Sia $p(z) = a_0 + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n$ un polinomio di grado $n$. Per ogni $1 > \epsilon > 0$ esiste $R_\epsilon \geq 1$ tale che se $|z| \geq R_\epsilon$ si ha*

$$(1 - \epsilon)|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq (1 + \epsilon)|a_n||z|^n. \tag{6.2.1}$$

Come conseguenza ecco una semplice dimostrazione del *Teorema fondamentale dell'Algebra*:

Teorema 6.2.3: *Un polinomio non costante con coefficienti complessi ha una radice in $\mathbb{C}$.*

*Dimostrazione*: Sia $p(z) = a_0 + a_1 z \ldots + a_n z^n$ un polinomio non costante con coefficienti complessi. Assumiamo dunque $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$. Supponiamo che $p(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora la funzione $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ è una funzione intera. D'altra parte, per il Lemma 6.2.2, esiste $R > 1$ tale che se $|z| = r \geq R > 1$

$$|p(z)| \geq (1 - \frac{1}{2})|a_n||z|^n > \frac{1}{2}|a_n|$$

Dunque

$$|f(z)| \leq \max\left\{ \max_{|z|\leq R} \frac{1}{|p(z)|}, \frac{2}{|a_n|} \right\}$$

e quindi, per il Teorema di Liouville, $f(z)$ e, di conseguenza, $p(z)$ sarebbero costanti contro l'ipotesi. $\square$

Come corollario possiamo concludere che un polinomio complesso di grado $n \geq 1$ si può sempre scomporre come prodotto di polinomi di primo grado. Precisamente abbiamo il seguente:

TEOREMA 6.2.4: *Sia $p(z)$ un polinomio complesso di grado $n \geq 1$ e siano $b_1, \ldots, b_k$ le sue radici distinte, ciascuna rispettivamente di molteplicità $m_1, \ldots, m_k$. Allora $n = m_1 + \ldots + m_k$ e per qualche costante $c \neq 0$ si ha*

$$p(z) = c(z - b_1)^{m_1} \ldots (z - b_k)^{m_k}.$$

Una funzione intera, ossia olomorfa su tutto $\mathbb{C}$, che non sia un polinomio si dice *trascendente*. Le funzioni trascendenti hanno un comportamento molto diverso dai polinomi per quanto riguarda l'esistenza di zeri. Per esempio la funzione esponenziale non ha zeri. Infatti per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha $|e^z| = e^{Re(z)} > 0$. Mentre abbiamo visto che le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ hanno infiniti zeri. È possibile comunque dare una caratterizzazione delle funzioni trascendenti nello spirito dei risultati in questo paragrafo che le distingua nel comportamento dai polinomi.

TEOREMA 6.2.5: *Sia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione intera non costante. Allora per $f$ vale una delle seguenti due proprietà mutualmente esclusive:*

*(i) $f$ è un polinomio e per ogni compatto $K \subset \mathbb{C}$ esiste $R > 0$ tale che se $|z| > R$ allora $f(z) \notin K$*

*oppure*

*(ii) $f$ è una funzione trascendente e per ogni $w \in \mathbb{C}$ esiste una successione $\{z_n\}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$ tale che $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w$.*

*Dimostrazione*: Supponiamo che $f$ sia un polinomio di grado $n \geq 1$ e sia $K \subset \mathbb{C}$ un compatto. Sia $M = \max\{|z| | z \in K\}$. Dalla stima (6.2.1) segue che esiste $R > 0$ tale che, se $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$, su $|z| > R$ si ha $M < \frac{|a_n|}{2}|z|^n \leq |f(z)|$ e quindi necessariamente $f(z) \notin K$.

Supponiamo che $f$ non sia un polinomio e supponiamo che esista $w \in \mathbb{C}$ tale che non ci sia alcuna successione $\{z_n\}$ tale che $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w$. Allora esiste $\rho > 0$ e $\epsilon > 0$ tale che per tutti i $z$ con $|z| > \rho$ si ha $|f(z) - w| > \epsilon$. Dato che $f$ non è una funzione costante, nel compatto $\overline{D(0,\rho)}$ esistono un numero finito di zeri $b_1, \ldots, b_k$ per la funzione $f(z) - w$ ciascuno rispettivamente di molteplicità $m_1, \ldots, m_k$. Allora per una funzione $g$ olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ che non ha zeri, si ha

$$f(z) - w = (z - b_1)^{m_1} \ldots (z - b_k)^{m_k} g(z).$$

Allora, per $|z| > \rho$, si ha

$$g(z) = \frac{f(z) - w}{(z - b_1)^{m_1} \ldots (z - b_k)^{m_k}}.$$

Sia $N = m_1 + \ldots + m_k$. Esiste $\rho_1 > 0$ e un'opportuna costante $C$, tale che se $|z| > \rho_1$, si ha

$$|(z - b_1)^{m_1} \ldots (z - b_k)^{m_k}| < C|z|^N.$$

Allora se $|z| > \max\{\rho, \rho_1\}$ possiamo concludere

$$\frac{1}{|g(z)|} \leq \frac{C}{\epsilon}|z|^N.$$

Dunque, per il Teorema 6.2.1, la funzione intera $\frac{1}{g}$ è un polinomio; dato che non ha zeri, necessariamente $\frac{1}{g}$, e quindi $g$, è costante. Segue allora che per qualche costante $c$ si ha

$$f(z) = w + c(z - b_1)^{m_1} \dots (z - b_k)^{m_k}$$

e questo contraddice il fatto che avevamo supposto che $f$ non fosse un polinomio. □

La sostanza del Teorema 6.2.5 è che il punto all'infinito è una singolarità essenziale per una funzione trascendente. In effetti la dicotomia fra le funzioni intere in base al loro comportamento all'infinito illustrata dal Teorema 6.2.5 si può ottenere come conseguenza del teorema di Casorati-Weierstras. Diamo qui un cenno della dimostrazione lasciando i dettagli per esercizio al lettore:

*Dimostrazione alternativa del Teorema 6.2.5:* Per una funzione intera $f$ il fatto che per ogni compatto $K \subset \mathbb{C}$ esiste $R > 0$ tale che se $|z| > R$ allora $f(z) \notin K$ equivale a dire che $\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty$. Se $f$ è un polinomio non costante allora $\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty$. Supponiamo che $f$ sia una funzione intera ma che non sia un polinomio. Allora $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ con infiniti $a_n \neq 0$. Allora la funzione $g(\zeta) = f(\frac{1}{\zeta})$ è olomorfa su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e ha una singolarità essenziale in 0 (perché?). Allora per ogni fissato $w \in \mathbb{C}$ esiste una successione $\{\zeta_n\}$ con $\lim_{n\to\infty} \zeta_n = 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} f(\zeta_n) = w$ (perché?) e da questo segue $(ii)$ (perché?). È evidente che $(ii)$ e $(ii)$ sono mutualmente esclusivi (perché?). □

**Esercizi.**

**1.** Dimostrare che una funzione intera $f$ tale che $Ref > 0$ è costante. *(Consiglio: studiare $g = e^{-f}$.)*

**2.** Fornire tutti i dettagli della dimostrazione alternativa del Teorema 6.2.5 presentata al termine del paragrafo.

## 6.3. Teorema dell'applicazione aperta, Principio del Massimo, Lemma di Schwarz.

In questo paragrafo, ancora come conseguenza delle diseguaglianze di Cauchy daremo una seconda dimostrazione del Teorema dell'applicazione aperta che utilizzeremo per provare il Principio del Massimo modulo per funzioni olomorfe. Questi due risultati hanno una grande importanza nello studio della teoria geometrica delle funzioni olomorfe. Cominciamo da un risultato tecnico che fornisce un criterio per l'esistenza degli zeri di una funzione olomorfa.

LEMMA 6.3.1: *Sia $f$ una funzione olomorfa su un aperto contenente il disco chiuso $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$. Allora, se*

$$|f(z_0)| < \min_{|z-z_0|=r} |f(z)|,$$

*esiste $w \in \mathbb{D}(z_0, r)$ tale che $f(w) = 0$.*

*Dimostrazione*: Se $f$ non avesse zeri in $\mathbb{D}(z_0, r)$, dato che per ipotesi in questo caso si avrebbe anche $|f(z)| > |f(z_0)| > 0$ per $z \in \partial\mathbb{D}(z_0, r)$, allora la funzione $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ sarebbe olomorfa su un aperto contenente $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$. Dunque, per la diseguaglianza di Cauchy nel caso $n = 0$, si avrebbe

$$\frac{1}{|f(z_0)|} = |g(z_0)| \leq \max_{|z-z_0|=r} |g(z)| = \frac{1}{\min\limits_{|z-z_0|=r} |f(z)|}$$

in contraddizione con l'ipotesi. □

Il risultato seguente è noto come *Teorema dell'applicazione aperta*:

TEOREMA 6.3.2: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $f: A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Allora $f(A)$ è aperto in $\mathbb{C}$.*

*Dimostrazione*: Sia $z_0 \in A$ arbitrario e $w_0 = f(z_0)$. Dimostreremo che esiste un disco centrato in $w_0$ tutto contenuto in $f(A)$. Dato che gli zeri di una funzione olomorfa non identicamente nulla sono isolati, esiste $r > 0$ tale che $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subset A$ e $z_0$ è l'unico zero in $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$ della funzione olomorfa $f - w_0$. Dunque per qualche $\epsilon > 0$ per $|z - z_0| = r$ si ha

$$|f(z) - w_0| \geq 3\epsilon.$$

Sia $w \in \mathbb{D}(w_0, \epsilon)$ arbitrario e $|z - z_0| = r$ allora

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w - w_0| \geq 3\epsilon - \epsilon = 2\epsilon$$

e quindi

$$|f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \epsilon < 2\epsilon \leq \min_{|z-z_0|=r} |f(z) - w|.$$

Per il Lemma 6.3.1 la funzione $f(z) - w$ ha uno zero nel disco $\mathbb{D}(z_0, r) \subset A$ per ogni $w \in \mathbb{D}(w_0, \epsilon)$. Dunque $\mathbb{D}(w_0, \epsilon) \subset f(A)$. □

Come corollario otteniamo il *Principio del Massimo Modulo* per le funzioni olomorfe:

Teorema 6.3.3: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.*
*(i) Se $|f|$ ha un massimo locale in $A$, allora $f$ è costante.*
*(ii) Se inoltre $A$ è limitato e $f \in C^0(\overline{A})$, allora per ogni $z \in \overline{A}$*

$$|f(z)| \leq \max_{\partial A} |f|.$$

*Dimostrazione*: Evidentemente la $(ii)$ segue dalla $(i)$. Dimostriamo $(i)$. Sia $z_0$ un punto di massimo locale per $|f|$. Allora esiste un aperto connesso $U$ contente $z_0$ tale che per ogni $z \in U$ si ha $|f(z)| \leq |f(z_0)|$. Pertanto $f(U) \subset \overline{\mathbb{D}(0, |f(z_0)|)}$ e quindi non esiste un disco centrato in $f(z_0)$ tutto contenuto in $f(U)$. Dunque $f(U)$ non è un intorno del suo punto $f(z_0)$ e pertanto $f(U)$ non è un aperto. Dunque $f$ deve essere costante su $U$ e di conseguenza su $A$ dato che $A$ è connesso. □

Abbiamo facilmente anche il seguente *Principio del Minimo Modulo* per le funzioni olomorfe:

Teorema 6.3.4: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.*
*(i) Se $|f|$ ha un minimo locale in $a \in A$, allora o $f(a) = 0$ o $f$ è costante.*
*(ii) Se inoltre $A$ è limitato e $f \in C^0(\overline{A})$, allora o $f$ ha zeri in $A$ o per ogni $z \in \overline{A}$*

$$|f(z)| \geq \min_{\partial A} |f|.$$

*Dimostrazione*: Anche in questo caso e la $(ii)$ segue immediatamente dalla $(i)$. Per quanto riguarda $(i)$ se $f(a) \neq 0$, basta applicare il Principio del Massimo in un intorno di $a$ alla funzione $\frac{1}{f}$. □

Una importante conseguenza del Principio del Massimo Modulo è il *Lemma di Schwarz*:

Teorema 6.3.5: *Sia $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$ il disco unitario centrato nell'origine e sia $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una funzione olomorfa tale che $f(0) = 0$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$*

$$|f(z)| \leq |z| \tag{6.3.1}$$

*e*

$$|f'(0)| \leq 1. \tag{6.3.2}$$

*Inoltre se vale l'uguaglianza in (6.3.1) per qualche $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ oppure vale in (6.3.2), allora esiste $c$ con $|c| = 1$ tale che $f(z) = cz$ per ogni $z \in \mathbb{D}$.*

*Dimostrazione*: Esiste una funzione olomorfa $h$ su $D$ tale che $f(z) = zh(z)$ per $z \in \mathbb{D}$. Sia $0 < r < 1$; allora la funzione $h$ è olomorfa su $\mathbb{D}(0,r)$ e continua su $\overline{\mathbb{D}(0,r)}$. Dunque per il Principio del Massimo si ha

$$|h(z)| = \max_{|z|=r} |h(z)| = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}. \tag{6.3.3}$$

Dunque, dato che (6.3.3) vale per ogni $0 < r < 1$, allora per $z \in \mathbb{D}$ si ha $|h(z)| \leq 1$ ossia $|f(z)| \leq |z|$. D'altra parte, dato che

$$h(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0),$$

abbiamo anche (6.3.2). Se vale $|f(z_0)| = |z_0|$ per qualche $z_0 \in \mathbb{D}$, allora $|h(z_0)| = 1$ e quindi $|h|$ avrebbe un massimo interno. Se vale $|h(0)| = |f'(0)| = 1$ allora si ha la stessa conclusione. Ancora per il Principio del Massimo, in ambedue i casi $h$ è una funzione costante di modulo 1 e quindi esiste $c$ con $|c| = 1$ tale che $f(z) = cz$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. $\square$

Concludiamo il paragrafo con utilizzando il Lemma di Schwarz per descrivere i biolomorfismi del disco unitario in sé. Prima una

Definizione 6.3.1: Sia $A \subset \mathbb{C}$. Un'applicazione olomorfa $f \colon A \to A$ si dice un *automorfismo* di $A$ se è un biolomorfismo ossia se $f$ è biettiva con inversa $f^{-1} \colon A \to A$ olomorfa. Denoteremo con $Aut(A)$ l'insieme degli automorfismi di $A$. Con l'operazione di composizione $Aut(A)$ è un gruppo. Si dice che $Aut(A)$ *agisce in modo transitivo* su $A$ se per ogni $a, b \in A$ esiste $f \in Aut(A)$ tale che $f(a) = b$, in questo caso $A$ si dice *omogeneo*.

Vogliamo dunque calcolare il gruppo degli automorfismi del disco unitario $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, 1)$. Cominciamo con il seguente

Lemma 6.3.6: *Sia* $a \in \mathbb{D}$ *e* $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$. *Allora* $\varphi_a \in Aut(\mathbb{D})$.

*Dimostrazione*: Si osservi che $\varphi_a$ è olomorfa – e non costante – sul disco $\mathbb{D}\left(0, \frac{1}{|a|}\right) \supset \overline{\mathbb{D}}$. Se $|z| = 1$ allora $z\overline{z} = 1$ e quindi

$$|\varphi_a(z)| = \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = \left|\frac{z-a}{z\overline{z}-\overline{a}z}\right| = \frac{1}{|z|}\frac{|z-a|}{|\overline{z}-\overline{a}|} = 1.$$

Per il Principio del Massimo allora $|\varphi_a(z)| < 1$ per ogni $z \in \mathbb{D}$ ossia $\varphi_a(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Allo stesso modo si ha che $\varphi_{-a}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Dato che una semplice verifica dimostra che $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{-a}$, la tesi segue. $\square$

**Osservazione.** Siano $a, b \in \mathbb{D}$ due punti arbitrari. Allora $\varphi_{-b} \circ \varphi_a$ trasforma $a$ in $b$. Dunque il gruppo $Aut(\mathbb{D})$ agisce in modo transitivo su $\mathbb{D}$ e quindi $\mathbb{D}$ è omogeneo.

Teorema 6.3.7: $\varphi \in Aut(\mathbb{D}) \iff$ *esistono* $a \in \mathbb{D}$ *e* $c \in \partial\mathbb{D}$ *tali che* $\varphi = c\varphi_a$.

*Dimostrazione*: Se $a \in \mathbb{D}$ e $c \in \partial\mathbb{D}$ allora evidentemente $\varphi = c\varphi_a \in Aut(\mathbb{D})$. Sia $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ e supponiamo che $\varphi(0) = b$. Allora $F = \varphi_b \circ \varphi \in Aut(\mathbb{D})$ e $F(0) = 0$. Allora per il Lemma di Schwarz si ha $|F(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. Allo stesso modo si ha che $|F^{-1}(w)| \leq |w|$ per ogni $w \in \mathbb{D}$. Sia $z \in \mathbb{D}$, allora

$$|z| = |F^{-1}(F(z))| \leq |F(z)| \leq |z|$$

e quindi necessariamente $|F(z)| = |z|$. Esiste allora $c \in \partial\mathbb{D}$ tale che

$$cz = F(z) = \varphi_b \circ \varphi(z).$$

Allora

$$\varphi(z) = \varphi_{-b}(cz) = \frac{cz+b}{1+\bar{b}cz} = c\frac{z+bc^{-1}}{1+\overline{bc^{-1}}z}$$

e quindi $\varphi = c\varphi_a$ con $a = -bc^{-1}$ □

Grazie alla caratterizzazione che abbiamo dato degli atomorfismi del disco, possiamo dare una formulazione del Lemma di Schwarz per funzioni olomorfe arbitrarie del disco in sé. Cominciamo con una definizione. Per $z, w \in \mathbb{D}(0,1)$ definiamo

$$d(z,w) = \frac{|z-w|}{|1-\overline{w}z|}. \tag{6.3.4}$$

TEOREMA 6.3.8: (Schwarz-Pick) *Sia* $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$ *il disco unitario centrato nell'origine e sia* $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *una funzione olomorfa. Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$

$$d(f(z), f(w)) \le d(z,w) \tag{6.3.5}$$

*e in (6.3.5) vale l'eguaglianza per una coppia di punti se e solo se vale per ogni coppia di punti se e solo se* $f \in Aut(\mathbb{D})$. *Inoltre per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2}. \tag{6.3.6}$$

*e in (6.3.6) vale l'eguaglianza in un punto se e solo se vale in ogni punto se e solo se* $f \in Aut(\mathbb{D})$.

*Dimostrazione*: Per ogni $a \in \mathbb{D}$, se $\phi_a(\zeta) = \frac{\zeta-a}{1-\bar{a}\zeta}$, allora $(\phi_a)^{-1}(\zeta) = \phi_{-a}(\zeta) = \frac{\zeta+a}{1+\bar{a}\zeta}$. Siano $z, w \in \mathbb{D}$ arbitrari e si consideri $F = \phi_{f(w)} \circ f \circ \phi_{-w}$. Allora $F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ e

$$F(0) = \phi_{f(w)}(f(\phi_{-w}(0))) = \phi_{f(w)}(f(w)) = 0.$$

Allora applicando il Lemma di Schwarz alla funzione $F$, si ha $|F(\zeta)| \le |\zeta|$ per ogni $\zeta \in \mathbb{D}$. Quindi, se si prende $\zeta = \phi_w(z)$, possiamo concludere

$$d(f(z), f(w)) = |\phi_{f(w)}(f(z))| \le |\zeta| \le \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right| = d(z,w)$$

e quindi (6.3.5) è dimostrata. Se per qualche $z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ valesse l'eguaglianza allora per la funzione $F = \phi_{f(w_0)} \circ f \circ \phi_{-w_0}$ varrebbe l'eguaglianza $|F(\zeta)| = |\zeta|$ per $\zeta = \phi_{w_0}(z_0)$. Questo succede se e solo se $F$ è una rotazione ossia se per qualche $c \in \partial\mathbb{D}$ si ha $F(\zeta) = c\zeta$ e quindi $f(\phi_{-w_0}(\zeta)) = \phi_{-f(w_0)}(c\zeta)$ per ogni $\zeta \in \mathbb{D}$. Dunque l'eguaglianza in (6.3.5) si ha se e solo se per ogni $\eta \in \mathbb{D}$

$$f(\eta) = f(\phi_{-w_0}(\phi_{w_0}(\eta))) = \phi_{-f(w_0)}(c\phi_{w_0}(\eta))$$

e quindi se e solo se $f$ è un automorfismo di $\mathbb{D}$ per il quale l'eguaglianza in (6.3.5) si ha per ogni coppia di punti di $\mathbb{D}$.

La dimostrazione di (6.3.6) è simile. Sia $z \in \mathbb{D}$ e sia $w = f(z)$. Si definisca $G: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mediante $G = \phi_w \circ f \circ \phi_{-z}$. Allora $G(0) = \phi_w(f(\phi_{-z}(0))) = \phi_w(f(z)) = 0$ e quindi, applicando il Lemma di Schwarz alla funzione $G$, abbiamo $|G'(0)| \leq 1$. Dato che per ogni $a \in \mathbb{D}$ si ha

$$\phi_a'(\zeta) = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}\zeta)^2},$$

allora

$$1 \geq |G'(0)| = |\phi_w'(f(\phi_{-z}(0)))||f'(\phi_{-z}(0))||\phi_{-z}'(0)| = \frac{1-|z|^2}{1-|w|^2}|f'(z)|$$

da cui segue la (6.3.6) immediatamente. Come prima si dimostra che in (6.3.6) vale l'eguaglianza in un punto se e solo se $G$ è una rotazione e questo succede se e solo se $f$ è un automorfismo del disco unitario $\mathbb{D}$. □

La funzione definita da (6.3.4) in realtà definisce una distanza sul disco unitario $\mathbb{D}$ conosciuta come la *distanza di Möbius* e il Teorema di Schwarz-Pick dice che gli automorfismi sono isometrie per questa distanza. Precisiamo questa osservazione nel seguente

TEOREMA 6.3.9: *Funzione definita da (6.3.4) per $z, w$ nel disco unitario centrato nell'origine $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$ è una distanza per la quale una funzione olomorfa $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ è un'isometria se e solo se è un automorfismo di $\mathbb{D}$.*

*Dimostrazione*: Il Teorema 6.3.8 dice che se una funzione olomorfa $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ conserva la funzione definita da (6.3.4) è un automorfismo di $\mathbb{D}$. D'altra parte se $\phi \in Aut(\mathbb{D})$ e $z, w \in \mathbb{D}$ allora, usando (6.3.5), si ha

$$d(z,w) = d(\phi^{-1}(\phi(z)), \phi^{-1}(\phi(w))) \leq d(\phi(z), \phi(w)) \leq d(z,w)$$

e quindi $d(\phi(z), \phi(w)) = d(z,w)$. Rimane da dimostrare che $d$ è una distanza. È immediato verificare dalla definizione (6.3.4) che $d(z,w) \geq 0$, $d(z,w) = 0$ se e solo se $z = w$ e che $d(z,w) = d(w,z)$. Rimane da dimostrare che $d$ soddisfa la diseguaglianza triangolare ossia per ogni $z, v, w$ occorre dimostrare che

$$d(z,w) \leq d(z,v) + d(v,w). \tag{6.3.7}$$

Ovviamente la (6.3.7) è verificata se $v = w$. Possiamo dunque assumere $v \neq w$. Semplifichiamo la verifica utilizzando l'invarianza della funzione $d$ rispetto a $Aut(\mathbb{D})$. Sia $\phi \in Aut(\mathbb{D})$ definito da $\phi = e^{-i\theta_0}\phi_v$ dove $\theta_0$ è tale che $\phi_v(w) = |\phi_v(w)|e^{i\theta_0}$. Allora si ha $\phi(v) = 0$ e $\phi(w) = t \in (0,1)$. Se $\phi(z) = u = \rho e^{i\theta}$, allora, per l'invarianza della funzione $d$ rispetto a $Aut(\mathbb{D})$, dato che $d(z,w) = d(u,t)$, $d(z,v) = d(u,0)$ e $d(z,w) = d(0,t)$, si ha che verificare che (6.3.7) vale per ogni $z, v, w \in \mathbb{D}$, con $v \neq w$, equivale a provare che

$$\left| \frac{\rho e^{i\theta} - t}{1 - t\rho e^{i\theta}} \right| \leq \rho + t \tag{6.3.8}$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$, $t, \rho \in (0,1)$. La verifica di (6.3.8) è elementare, seppure un po' noiosa. Si consideri per $\theta \in [0, 2\pi]$ la funzione

$$g(\theta) = \left| \frac{\rho e^{i\theta} - t}{1 - t\rho e^{i\theta}} \right|^2 = \frac{\rho^2 - 2t\rho\cos\theta + t^2}{1 - 2t\rho\cos\theta + t^2\rho^2}.$$

Si ha che

$$g'(\theta) = \frac{2t\rho(1-t^2)(1-\rho^2)\sin\theta}{(1-2t\rho\cos\theta + t^2\rho^2)^2},$$

e quindi $g'(\theta)$ in $(0, 2\pi)$ si annulla solo per $\theta = \pi$. Si ha

$$g(0) = g(2\pi) = \left(\frac{t-\rho}{1-t\rho}\right)^2, \qquad g(\pi) = \left(\frac{t+\rho}{1+t\rho}\right)^2 = g(\pi)$$

e, dato che per $t, \rho \in (0, 1)$,

$$\left(\frac{t+\rho}{1+t\rho}\right)^2 - \left(\frac{t-\rho}{1-t\rho}\right)^2 = \frac{4t\rho(t^2-1)(\rho^2-1)}{(1+t\rho)^2(1-t\rho)^2} \geq 0,$$

allora

$$g(0) = g(2\pi) = \left(\frac{t-\rho}{1-t\rho}\right)^2 \leq \left(\frac{t+\rho}{1+t\rho}\right)^2 = g(\pi).$$

Dunque la funzione $g$ ha massimo in $\theta = \pi$ e quindi

$$\left|\frac{\rho e^{i\theta} - t}{1 - t\rho e^{i\theta}}\right| = \sqrt{g(\theta)} \leq \left|\frac{t+\rho}{1+t\rho}\right| \leq \rho + t$$

dato che si ha $1 \leq 1 + t\rho < 2$. Abbiamo allora provato che la (6.3.8) vale. $\square$

Una carrellata sulle relazioni fra queste nozioni e la geometria iperbolica del disco unitario può essere trovata alla pagina web

http://www.dm.unipi.it/ abate/libri/libriric/files/IterationThTautMan1-1.pdf

**Esercizi.**

**1.** Sia $f$ una funzione olomorfa su un aperto connesso $A \subset \mathbb{C}$. Dimostrare che se $|f| = cost$ su un aperto $B \subset A$ allora $f$ è costante su $A$.

**2.** Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni olomorfe su un aperto limitato $A$, continue su $\overline{A}$. Dimostrare che se $\mathcal{F}$ è equilimitata su $\partial A$ allora è una famiglia normale.

**3.** Sia $f\colon \mathbb{D}(0, R) \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $f(0) = 0$ e $|f(z)| < M$ per ogni $z \in \mathbb{D}(0, R)$. Allora $|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|$ per ogni $z \in \mathbb{D}(0, R)$ e $|f'(0)| \leq \frac{M}{R}$. Inoltre se vale l'uguaglianza in una delle due diseguaglianze, allora esiste $c$ con $|c| = 1$ tale che $f(z) = c\frac{M}{R}z$.

**4.** Sia $f\colon \mathbb{D}(0, 1) \to \mathbb{D}(0, 1)$ una funzione olomorfa del disco unitario in sé e si supponga che $f$ abbia uno zero di ordine $n$ in 0. Dimostrare che $|f(z)| \leq |z|^n$ per ogni $z \in \mathbb{D}(0, 1)$ e $|f^{(n)}(0)| \leq n!$. Inoltre esiste $c$ con $|c| = 1$ tale che $f(z) = cz^n$ se e solo o se $|f(z_0)| = |z_0|^n$ per qualche $z_0 \in \mathbb{D}(0, 1)$ o vale $|f^{(n)}(0)| = n!$.

**5.** Sia $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una funzione olomorfa sul disco unitario $\mathbb{D}$ con $f(0) = 0$. Dimostrare che la serie $F(z) = \sum_{k \geq 0} f(z^k)$ definisce una funzione olomorfa su $\mathbb{D}$.

## 6.4. Un tocco di dinamica olomorfa locale.

I primi passi della teoria dei sistemi dinamici olomorfi consistono nella descrizione del comportamento locale in un intorno di un punto fisso. Precisamente se $f$ è una funzione olomorfa su un intorno aperto $U$ di un punto $z_0$ e $f(z_0) = z_0$, ossia $z_0$ è un punto fisso di $f$, si è interessati al comportamento asintotico, ossia per $n$ molto grande, vicino $z_0$ della successione $f^n$ delle iterate della funzione $f$ definita induttivamente da $f^1 = f$ e $f^n = f^{n-1} \circ f$. Qui illustreremo la situazione in un caso particolarmente semplice. Chiameremo il numero $\lambda = f'(z_0)$ il *moltiplicatore* di $f$ nel punto fisso $z_0$. Il punto fisso $z_0$ si dice *iperbolico* se il suo moltiplicatore ha modulo $|\lambda|$ diverso da $0, 1$. Un punto fisso iperbolico si dice *attrattivo* se $0 < |\lambda| < 1$ si dice *repulsivo* se $|\lambda| > 1$. Per punti fissi iperbolici si può dimostrare che il comportamento della successione delle iterate è equivalente a quello di un'applicazione lineare. Il seguente risultato nel quale, per semplicità si suppone che il punto fisso sia l'origine, è storicamente uno dei primi teoremi dimostrati in dinamica olomorfa:

TEOREMA 6.4.1: (di linearizzazione di Koenigs [1884]) *Siano $U$ un aperto con $0 \in U$ e $f$ una funzione olomorfa su $U$. Se $0$ è un punto fisso iperbolico, ossia con moltiplicatore $\lambda$ tale che $|\lambda| \neq 0, 1$, allora esistono aperti $A \subset U$ e $B$ con $0 \in A, B$ e un biolomorfismo $\Phi\colon A \to B$ tale che $\Phi(0) = 0$ e $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(z) = \lambda z$ per ogni $z \in B$. L'applicazione $\Phi$ è unica a meno di una costante moltiplicativa non nulla. In particolare se $|\lambda| \in (0, 1)$, per $z \in B$ si ha $\Phi \circ f^n \circ \Phi^{-1}(z) = \lambda^n z$ per ogni $n \geq 1$.*

*Dimostrazione*: L'ultima parte dell'enunciato è ovvia se vale il resto. Cominciamo dunque dimostrando l'unicità di $\Phi$ a meno di costante. Se $\Psi$ è un'altra applicazione con le stesse proprietà di $\Phi$, allora in un intorno di $0$ si ha

$$\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(z) = \lambda z = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1}(z).$$

Dunque $\Phi^{-1}(\lambda z) = f \circ \Phi^{-1}(z)$ e quindi

$$\begin{aligned}\Psi \circ \Phi^{-1}(\lambda z) &= \Psi \circ f \circ \Phi^{-1}(z) = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1} \circ \Psi \circ \Phi^{-1}(z)\\ &= \Psi \circ f \circ \Psi^{-1}(\Psi \circ \Phi^{-1}(z)) = \lambda \Psi \circ \Phi^{-1}(z).\end{aligned}$$

Ma allora, se lo sviluppo in serie di $\Psi \circ \Phi^{-1}$ vicino $0$ è dato da $\Psi \circ \Phi^{-1}(z) = \sum_{n \geq 1} b_n z^n$, si ha

$$\sum_{n \geq 1} \lambda b_n z^n = \lambda \sum_{n \geq 1} b_n z^n = \lambda \Psi \circ \Phi^{-1}(z) = \Psi \circ \Phi^{-1}(\lambda z) = \sum_{n \geq 1} \lambda^n b_n z^n$$

da cui segue che per ogni $n \geq 1$ si ha $\lambda b_n = \lambda^n b_n$ che può accadere solo se $b_n = 0$ per ogni $n \geq 2$. Dunque per ogni $z$ in un un intorno aperto contenente l'origine, si ha $\Psi(z) = \Psi(\Phi^{-1}(\Phi(z))) = b_1 \Phi(z)$. Per l'unicità del prolungamento analitico allora $\Psi = b_1 \Phi$ sul più grande aperto connesso contenente $0$ su cui $\Psi$ e $\Phi$ sono ambedue definiti.

Veniamo ora alla costruzione di $\Phi$ nel caso in cui $0$ sia un punto fisso attrattivo, ossia se $0 < |\lambda| < 1$. Sia $r > 0$ tale che $\overline{\mathbb{D}(0, r)} \subset U$; se $z \in \mathbb{D}(0, r)$ si ha $f(z) = \lambda z + z^2 g(z)$ per qualche funzione $g$ olomorfa in un intorno aperto di $\overline{\mathbb{D}(0, r)}$. Sia $M > 0$ tale che $|g(z)| < M$ per ogni $z \in \overline{\mathbb{D}(0, r)}$. Sia $\epsilon > 0$ tale che se $c = |\lambda| + M\epsilon$ si abbia

$$c^2 < |\lambda| < |\lambda| + M\epsilon = c < 1.$$

Allora, se $z \in \mathbb{D}_\epsilon = \mathbb{D}(0,\epsilon)$, si ha

$$|f(z)| \leq |\lambda||z| + M|z|^2 \leq (|\lambda| + M\epsilon)|z| = c|z|.$$

Allora, per $z \in \mathbb{D}_\epsilon$, si ha

$$|f^n(z)| < c|f^{n-1}(z)| < \ldots < c^n|z| < c^n\epsilon$$

Dunque la successione $f^n$ converge uniformemente alla funzione nulla su $\mathbb{D}_\epsilon$ e per ogni $n$ si ha $f^n(z) \in \mathbb{D}_\epsilon$ se $z \in \mathbb{D}_\epsilon$. Per ogni $n$ si definisca su $\mathbb{D}_\epsilon$

$$\Phi_n = \frac{1}{\lambda^n} f^n.$$

Dato che per $z \in \mathbb{D}_\epsilon$, si ha

$$|f(z) - \lambda z| < M|z|^2,$$

allora

$$|\Phi_{n+1}(z) - \Phi_n(z)| = \frac{1}{|\lambda|^{n+1}}|f^{n+1}(z) - \lambda f^n(z)| \leq \frac{M}{|\lambda|^{n+1}}|f^n(z)|^2 < \frac{M\epsilon^2}{|\lambda|}\left(\frac{c^2}{|\lambda|}\right)^n.$$

Dunque la successione

$$\Phi_{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n}[\Phi_{k+1} - \Phi_k]\right) + \Phi_1$$

converge uniformemente su $\mathbb{D}_\epsilon$. Sia $\Phi$ la funzione olomorfa su $\mathbb{D}_\epsilon$ limite di questa successione. La funzione $\Phi$ è un biolomorfismo su un aperto contente 0. Infatti, dato che vicino 0 si ha $f(z) = \lambda z + O(z^2)$, per ogni $n$, si ha

$$f^n(z) = \lambda f^{n-1}(z) + O(f^{n-1}(z))^2) = \lambda f^{n-1}(z) + O(z^2) = \ldots = \lambda^n z + O(z^2).$$

Dunque, per ogni $n$, abbiamo $\Phi'_n(0) = 1$ e quindi $\Phi'(0) = 1$. Possiamo allora concludere che esiste un aperto $A$ contenente 0 tale che $\Phi\colon A \to B = \Phi(A)$ è un biolomorfismo. D'altra parte per ogni $n$ e $w \in \mathbb{D}_\epsilon$ si ha

$$\Phi_n \circ f(w) = \lambda\Phi_{n+1}(w)$$

allora, passando al limite per $n \to \infty$ segue che

$$\Phi \circ f(w) = \lambda\Phi(w)$$

e dunque se $w = \Phi^{-1}(z)$

$$\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(z) = \lambda\Phi(\Phi^{-1}(z)) = \lambda z.$$

Dato che si può scegliere $A, B = \Phi(A) \subset \mathbb{D}_\epsilon$, la dimostrazione, nel caso in cui 0 sia un punto fisso attrattivo, è completa. Il caso in cui 0 sia un punto fisso repulsivo per $f$ segue dal caso attrattivo considerando $h = f^{-1}$ che è una funzione olomorfa ben definita in un intorno di 0 e che ha moltiplicatore $1/\lambda$ in 0 e quindi un punto fisso attrattivo in 0. $\square$

Mentre nel caso nel quale il moltiplicatore $\lambda$ ha modulo $|\lambda| = 1$ la teoria della linearizzazione è molto profonda e si affronta con metodi fuori della portata di queste note, se il moltiplicatore è $\lambda = 0$, il punto fisso si dice *superattrattivo* e possiamo dare un risultato simile al precedente. Se una funzione olomorfa $f$ definita su un aperto $U$ contenente 0 ha un punto fisso superattrattivo in 0, allora $f$ ha uno sviluppo in serie di potenze in 0 del tipo:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k \tag{6.4.1}$$

con $a_n \neq 0$ con $n \geq 2$. Il numero $n$ si dice *grado locale* del punto fisso superattrattivo. Il risultato che fornisce la "forma normale" a meno di cambi di coordinate olomorfi in un punto superattrattivo è il seguente:

TEOREMA 6.4.2: (di Böttcher [1904]) *Siano $U$ un aperto con $0 \in U$ e $f$ una funzione olomorfa su $U$. Se 0 è un punto fisso superattrattivo con grado locale $n$, allora esistono aperti $A \subset U$ e $B$ con $0 \in A, B$ e un biolomorfismo $\Phi: A \to B$ tale che $\Phi(0) = 0$ e $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(\zeta) = \zeta^n$ per ogni $\zeta \in B$. L'applicazione $\Phi$ è unica a meno di una costante moltiplicativa data da una radice $(n-1)$-esima dell'unità. In particolare dunque, per $\zeta \in B$ si ha $\Phi \circ f^k \circ \Phi^{-1}(\zeta) = \zeta^{n^k}$ per ogni $k \geq 1$.*

*Dimostrazione*: Dimostriamo prima che l'applicazione $\Phi$ esiste. Come già osservato, lo sviluppo in serie di Taylor di $f$ in 0 è del tipo:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$$

con $a_k \neq 0$. Si osservi per cominciare che si può supporre che $a_n = 1$. Infatti se $c \in \mathbb{C}$ è una soluzione dell'equazione $c^{n-1} = a_n$, allora se $L(z) = cz$, abbiamo

$$L \circ f \circ L^{-1}(z) = cf\left(\frac{z}{c}\right) = c\sum_{k=n}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{c}\right)^k = z^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} c^{1-k} a_k z^k.$$

Dunque, a meno di coniugare preliminarmente con una tale applicazione lineare $L$, si può assumere che $a_n = 1$ e possiamo assumere di essere in questa situazione:

$$f(z) = z^n + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{n+k} = z^n\left(1 + g(z)\right) \qquad \text{dove} \qquad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k. \tag{6.4.2}$$

Si può scegliere $r \in (0, \frac{1}{2})$ in modo che per $z \in \mathbb{D}(0,r)$ si abbia $|g(z)| < \frac{1}{2}$. Allora segue che

$$|f(z)| \leq \frac{3}{2}|z|^n \leq \frac{3}{4}|z| < |z|$$

da cui segue che $f\left(\mathbb{D}(0,r)\right) \subset \mathbb{D}(0,r)$ e $f(z) \neq 0$ se $z \in \mathbb{D}(0,r) \setminus \{0\}$. Se, come prima, la successione delle iterate della funzione $f$ è definita induttivamente da $f^1 = f$ e $f^k = f^{k-1} \circ f$, allora si ha per $z \in \mathbb{D}(0,r)$:

$$f^k(z) = z^{n^k}\left(1 + n^{k-1} b_1 z + O(z^2)\right). \tag{6.4.3}$$

Questo fatto si vede facilmente per induzione. È infatti vero per $k = 1$. Supponiamo che risulti

$$f^{k-1}(z) = z^{n^{k-1}}\left(1 + n^{k-2} b_1 z + O(z^2)\right).$$

Allora, usando (6.4.2),

$$\begin{aligned}
f^k(z) &= f\left(f^{k-1}(z)\right) = f\left(z^{n^{k-1}}\left(1+n^{k-2}b_1z+O(z^2)\right)\right)\\
&= \left(z^{n^{k-1}}\left(1+n^{k-2}b_1z+O(z^2)\right)\right)^n\left(1+g\left(z^{n^{k-1}}\left(1+n^{k-2}b_1z+O(z^2)\right)\right)\right)\\
&= z^{n^k}\left(1+n^{k-2}b_1z+O(z^2)\right)^n\left(1+g\left(O(z^{n^{k-1}})\right)\right)\\
&= z^{n^k}\left(1+n^{k-1}b_1z+O(z^2)\right)\left(1+O(z^{n^{k-1}})\right)\\
&= z^{n^k}\left(1+n^{k-1}b_1z+O(z^2)\right)
\end{aligned}$$

e quindi abbiamo (6.4.3) per ogni $k \geq 1$. Per ogni $k$ la funzione $1+n^{k-1}b_1z+O(z^2)$ che compare in (6.4.3) non si annulla in $\mathbb{D}(0,r)$ e quindi ammette una radice $n^k$-esima olomorfa. La si può scegliere in modo che

$$\left(1+n^{k-1}b_1z+O(z^2)\right)^{\frac{1}{n^k}} = 1+\frac{n^{k-1}b_1z}{n^k}+O(z^2) = 1+\frac{b_1}{n}z+O(z^2).$$

Usando questo ramo di radice $n^k$-esima olomorfa, possiamo allora definire per ogni $k \geq 1$ una funzione olomorfa su $\mathbb{D}(0,r)$ mediante

$$\phi_k(z) = \left(f^k(z)\right)^{\frac{1}{n^k}} = z\left(1+n^{k-1}b_1z+O(z^2)\right)^{\frac{1}{n^k}} = z\left(1+\frac{b_1}{n}z+O(z^2)\right).$$

Abbiamo allora, in particolare, che

$$\phi_k(f(z)) = \left(f^{k+1}(z)\right)^{\frac{1}{n^k}} = \left[\left(f^{k+1}(z)\right)^{\frac{1}{n^{k+1}}}\right]^n = [\phi_{k+1}(z)]^n \tag{6.4.4}$$

e quindi $[\phi_{k+1}(z)]^{n^k} = [\phi_k(f(z))]^{n^{k-1}} = \ldots = \left[\phi_2(f^{k-1}(z))\right]^n = \phi_1(f^k(z))$. Dunque

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\phi_{k+1}(z)}{\phi_k(z)}\right| &= \left|\frac{\phi_1(f^k(z))}{f^k(z)}\right|^{\frac{1}{n^k}} = \left|\frac{f^k(z)\left(1+\frac{b_1}{n}f^k(z)+O(z^2)\right)}{f^k(z)}\right|^{\frac{1}{n^k}}\\
&= \left|\left(1+\frac{b_1}{n}f^k(z)+O(z^2)\right)\right|^{\frac{1}{n^k}} = 1+\frac{1}{n^{k+1}}O\left(\left|f^k(z)\right|\right)\\
&= 1+O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)
\end{aligned} \tag{6.4.5}$$

dove abbiamo usato il fatto che, per ogni $k$, si ha $\left|f^k(z)\right| < 1$. Definiamo, per $z \in \mathbb{D}(0,r)$,

$$P_k(z) = \prod_{j=1}^{k}\frac{\phi_{j+1}(z)}{\phi_j(z)} = \frac{\phi_{k+1}(z)}{\phi_1(z)}. \tag{6.4.6}$$

Allora, per $z \in \mathbb{D}(0,r)$, usando la (6.4.5), abbiamo

$$\begin{aligned}
|P_k(z)-P_l(z)| &= \left|\left[1+O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)\right]^k - \left[1+O\left(\frac{1}{n^{l+1}}\right)\right]^l\right|\\
&= \left|O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)-O\left(\frac{1}{n^{l+1}}\right)\right| \underset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

e quindi la successione $P_k(z)$, definita in (6.4.6), converge uniformemente su $\mathbb{D}(0,r)$ a $\frac{\Phi(z)}{\phi_1(z)}$ per qualche funzione olomorfa $\Phi$ che è quindi il limite uniforme su $\mathbb{D}(0,r)$ della successione $\phi_k$. Dato che ${\phi_k}'(0) = 1$ per ogni $k$, allora $\Phi'(0) = 1$ e quindi, eventualmente scegliendo $r$ opportunamente più piccolo, possiamo assumere che $\Phi$ sia un biolomorfismo da $A = \mathbb{D}(0,r)$ a $B = \Phi(\mathbb{D}(0,r))$. Passando al limite in (6.4.4), abbiamo allora $\Phi(f(z)) = [\Phi(z)]^n$ ossia, per ogni $\zeta \in B$ abbiamo

$$\Phi \circ f \circ (\zeta) = \zeta^n$$

come desiderato. Sia $\Psi$ un altro biolomorfismo di un intorno dell'origine tale che $\Psi(0) = 0$ e $\Phi \circ f \circ (\zeta) = \zeta^n$. Allora abbiamo per $\zeta$ vicino l'origine: $\Phi^{-1}(\zeta^n) = f \circ \Phi^{-1}(\zeta)$ e quindi

$$\Psi \circ \Phi^{-1}(\zeta^n) = \Psi \circ f \circ \Phi^{-1}(\zeta) = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1} \circ \Psi \circ \Phi^{-1}(\zeta) = \left[\Psi \circ \Phi^{-1}(\zeta)\right]^n.$$

se lo sviluppo in serie di $\Psi \circ \Phi^{-1}$ vicino 0 è dato da $\Psi \circ \Phi^{-1}(\zeta) = c_1\zeta + c_k\zeta^k + \dots$ dove $c_k$ è il primo coefficiente non nullo dopo il primo, si ha

$$\begin{aligned} c_1\zeta^n + c_k\zeta^{2k} + \dots &= \Psi \circ \Phi^{-1}(\zeta^n) \\ &= \left[\Psi \circ \Phi^{-1}(\zeta)\right]^n = \left[c_1\zeta + c_2\zeta^2 + c_3\zeta^3 + \dots\right]^n \\ &= c_1^n\zeta^n + nc_1^{n-1}c_k\zeta^{n+k-1} + \dots \end{aligned}$$

dove, dato che $k \geq 2$ si ha $nk > n + k - 1$. Ma allora, paragonando i coefficienti si ottiene induttivamente che $c_1^{n-1} = 1$ e che tutti gli altri coefficienti della serie di $\Psi \circ \Phi^{-1}$ sono nulli. Possiamo concludere che per ogni $\zeta$ in un un intorno aperto contenente l'origine, si ha $\Psi(\zeta) = \Psi(\Phi^{-1}(\Phi(\zeta))) = c_1\Phi(\zeta)$. Per l'unicità del prolungamento analitico allora $\Psi = c_1\Phi$ sul più grande aperto connesso contenente 0 su cui $\Psi$ e $\Phi$ sono ambedue definiti.

L'ultima parte dell'enunciato è ovvia. $\square$

## CAPITOLO 7

# Principio dell'argomento e Biolomorfismi

## 7.1. Il Principio dell'argomento.

Una conseguenza molto importante del Teorema dei Residui è il seguente

TEOREMA 7.1.1: (Principio dell'argomento) $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un aperto e* $f$ *una funzione meromorfa in* $\Omega$*. Sia* $D \subset \Omega$ *un aperto limitato con* $\overline{D} \subset \Omega$ *e con frontiera* $\partial D$ *unione finita di curve* $C^1$ *a tratti semplici chiuse disgiunte. Se* $f$ *non ha zeri né poli su* $\partial D$*, si ha*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P \tag{7.1.1}$$

*dove* $N$ *è la somma delle molteplicità degli zeri di* $f$ *in* $D$ *e* $P$ *è la somma degli ordini dei poli di* $f$ *in* $D$*.*

*Dimostrazione*: In $D$ la funzione $f$ ha un numero finito di zeri $a_1, \ldots, a_r$ di molteplicità $\mu_1, \ldots, \mu_r$ rispettivamente e un numero finito di poli $b_1, \ldots, b_s$ di ordine $\nu_1, \ldots, \nu_s$ rispettivamente. Dunque esiste una funzione $h$ olomorfa su un aperto contente $\overline{D}$ che non si annulla in alcun punto di $D$ tale che per $z \in D$

$$f(z) = \frac{(z-a_1)^{\mu_1}\ldots(z-a_r)^{\mu_r}}{(z-b_1)^{\nu_1}\ldots(z-b_s)^{\nu_s}}h(z). \tag{7.1.2}$$

Dato che per funzioni olomorfe $\phi$ e $\psi$, ovunque abbia senso, si ha

$$\frac{(\phi\psi)'}{\phi\psi} = \frac{\phi'}{\phi} + \frac{\psi'}{\psi} \tag{7.1.3}$$

e, per $\nu \in \mathbb{Z}$, se $\alpha(z) = (z-c)^\nu$, si ha

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\nu}{(z-c)}. \tag{7.1.4}$$

Dunque, da (7.1.2), (7.1.3) e (7.1.4), segue

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{r}\frac{\mu_k}{z-a_k} - \sum_{h=1}^{s}\frac{\nu_h}{z-a_h} + \frac{h'(z)}{h(z)}. \tag{7.1.5}$$

Da (7.1.5) segue che $\frac{f'}{f}$ è una funzione meromorfa con poli semplici esattamente dove $f$ si annulla e dove $f$ ha un polo. Un calcolo immediato dimostra che dove $f$ ha uno zero $\frac{f'}{f}$ ha residuo pari alla molteplicità dello zero e dove $f$ ha un polo $\frac{f'}{f}$ ha per residuo l'opposto dell'ordine del polo. Dunque (7.1.1) segue dal Teorema dei Residui.
□

Un'importante applicazione è il Teorema di Rouché che afferma che il numero degli zeri di una funzione olomorfa su un aperto limitato non cambia se le si aggiunge una funzione olomorfa sul dominio che ha modulo sul bordo dominato dal modulo della prima.

Teorema 7.1.2: (di Rouché) *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato. Se $g, h \in C^0(\overline{\Omega})$ sono funzioni olomorfe in $\Omega$ tali che*

$$\mid g(z) \mid < \mid h(z) \mid \qquad \forall z \in \partial\Omega. \tag{7.1.6}$$

*Allora le funzioni $h$ e $f = g + h$ hanno lo stesso numero di zeri in $\Omega$.*

*Dimostrazione*: Dato che vale (7.1.6) e $g, h \in C^0(\overline{\Omega})$, esiste un aperto $A \supset \partial\Omega$ tale che su $A \cap \overline{\Omega}$ si ha $|g| < |h|$. Dunque

$$h(z) \neq 0 \quad \text{e} \quad f(z) = h(z) + g(z) \neq 0 \qquad \forall z \in A \cap \overline{\Omega}.$$

Infatti se esistesse $z_0 \in A \cap \overline{\Omega}$ con $h(z_0) = 0$ allora si avrebbe $0 = |h(z_0)| > |g(z_0)| \geq 0$ e se esistesse $z_1 \in A \cap \overline{\Omega}$ con $f(z_1) = 0$ allora si avrebbe $h(z_1) = -g(z_1)$ e quindi $|h(z_1)| = |g(z_1)| < |h(z_1)|$.

Sia $\Omega' = \Omega \setminus \overline{A}$. Allora $\Omega'$ è un aperto tale che $\overline{\Omega'}$ è un compatto che contiene tutti gli zeri di $f$ e di $h$. Sia $D$ un aperto con frontiera unione finita di curve $C^1$ a tratti semplici chiuse disgiunte tale che $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset D \subset \overline{D} \subset \Omega$. Dato che $h$ e $f$ sono olomorfe su $D$ e non hanno zeri su $\partial D$, applicando il principio dell'argomento, basta dimostrare che

$$\int_{\partial D} \frac{f'}{f}\, dz = \int_{\partial D} \frac{h'}{h}\, dz. \tag{7.1.7}$$

A tal fine si definisca una funzione meromorfa $q$ su $\Omega$ mediante $f = hq$ ossia ponendo

$$q(z) = 1 + \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Dunque $q$ è meromorfa con singolarità (eventualmente eliminabili) dove $h$ ha zeri. Allora

$$\frac{f'}{f} = \frac{h'}{h} + \frac{q'}{q}.$$

Dunque per dimostrare la (7.1.7) basterà provare che $\int_{\partial D} \frac{q'}{q}\, dz = 0$. Su $A \cap \overline{\Omega}$ si ha $|g| < |h|$ e quindi anche $|q(z) - 1| = |g(z)/h(z)| < 1$. Allora per $z \in A \cap \Omega$ si ha $|q(z)| < 2$ e quindi $q$ è una funzione olomorfa su $A \cap \Omega$ con

$$q(A \cap \Omega) \subset \mathbb{D}(1, 1) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Allora una funzione olomorfa è definita per $z \in A \cap \Omega$ da $Q(z) = Log(q(z))$, dove $Log$ è il logaritmo principale definito su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Dato che $Q'(z) = q'(z)/q(z)$ su $A \cap \Omega$, si ha

$$\int_{\partial D} \frac{q'(z)}{q(z)}\, dz = \int_{\partial D} Q'(z)\, dz = 0.$$

□

Il teorema di Rouché permette di dare un'altra semplice dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra. Inoltre la dimostrazione suggerisce anche metodi per "localizzare" approsimativamente le radici:

COROLLARIO 7.1.3: (Teorema fondamentale dell'algebra) *Un polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi ha esattamente $n$ radici complesse contate con la loro molteplicità.*

*Dimostrazione*: Basta dimostrare che il risultato vale per $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ per $n \geq 1$. Dato che

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{p(z)}{z^n} = \lim_{|z|\to\infty} 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} = 1,$$

allora per qualche $R > 0$ se $|z| = R$ si deve avere

$$\left|\frac{p(z)}{z^n} - 1\right| < 1$$

o, in altre parole, $|p(z) - z^n| < |z^n|$. Per il teorema di Rouché segue che $p(z) = (p(z) - z^n) + z^n$ ha esattamente $n$ zeri nel disco di centro 0 e raggio $R$. $\square$

Il teorema di Rouché può essere usato per stimare dove sono situati gli zeri di un polinomio.

**Esempio 1.** Si consideri il polinomio $p(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$. Si ponga

$$h(z) = -4z^5 \qquad \text{e} \qquad g(z) = z^8 + z^2 - 1.$$

Su $|z| = 1$ si ha $|h(z)| > |g(z)|$ visto che

$$|h(z)| = |4z^5| = 4 \qquad \text{e} \qquad |g(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leq |z^8| + |z^2| + |1| \leq 3.$$

Per il teorema di Rouché segue che $p(z) = h(z) + g(z)$ ha 5 radici nel disco $|z| < 1$. D'altro canto se si pone

$$l(z) = z^8 \qquad \text{e} \qquad m(z) = -4z^5 + z^2 - 1,$$

su $|z| = 2$ si ha $|l(z)| > |m(z)|$ visto che

$$|l(z)| = |z^8| = 256 \qquad \text{e} \qquad |m(z)| = |-4z^5 + z^2 - 1| \leq |4z^5| + |z^2| + |1| \leq 128 + 4 + 1 = 133.$$

Per il Teorema di Rouché segue che $p(z) = l(z) + m(z)$ ha 8 radici nel disco $|z| < 2$ e quindi $p(z)$ ha 3 radici nella corona $1 \leq |z| < 2$.

**Esempio 2.** Ovviamente il Teorema di Rouché si può usare anche per studiare equazioni non polinomiali. Ad esempio, per ogni numero reale $t_0 > 1$ si consideri l'equazione

$$z + e^{-z} = t_0. \tag{7.1.8}$$

Posto $f(z) = z + e^{-z}$, si vede subito che l'equazione (7.1.8) ha almeno una soluzione reale positiva. Infatti $f(0) = 1 < t_0$ e $\lim_{\mathbb{R}\ni x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Dunque necessariamente deve esistere $x_0 > 0$ tale che $f(x_0) = t_0$. Mediante il Teorema di Rouché si vede subito che questa è l'unica soluzione di (7.1.8) nel semipiano $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) \geq 0\}$. In effetti siano $g(z) = e^{-z}$ e $h(z) = z - t_0$. Il fatto che (7.1.8) ha una sola soluzione in $\mathbb{H}$ equivale a dimostrare che la funzione $g + h$ ha un solo zero in $\mathbb{H}$. Questo è sicuramente vero per la funzione $h(z) = z - t$. Sia $R > 1 + t_0$ e si consideri $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0, |z| < R\}$. Ci basterà dimostrare che $|g(z)| < |h(z)|$ per $z \in \partial D_R$. Se $z = iy \in [-iR, iR]$ allora

$$|g(z)| = |e^{-iy}| = 1 < R - t_0 \leq |iy| - t_0 \leq |iy - t_0| = |h(z)|.$$

Inoltre, se per $z = x + iy$ si ha $x > 0$ e $|z| = R$, allora

$$|g(z)| = e^{-x} < 1 < R - t_0 \leq |z| - t_0 \leq |z - t_0| = |h(z)|.$$

Un'applicazione importante applicazione del Teorema di Rouché è il seguente:

TEOREMA 7.1.4: (Teorema di Hurwitz) *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe convergente uniformemente sui compatti di $\Omega$ a $f$. Siano $f \not\equiv 0$, $a \in \Omega$ e, per $r > 0$ opportuno, $\mathbb{D} = \mathbb{D}(a, r) \subset \overline{\mathbb{D}(a, r)} \subset \Omega$ in modo che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial\mathbb{D}$. Allora esiste $N$ tale che se $n > N$ le funzioni $f$ e $f_n$ hanno lo stesso numero di zeri in $\mathbb{D}$. In particolare segue che se per ogni $n$ le funzioni $f_n$ non si annullano in alcun punto di $\Omega$ o $f$ non si annulla in alcun punto di $\Omega$ o $f \equiv 0$.*

*Dimostrazione*: Se $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial\mathbb{D}$ sia

$$d = \min\{|f(z)| \mid z \in \partial\mathbb{D}\} > 0.$$

Dato che $f_n$ converge uniformemente a $f$ su $\partial\mathbb{D}$, esiste $N$ tale che se $n > N$ per $z \in \partial\mathbb{D}$ si deve avere

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{1}{2}d < |f(z)|.$$

Il teorema di Rouché allora implica che $f_n(z) = f_n(z) - f(z) + f(z)$ ha lo stesso numero di zeri di $f$ su $\mathbb{D}$. $\square$

Il seguente è un utile corollario del Teorema di Hurwitz:

COROLLARIO 7.1.5: *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe iniettive su un aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{C}$ uniformemente convergente sui compatti di $\Omega$ a $f$. Allora $f$ è olomorfa e o è iniettiva o è costante.*

*Dimostrazione*: Sia dunque $f_n$ una successione uniformemente convergente sui compatti di $\Omega$ a $f$. Per il teorema di Weierstrass $f$ è olomorfa. Sia $z_1 \in \Omega$ arbitrario e si definiscano

$$\zeta = f(z_1) \quad \text{e} \quad \zeta_n = f_n(z_1) \quad \forall \quad n.$$

Per $z_2 \in \Omega \setminus \{z_1\}$, sia $K = \overline{\mathbb{D}(z_2, r)} \subset \Omega \setminus \{z_1\}$. Si osservi che, dato che $f_n$ è iniettiva per ogni $n$, si ha per ogni $z \in K$

$$f_n(z) - \zeta_n = f_n(z) - f_n(z_1) \neq 0. \tag{7.1.9}$$

Dato che $f_n$ converge uniformemente sui compatti di $\Omega$ a $f$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che se $n > N$ si ha

$$\sup_K \mid f_n - f \mid < \epsilon/2 \quad \text{e} \quad \mid f_n(z_1) - f(z_1) \mid < \epsilon/2$$

e quindi per $z \in K$ e $n > N$

$$\begin{aligned} \mid (f_n(z) - \zeta_n) - (f(z) - \zeta) \mid &= \mid (f_n(z) - f_n(z_1)) - (f(z) - f(z_1)) \mid \\ &\leq \mid f_n(z) - f(z) \mid + \mid f_n(z_1) - f(z_1) \mid < \epsilon. \end{aligned}$$

Dunque $f_n - \zeta_n$ converge uniformemente a $f - \zeta$ su $K$. Da (7.1.9) e dal Teorema di Hurwitz segue che o $f(z) - \zeta \neq 0$ per ogni $z \in K$ o $f \equiv \zeta$. Se $f \equiv \zeta$ su $K$ allora $f$ è costante per il teorema del prolungamento analitico. Se invece $f(z) - \zeta \neq 0$ per ogni $z \in K$ allora, in particolare $f(z_1) \neq f(z_2)$. Ripetendo l'argomento per ogni $z_2 \neq z_1$, si ha che in questo caso $f$ è iniettiva. □

**APPENDICE: Il Teorema delle Funzioni Implicite.**

Diamo ora una dimostrazione della versione olomorfa del Teorema delle Funzioni Implicite in due variabili complesse che utilizza le nozioni e le idee introdotte in questo paragrafo:

TEOREMA 7.1.6: *Sia $B \subset \mathbb{C}^2$ un aperto e $F\colon B \to \mathbb{C}$ una funzione di classe $C^1$ tale che per ogni $(z_0, w_0) \in B$ esistano aperti $A_{z_0} \subset \mathbb{C}$ contenente $z$ e $A_{w_0} \subset \mathbb{C}$ contente $w_0$ tali che $A_{z_0} \times A_{w_0} \subset B$ e che*

$$\begin{aligned} F(\cdot, w)\colon A_{z_0} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto F(z,w) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} F(z, \cdot)\colon A_{w_0} &\to \mathbb{C} \\ w &\mapsto F(z,w) \end{aligned}$$

*siano funzioni olomorfe rispettivamente per ogni $w \in A_{w_0}$ e $z \in A_{z_0}$. Allora:*

*(i) Se per $(z_0, w_0) \in Z_F$ la funzione $F_w = \frac{\partial F(z,\cdot)}{\partial w}$ non si annulla in $(z_0, w_0)$, allora esistono un disco $\mathbb{D}_{z_0}$ centrato in $z_0$, un disco $\mathbb{D}_{w_0}$ centrato in $w_0$ e una funzione olomorfa $\phi\colon \mathbb{D}_{z_0} \to \mathbb{D}_{w_0}$ tale che $\phi(z_0) = w_0$ e*

$$Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0}) = \{(z, \phi(z)) \mid z \in \mathbb{D}_{z_0}\}.$$

*(ii) Se per $(z_0, w_0) \in Z_F$ la funzione $F_z = \frac{\partial F(\cdot,w)}{\partial z}$ non si annulla in $(z_0, w_0)$, allora esistono un disco $\mathbb{D}_{z_0}$ centrato in $z_0$, un disco $\mathbb{D}_{w_0}$ centrato in $w_0$ e una funzione olomorfa $\psi\colon \mathbb{D}_{w_0} \to \mathbb{D}_{z_0}$ tale che $\psi(w_0) = z_0$ e*

$$Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0}) = \{(\psi(w), w) \mid w \in \mathbb{D}_{w_0}\}.$$

*Dimostrazione*: Naturalmente basterà dimostrare la parte (i) dell'enunciato, l'altra è completamente equivalente. Sia $f_z$ la funzione olomorfa definita su $A_{w_0}$ ponendo $f_z(w) = F(z, w)$. Dato che per ipotesi $\frac{\partial F(z,\cdot)}{\partial w}$ non si annulla in $(z_0, w_0)$, allora $f'_{z_0}(w_0) \neq 0$. Dunque esiste un disco $\mathbb{D}_{w_0}$ centrato in $w_0$ tale che $w_0$ sia l'unico zero di $f_{z_0}$ su $\overline{\mathbb{D}}_{w_0}$. Dunque per qualche $d > 0$ si ha $|f_{z_0}(w)| > 2d$ per ogni $w \in \partial\mathbb{D}_{w_0}$. Esiste allora, per continuità, un disco $\mathbb{D}_{z_0}$ centrato in $z_0$ tale che se $z \in \mathbb{D}_{z_0}$ allora

$|f_z(w)| > d$ per ogni $w \in \partial\mathbb{D}_{w_0}$ e possiamo assumere che $f'_z(w) \neq 0$ per $w \in \mathbb{D}_{w_0}$. Allora, per il Principio dell'Argomento, il numero $n$ di radici dell'equazione $f_z(w) = 0$ è dato da

$$n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_{w_0}} \frac{f'_z(\omega)}{f_z(\omega)} d\omega.$$

Dato che per $z = z_0$, si $n = 1$, per continuità, si ha $n = 1$ per ogni $z \in \mathbb{D}_{z_0}$. Sia $\phi(z) \in \mathbb{D}_{w_0}$ l'unica radice dell'equazione $f_z(w) = 0$ per $z \in \mathbb{D}_{z_0}$. Con un argomento simile a quello usato nella dimostrazione della Proposizione 4.5.1, se si pone $g(\zeta) = \zeta\frac{f'_z(\zeta)}{f_z(\zeta)}$, allora $\phi(z)$ è l'unico polo della funzione $g(\zeta)$ in $\mathbb{D}_{w_0}$ ed è un polo semplice dato che $f'_z(w) \neq 0$ per $w \in \mathbb{D}_{w_0}$. Allora:

$$\phi(z) = Res_{\phi(z)}(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_{w_0}} \omega\frac{f'_z(\omega)}{f_z(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_{w_0}} \omega\frac{1}{F(z,\omega)}\frac{\partial F}{\partial z}(z,\omega)d\omega$$

da cui segue che $\phi$ è olomorfa dato che l'integrando è olomorfo nella variabile $z$. $\square$

**Osservazione.** Fino a questo punto non avevamo mai fatto cenno a funzioni olomorfe in più di variabili complesse. D'altra parte il Teorema 7.1.6 evidentemente riguarda funzioni di più di una variabile complessa. Senza addentrarci in definizioni in questo momento, ci limitiamo ad osservare che il Teorema 7.1.6 si può applicare in moltissime occasioni. Ad esempio sia $F \in \mathbb{C}[z, w]$ un polinomio di due variabili complesse con coefficienti in $\mathbb{C}$. Evidentemente per ogni fissato $z \in \mathbb{C}$ la funzione $w \mapsto F(z, w)$ è intera come pure, per ogni fissato $w \in \mathbb{C}$ la funzione $z \mapsto F(z, w)$. Più in generale lo stesso vale per la funzione $F$ definita da

$$F(z.w) = \sum_{j,k=0}^{+\infty} a_{j,k} z^j w^k$$

come somma di una serie uniformemente convergente sui compatti di un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^2$

## 7.2. Biolomorfismi.

Concludiamo il capitolo con una importante proprietà delle funzioni olomorfe che si ottiene come elegante corollario dei risultati ottenuti. Dimostreremo in particolare che l'inversa di una funzione olomorfa è necessariamente olomorfa e che quindi una applicazione olomorfa biettiva è necessariamente un biolomorfismo. Sarà necessario il seguente risultato di cui ripetiamo la dimostrazione per comodità del lettore.

TEOREMA 7.2.1: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $f$ una funzione olomorfa su $\Omega$ e $z_0 \in \Omega$. Se $f'(z_0) \neq 0$ esiste un aperto $U$ con $z_0 \in U \subset \Omega$ tale che la restrizione $f_{|U}: U \to f(U) = V$ è biettiva e l'inversa $f^{-1}: V \to U$ è olomorfa.*

*Dimostrazione*: Siano $u$ e $v$ la parte reale e immaginaria della funzione $f$: $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Allora, dato che $f$ è olomorfa, si ha $f' = f_x$, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ e quindi

$$det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = (u_x + iv_x)(u_x - iv_x) = f'\overline{f'} = |f'|^2.$$

Se $f'(z_0) \neq 0$, la funzione $f$, per il teorema dell'applicazione inversa per applicazioni di classe $C^1$ su aperti di $\mathbb{R}^2$ ammette una inversa $f^{-1}: V \to U$ di classe $C^1$. Dato che $f'(z_0) \neq 0$, restringendo eventualmente $U$, si può supporre che $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in U$. Dunque derivando l'eguaglianza $z = f^{-1}(f(z))$, posto $w = f(z)$ si ha

$$0 = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} z = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} (f^{-1}(f(z))) = \frac{\partial f^{-1}}{\partial \overline{z}}(w)\, \overline{f'(z)}$$

e quindi $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f^{-1}) \equiv 0$ su $U$.

$\square$

Persino per funzioni analitiche reali l'invertibilità non garantisce che l'inversa conservi le proprietà di regolarità. L'esempio della funzione $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $u(x) = x^3$ chiarisce bene la situazione: $u$ è un omeomorfismo ma $u^{-1}$ non è derivabile in 0 dato che $u'(0) = 0$. Per funzioni olomorfe invece l'invertibilità locale garantisce che la derivata non si annulli mai e quindi che l'inversa sia olomorfa.

PROPOSIZIONE 7.2.2: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $f$ una funzione olomorfa su $\Omega$ e $z_0 \in \Omega$. Allora $f'(z_0) \neq 0 \iff$ esiste un aperto $U$ con $z_0 \in U \subset \Omega$ tale che la restrizione $f_{|U}$ di $f$ a $U$ è iniettiva.*

*Dimostrazione*: In una direzione il risultato è immediata conseguenza del Teorema 7.2.1. Supponiamo che per $z_0 \in \Omega$ e per $r_1 > 0$ tale che $\mathbb{D} = \mathbb{D}(z_0, r_1) \subset \Omega$ si abbia che $f$ è iniettiva su $\mathbb{D}$. Per assurdo supponiamo che $f'(z_0) = 0$. Dato che gli zeri di funzioni olomorfe sono isolati, per qualche $r$ con $0 < r < r_1$, si ha $f'(z) \neq 0$ per ogni $z$ tale che $0 < |z - z_0| < r$. D'altro canto per $|z - z_0| < r$, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2 + O(|z - z_0|^3) \\ &= f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2 + O(|z - z_0|^3) \end{aligned}$$

e quindi

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2 + O(|z - z_0|^3).$$

Allora la funzione $f - f(z_0)$, per l'iniettività di $f$ su $\mathbb{D}$, ha in $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$ un unico zero in $z_0$ di molteplicità $\mu \geq 2$. Di conseguenza, per il principio dell'argomento, posto $\Gamma_r = \{z \mid |z - z_0| = r\}$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)}\, dz = \mu \geq 2.$$

Sia $\delta = \min\{|f(z) - f(z_0)| \mid z \in \Gamma_r\} > 0$ e si consideri la funzione $\Phi \colon \mathbb{D}(f(z_0), \delta) \to \mathbb{Z}$ definita da

$$\Phi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz.$$

Dunque $\Phi(w)$, per il principio dell'argomento, è uguale alla somma delle molteplicità degli zeri della funzione $f - w$ nel disco $|z - z_0| < r$ e quindi assume solo valori interi. Inoltre è semplice verificare che $\Phi$ è continua. Infatti se $w_n \to w_0$ allora, passando al limite sotto il segno d'integrale si vede subito che $\Phi(w_n) \to \Phi(w_0)$. Dunque la $\Phi$ è costante:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = \Phi(w) = \Phi(f(z_0)) = \mu \geq 2 \tag{7.2.1}$$

per ogni $w \in \mathbb{D}(f(z_0), \delta)$. Per il principio dell'argomento (7.2.1) implica che il numero degli zeri, contati con la loro molteplicità, della funzione $f(z) - w$ sul disco $\mathbb{D}(z_0, r)$ è maggiore o uguale a 2. D'altro canto, dato che $f'(z) \neq 0$ per ogni $z$ tale che $0 < |z - z_0| < r$, se $w \in \mathbb{D}(f(z_0), \delta) \setminus \{f(z_0)\}$, la funzione $f(z) - w$ può avere solo zeri semplici sul disco $\mathbb{D}(z_0, r)$. Dunque per ogni $w \in \mathbb{D}(f(z_0), \delta) \setminus \{f(z_0)\}$ esisterebbero almeno due punti $z_1, z_2 \in \mathbb{D}(z_0, r)$ tali che

$$f(z_1) = w = f(z_2).$$

Questo contraddice il fatto che $f$ sia iniettiva su $\mathbb{D} = \mathbb{D}(z_0, r_1)$. $\square$

I risultati precedenti danno immediatamente il seguente

TEOREMA 7.2.3: *Siano $\Omega$ e $\Omega'$ due aperti di $\mathbb{C}$ e $f \colon \Omega \to \Omega'$ una applicazione olomorfa. Allora $f$ è un biolomorfismo $\iff$ $f$ è biettiva.*

*Dimostrazione*: Per definizione, se $f$ è un biolomorfismo è una funzione biettiva. Supponiamo che $f$ sia olomorfa e biettiva. Sia $z \in \Omega$ arbitrario e $w = f(z) \in \Omega'$. Basterà dimostrare che $f^{-1}$ è olomorfa in un intorno di $w$. Questo segue immediatamente dalla Proposizione 7.2.2 che ci assicura che che $f'$ non si annulla in un intorno aperto di $z$. In questo caso Teorema 7.2.1 garantisce che $f^{-1}$ è olomorfa in un intorno di $w$. $\square$

## Riferimenti bibliografici

*Senza pretesa di completezza, diamo qualche indicazione per orientarsi nella letteratura riguardante la teoria delle funzioni di una variabile complessa.*


[A] L.V. Ahlfors: **Complex Analysis.** McGraw-Hill, NewYork, 1979 (Third ed.).

[AN] R.B. Ash, W.P. Novinger: **Complex Variables.** Dover, Mineola (NewYork), 2007 (Sec. ed.).

[BG] C.A. Berenstein, R. Gay: **Complex variables.** Springer, NewYork, 1991.

[CO] J.B. Conway: **Functions of one complex variable.** Springer, NewYork-Berlin, 1978 (Second ed.).

[D] P. Dolbeault: **Analyse complexe.** Masson, Paris, 1990.

[FL] W. Fisher, I. Lieb: **Functionentheorie.** Vieweg, Braunsschweig, 1980.

[GA] T.W. Gamelin: **Complex Analysis.** Springer, NewYork, 2001.

[GK] R.E. Greene, S.G.Krantz: **Function theory of one complex variable.** AMS, Providence, 2002.

[L] S. Lang: **Complex analysis.** Springer, NewYork-Berlin, 1985 (Sec. ed.).

[M] A.I. Markushevich: **Theory of functions of a complex variable.** Chelsea, New York, 1965.

[N] R. Narasimhan: **Complex analysis in one complex variable.** Birkäuser, Boston-Basel-Stuttgard, 1985.

[RE] R. Remmert: **Theory of Complex Functions.** Springer, NewYork-Berlin, 1991.

[RU] W. Rudin: **Analisi reale e complessa.** Boringhieri, Torino, 1974.

[SI] B. Simon: **Basic Complex Analysis.** AMS, Providence, 2015.

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi: **Complex Analysis.** Princeton University Press, Princeton, 2003.

*Per qualche approfondimento sulla teoria geometrica delle funzioni:*

[A2] L.V. Ahlfors: **Conformal invariants. Topics in geometric function theory.** McGraw-Hill, NewYork, 1973.

[JS] G.A. Jones, D. Singerman: **Complex Function Theory. An Algebraic and Geometric viewpoint.** McGraw-Hill, NewYork, 1973.

[K] S.G. Krantz: **Complex analysis: The geometric viewpoint.** Mathematical Association of America, Washington, 1992.

*Per un'introduzione all'analisi complessa in più variabili:*

[H] L. Hörmander: **An introduction to complex analysis in several variables.** North Holland, Amsterdam, 1973 (Seconda ed.).

[N2] R. Narasimhan: **Several complex variables.** Univ. of Chicago Press, Chicago, 1971.

[K2] S.G. Krantz: **Function theory of several complex variables.** Wadsworth, Belmont, 1992 (Seconda ed.).

[K2] R.M. Range: **Holomorphic functions and integral representations in several complex variables.** NewYork-Berlin, 1986.