CAPITOLO 10

Approssimazione razionale e costruzione di funzioni

5.1. Formule di Cauchy

Per comodità del lettore ricordiamo qui la formula di Cauchy per funzioni di classe C^1 ottenuta nel Capitolo 4 come conseguenza della formula di Gauss-Green. la formula integrale di Cauchy per funzioni C^1:

Teorema 5.1.1: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato tale che la frontiera ∂A di A sia unione disgiunta finita di curve semplici chiuse C^1 a tratti. Se $f \in C^1(\overline{A})$, allora, denotando $\zeta = \xi + i\eta$, per ogni $z \in A$ si ha*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{A} \frac{f_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta. \tag{5.1.1}$$

Dal Teorema 5.1.1 segue immediatamente la formula integrale di Cauchy per funzioni olomorfe:

Teorema 5.1.2: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato tale che la frontiera ∂A di A sia unione disgiunta finita di curve semplici chiuse C^1 a tratti. Se $f \in C^1(\overline{A})$ è una funzione olomorfa su A, allora per ogni $z \in A$ e $n \geq 0$ si ha*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \tag{5.1.2}$$

5.2. Teoremi di approssimazione

In questo paragrafo applichiamo la formula di Cauchy per dimostrare qualche risultato di approssimazione. Cominciamo con il più elementare di una serie di risultati dovuti a Runge:

Teorema 5.2.1: *Se f è una funzione olomorfa su un aperto A contente il compatto K, allora esiste una successione di funzioni razionali, senza singolarità in K, uniformemente convergente a f su K.*

Dimostrazione: Dato che K è compatto, esiste un aperto limitato B, ottenuto come unione finita di dischi centrati in punti di K, in modo che $K \subset B \subset \overline{B} \subset A$ e tale che ∂B è unione disgiunta finita di curve semplici chiuse C^1 a tratti. Si osservi che la funzione

$$(z, \zeta) \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

è continua per $(z, \zeta) \in K \times \partial B$ e quindi, dato che $K \times \partial B$ è un compatto, uniformemente continua. Se n è un intero positivo arbitrario, esiste allora $\delta_n > 0$ tale che per ogni $z \in K$ se $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial B$ con $|\zeta_1 - \zeta_2| < \delta_n$ si ha

$$\left| \frac{f(\zeta_1)}{\zeta_1 - z} - \frac{f(\zeta_2)}{\zeta_2 - z} \right| < \frac{2\pi}{nL(\partial B)}.$$

Si divida la frontiera ∂B di B in archi γ_j per $j = 1, \dots, k_n$ di estremi ζ_j', ζ_j'' in modo che ogni componente connessa di ∂B sia unione di un numero finito di archi γ_j che sono o disgiunti o si intersecano negli estremi e

$$\partial B = \cup_{j=1}^{k_n} \gamma_j, \qquad L(\partial B) = \sum_{j=1}^{k_n} L(\gamma_j), \qquad \text{se } \zeta_1, \zeta_2 \in \gamma_j \text{ allora } |\zeta_1 - \zeta_2| < \delta_n.$$

Infine si ponga:

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{k_n} f(\zeta_j'') \frac{\zeta_j'' - \zeta_j'}{\zeta_j'' - z}. \tag{5.2.1}$$

Si osservi che R_n è una funzione razionale con singolarità su ∂B e quindi fuori di un aperto che contiene K. D'altra parte, dato che $\int_{\gamma_j} d\zeta = \zeta_j'' - \zeta_j'$, per ogni $z \in K$ si ha:

$$\begin{aligned} |f(z) - R_n(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta_j'')}{\zeta_j'' - z} \right] d\zeta \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\gamma_j} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta_j'')}{\zeta_j'' - z} \right] d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{k_n} \max_{\zeta_1, \zeta_2 \in \gamma_j} \left| \frac{f(\zeta_1)}{\zeta_1 - z} - \frac{f(\zeta_2)}{\zeta_2 - z} \right| L(\gamma_j) \\ &< \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{nL(\partial B)} L(\partial B) = \frac{1}{n} \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

e quindi la tesi segue. □

Il teorema che abbiamo dimostrato spinge a chiedersi se sia possibile approssimare in modo uniforme su un compatto funzioni olomorfe definite in un intorno mediante successioni di polinomi o di funzioni intere. Naturalmente questo è evidente se il compatto è particolare. Ad esempio ogni funzione f olomorfa in un intorno di un disco chiuso K può essere approssimato uniformemente da polinomi su K. Basta infatti considerare la successione delle somme parziali dello sviluppo di potenze di f centrato nel centro di K. D'altra parte è facile convincersi che in questa problematica la geometria del compatto sul quale si intende approssimare ha un ruolo cruciale come cerchiamo di illustrare con il seguente esempio.

Esempio. Sia K la circonferenza unitaria centrata nell'origine, in modo che K sia la frontiera del disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. La funzione $f_0(z) = \frac{1}{z}$ è olomorfa in un intorno di K ma non è uniformemente approssimabile mediante funzioni olomorfe in un aperto A contenente $\overline{\mathbb{D}}$ e quindi mediante funzioni intere o polinomi. Infatti se esistesse una funzione olomorfa f su A tale che per ogni $z \in K$ risultasse $|f(z) - f_0(z)| \leq \frac{1}{2}$, allora si avrebbe

$$|zf(z) - 1| \leq \frac{|z|}{2} = \frac{1}{2}$$

per $z \in K$ e quindi, per il principio del massimo modulo per ogni $z \in \mathbb{D}$. Ma questo è assurdo come si vede subito considerando $z = 0$.

In effetti l'esempio illustra proprio l'ostruzione all'approssimazione uniforme sui compatti di funzioni olomorfe mediante polinomi. Nella dimostrazione del Teorema 5.2.1 si vede che le singolarità delle funzioni razionali approssimanti, per costruzione, sono su curve esterne al compatto K. Dunque le approssimanti razionali "esplodono" quando ci si avvicina a queste singolarità e all'infinito. I polinomi sono esattamente le funzioni razionali che "esplodono" solo all'infinito. Dunque quando le singolarità si possono scegliere arbitrariamente distanti dal compatto K sembrerebbe possibile operare un procedimento di spostamento all'infinito delle singolarità che permetterebbe di passare dall'approssimazione mediante funzioni razionali a quella polinomiale. In effetti nell'esempio la singolarità della funzione $f_0(z) = \frac{1}{z}$, essa stessa razionale, è "intrappolata" in una componente connessa limitata del complemento di K in $\mathbb{C}$ e questo fatto è esattamente ciò che impedisce l'approssimazione polinomiale. Vale infatti il seguente

TEOREMA 5.2.2: (di Runge) *Sia $K \subset \mathbb{C}$ un compatto tale che $\mathbb{C} \setminus K$ è connesso. Se f è una funzione olomorfa su un aperto A contente il compatto K, allora esiste una successione di polinomi complessi uniformemente convergente a f su K.*

Per la dimostrazione abbiamo bisogno del seguente:

LEMMA 5.2.3: *Sia $K \subset \mathbb{C}$ un compatto tale che $\mathbb{C} \setminus K$ è connesso. Se $z_0 \notin K$ allora esiste una successione di polinomi $P_n(z) \in \mathbb{C}[z]$ che converge uniformemente a $\frac{1}{z-z_0}$ su K.*

Dimostrazione: Sia $R > 0$ tale che $K \subset \mathbb{D}(0,R)$ e sia $z_1 \notin \mathbb{D}(0,R)$. Per ogni $z \in K$ allora:

$$\frac{1}{z - z_1} = -\frac{1}{z_1}\frac{1}{1 - \frac{z}{z_1}} = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{z^k}{z_1^{k+1}}$$

dove la serie converge uniformemente su K dato che per ogni $z \in K$ risulta $\left|\frac{z}{z_1}\right| < 1$. Dunque la successione delle somme parziali

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} -\frac{z^k}{z_1^{k+1}} \in \mathbb{C}[z]$$

è una successione di polinomi che converge uniformemente su K a $\frac{1}{z-z_1}$. Da questo segue facilmente che per ogni intero positivo l la successione di polinomi $S_n^l(z)$ converge uniformemente su K a $\frac{1}{(z-z_1)^l}$. Infatti basta osservare che, se $\sup_K |\frac{1}{z-z_1}| = L$, allora esiste n_l tale che per $n > n_l$ e $z \in K$ si ha $|S_n(z) - \frac{1}{z-z_1}| \leq L$ e quindi $|S_n(z)| \leq |S_n(z) - \frac{1}{z-z_1}| + |\frac{1}{z-z_1}| \leq 2L$. Dunque per $z \in K$ si ha

$$\begin{aligned}\left|S_n^l(z) - \frac{1}{(z-z_1)^l}\right| &\leq \left|S_n(z) - \frac{1}{(z-z_1)}\right| \sum_{k=0}^{l-1} (2L)^k L^{l-1-k} \\ &= \left|S_n(z) - \frac{1}{(z-z_1)}\right| L^{l-1}(2^l - 1).\end{aligned}$$

Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N_l > n_l$ tale che, per $n > N_l > n_l$ e $z \in K$, si ha

$$\left|S_n(z) - \frac{1}{(z-z_1)}\right| < \frac{\epsilon}{L^{l-1}(2^l-1)}$$

e quindi

$$\left|S_n^l(z) - \frac{1}{(z-z_1)^l}\right| < \epsilon.$$

Infine da questo è immediato concludere che per ogni polinomio Q, la successione di polinomi $Q(S_n(z))$ converge uniformemente a $Q(\frac{1}{(z-z_1)})$ su K.

Sia ora $z_0 \notin K$ arbitrario. Dato che $\mathbb{C} \setminus K$ è connesso esiste una curva continua $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus K$ tale che $\gamma(0) = z_0$ e $\gamma(1) = z_1$. Sia

$$\rho = \frac{1}{2} dist(\gamma, K) = \frac{1}{2} \min_{t \in [0,1]} (\gamma(t), K).$$

Si scelgano punti $w_0 = z_0, \ldots, w_N = z_1$ tali che $|w_j - w_{j+1}| < \rho$ per ogni $0 = 1, \ldots N-1$.

Sia $w \in \gamma$ un punto arbitrario e sia $u \in \mathbb{D}(w, \rho)$. Se $z \in K$ allora

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-u-(w-u)} = \frac{1}{z-u} \frac{1}{1 - \frac{w-u}{z-u}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w-u)^k}{(z-u)^{k+1}}$$

dove, dato che per $z \in K$ si ha

$$|z-u| = |(z-w) - (u-w)| \geq ||z-w| - |u-w|| > |2\rho - \rho| = \rho,$$

allora $\frac{|w-u|}{|z-u|} < 1$ e quindi la serie converge uniformemente su K.

Dunque, utilizzando la successione delle somme parziali della serie, si ottiene che, per ogni $j = 0, \ldots N-1$, esiste una successione di polinomi S_n tali che $S_n(\frac{1}{z-u})$ approssima uniformemente su K la funzione $\frac{1}{z-w}$.

Utilizzando questo argomento per ogni $j = 0, \dots N-1$ allora si possono determinare polinomi $S_n^0, \dots, S_n^{N-1}$ tali che $S_n^j(\frac{1}{z-w_{j+1}})$ approssima uniformamente su K la funzione $\frac{1}{z-w_j}$ per ogni $j = 0, \dots N-1$.

Ripetendo l'argomento di prima, possiamo allora concludere che, se Q è un polinomio arbitrario, per ogni $j = 0, \dots N-1$, allora la successione di polinomi in $\frac{1}{z-w_{j+1}}$ definita da $Q(S_n^j(\frac{1}{z-w_{j+1}}))$ converge uniformemente a $Q(\frac{1}{z-w_{j+1}})$ su K. In conclusione, rimettendo insieme quanto dimostrato, possiamo concludere che esistono successioni di polinomi P_n^l tali che per ogni $\epsilon > 0$, se n è sufficientemente grande:

(*i*) $\left|P_n^0\left(\frac{1}{z-w_1}\right) - \frac{1}{z-z_0}\right| < \frac{\epsilon}{N+1}$ per ogni $z \in K$,

(*ii*) $\left|P_n^j\left(\frac{1}{z-w_{j+1}}\right) - P_n^{j-1}\left(\frac{1}{z-w_j}\right)\right| < \frac{\epsilon}{N+1}$ per ogni $z \in K$ per ogni $j = 1, \dots, N-1$,

(*iii*) $\left|P_n^N(z) - P_n^{N-1}\left(\frac{1}{z-z_1}\right)\right| < \frac{\epsilon}{N+1}$ per ogni $z \in K$.

Infatti la successione di polinomi in (*i*) non è altro che quella definita da S_n^0, le successioni $P_n^j\left(\frac{1}{z-w_{j+1}}\right)$ in (*ii*) si definiscono induttivamente come opportune sottosuccessioni di

$$P_n^{j-1}\left(S_n^j\left(\frac{1}{z-w_{j+1}}\right)\right),$$

e $P_n^N(z)$ è il polinomio che approssima uniformemente $P_n^{N-1}\left(\frac{1}{z-z_1}\right) = P_n^{N-1}\left(\frac{1}{z-w_N}\right)$ esistente per quanto provato all'inizio della dimostrazione. Ma allora, dato che per n sufficientemente grande e qualunque $z \in K$

$$\begin{aligned}
\left|P_n^N(z) - \frac{1}{z-z_0}\right| \leq & \left|P_n^N(z) - P_n^{N-1}\left(\frac{1}{z-w_N}\right)\right| \\
& + \left|P_n^{N-1}\left(\frac{1}{z-w_N}\right) - P_n^{N-2}\left(\frac{1}{z-w_{N-1}}\right)\right| \\
& \dots \\
& + \left|P_n^1\left(\frac{1}{z-w_2}\right) - P_n^0\left(\frac{1}{z-w_1}\right)\right| \\
& + \left|P_n^0\left(\frac{1}{z-w_1}\right) - \frac{1}{z-z_0}\right| < \epsilon,
\end{aligned}$$

la conclusione segue facilmente. □

Dimostrazione del Teorema 5.2.2: La dimostrazione ora si riduce ora a una semplice applicazione del Teorema 5.2.1 e del Lemma 5.2.3. Infatti se f è una funzione olomorfa in un aperto A che contiene K, per ogni intero positivo n, ricordando (5.2.1) e usando (5.2.2), si ha che per opportuna scelta di punti $\zeta_1', \dots, \zeta_{k_{2n}}'$ e $\zeta_1'', \dots, \zeta_{k_{2n}}''$, tutti appartenenti a $\mathbb{C} \setminus K$, se

$$R_{2n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{k_{2n}} f(\zeta_j'') \frac{\zeta_j'' - \zeta_j'}{\zeta_j'' - z},$$

allora per $z \in K$

$$|f(z) - R_{2n}(z)| < \frac{1}{2n}.$$

D'altra parte, per il Lemma 5.2.3, esistono polinomi $P^j(z)$ per $j = 1, \ldots, k_{2n}$ tali che per $z \in K$ si ha

$$\left| P^j(z) - \frac{1}{2\pi i} f(\zeta_j'') \frac{\zeta_j'' - \zeta_j'}{\zeta_j'' - z} \right| < \frac{1}{2nk_{2n}}.$$

Dunque, se si pone $Q_n(z) = \sum_{j=1}^{k_{2n}} P^j(z)$, si conclude che per $z \in K$

$$|f(z) - Q_n(z)| \leq |f(z) - R_{2n}(z)| + |R_{2n}(z) - Q_n(z)| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

e quindi la tesi. □

Nel caso in cui $\mathbb{C} \setminus K$ non sia connesso, come abbiamo visto, non è possibile approssimare uniformemente su K funzioni olomorfe in un intorno di K utilizzando polinomi. Se $\mathbb{C} \setminus K$ non è connesso allora sarà unione di una componente connessa illimitata e delle componenti limitate. Lo stesso tipo di argomenti già utilizzati ci permette di dimostrare la seguente utile variante, sempre dovuta a Runge, del Teorema 5.2.1 nella quale si osserva che se $\mathbb{C} \setminus K$ non è connesso le funzioni olomorfe su intorni di K sono uniformemente approssimabili su K mediante funzioni razionali con singolarità nelle componenti connesse limitate di $\mathbb{C} \setminus K$:

TEOREMA 5.2.4: *Sia $K \subset \mathbb{C}$ un compatto, f una funzione olomorfa su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ contenente K e sia S un sottoinsieme di $\mathbb{C} \setminus K$ tale che ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus K$ contiene almeno un punto di S. Allora esiste una successione di funzioni razionali, tutte con singolarità contenute in S, che converge uniformemente a f su K.*

Anche in questo caso la dimostrazione si basa su un lemma ausiliario:

LEMMA 5.2.5: *Sia $K \subset \mathbb{C}$ un compatto e U un aperto connesso contenuto in $\mathbb{C} \setminus K$. Se $z_1 \in U$ allora per ogni funzione R razionale con singolarità in U esiste una successione di funzioni razionali $Q_n(z)$ con singolarità nel punto z_1 tale che $Q_n(z)$ converge uniformemente a R su K.*

Dimostrazione: Le idee principali della dimostrazione sono molto simili a quelle utilizzate per dimostrare il 5.2.3 e quindi ci limitiamo a ripetere l'essenziale. Se f è una funzione razionale con singolarità in U, allora, dato che per il Teorema fondamentale dell'algebra segue che i polinomi irriducibili con coefficienti in $\mathbb{C}$ sono tutti lineari, la funzione R ha la seguente decomposizione in frazioni parziali:

$$R(z) = P(z) + \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_l} \frac{A_{kj}}{(z - b_k)^j}$$

dove $P(z)$ è un polinomio, $b_1, \ldots, b_l$ sono punti distinti di U, $m_1, \ldots, m_l$ sono interi positivi e A_{kj} sono numeri complessi per ogni $i = 1, \ldots, l$ e $j = 1, \ldots, m_l$.

Dato che U è connesso, esiste una curva continua $\gamma_k\colon [0,1] \to U$ con $\gamma_k(0) = b_k$ e $\gamma_k(1) = z_1$ per ogni $k = 1, \ldots, l$. Con le ovvie variazioni, una ripetizione fedele dell'argomento usato nel Lemma 5.2.3 applicato alla curva γ_k, dimostra che per ogni k esiste una successione di polinomi $P_n^k(z)$ tale che la successione $(P_n^k(\frac{1}{z-z_1}))^j$ converge uniformemente a $\frac{1}{(z-b_k)^j}$ per ogni $j = 1, \ldots, m_l$. Ma allora se si definisce

$$Q_n(z) = P(z) + \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_l} A_{kj} (P_n^k(\frac{1}{z - z_1}))^j$$

per ogni n la funzione Q_n è razionale con singolarità in z_1 e si verifica facilmente che Q_n converge uniformemente su K alla funzione R. $\square$

Dimostrazione del Teorema 5.2.4: Per il Teorema 5.2.1, esiste una successione di funzioni razionali $R_n(z)$ che converge uniformemente a f su K tale che ogni funzione R_n ha singolarità in $\mathbb{C} \setminus K$. Per costruzione, da (5.2.2), segue che $|f(z) - R_n(z)| < \frac{1}{n}$ per ogni $z \in K$. Siano $U_0, U_1, \ldots, U_k$ le componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus K$ dove U_0 è l'unica componente connessa illimitata. Per ogni n la funzione R_n ha un numero finito di singolarità in ciascuna componente in una connessa limitata $U_1, \ldots, U_k$ di $\mathbb{C} \setminus K$ oltre che eventualmente nella componente connessa illimitata U_0 di $\mathbb{C} \setminus K$. Esistono allora funzioni razionali R_n^j per $j = 0, \ldots, k$, ciascuna con singolarità rispettivamente in U_j in modo che $R_n = \sum R_n^j$. La funzione R_n^0 infine ha singolarità $z_1, \ldots, z_k$ tutte nella componente connessa illimitata U_0 di $\mathbb{C} \setminus K$. Sia $r > 0$ tale che $K \subset \mathbb{D}(0, r)$ e sia $z_0 \in V_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}$. Dato che U_0 è la componente connessa illimitata di $\mathbb{C} \setminus K$, allora $V_r \subset U_0$ e quindi ogni singolarità $z_1, \ldots, z_k$ di R_n^0 si può congiungere con una curva a z_0. Allora, ripetendo la dimostrazione del Lemma 5.2.3, si dimostra che esistono una successioni di polinomi olomorfi che approssimano uniformemente su K le funzioni $\frac{1}{z-z_j}$ per ogni $j = 1, \ldots, k$. Dunque per ogni n si trova un polinomio $Q_n^0(z)$ tale che si abbia $|R_n^0(z) - Q_n^0(z)| < \frac{1}{n(k_n+1)}$ per ogni $z \in K$. Per il Lemma 5.2.5, per ogni $j = 1, \ldots, k_n$ esiste una funzione razionale Q_n^j con singolarità in $S \cap U_j$ tale che si abbia $|R_n^j(z) - Q_n^j(z)| < \frac{1}{n(k_n+1)}$ per ogni $z \in K$. Sia $Q_n = \sum_{j=0}^{k_n} Q_n^j$. Allora per ogni $\epsilon > 0$, se $\frac{2}{n} < \epsilon$, per ogni $z \in K$ si ha:

$$|f(z) - Q_n(z)| \leq |f(z) - R_n(z)| + |R_n(z) - \sum_{j=0}^{k_n} Q_n^j(z)| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \epsilon$$

e quindi la tesi è dimostrata. $\square$

Ci sarà utile questa versione del Teorema 5.2.4:

TEOREMA 5.2.6: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso, $K \subset A$ un compatto e f una funzione olomorfa su un aperto $B \subset A$ che contiene K. Se ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus K$ contiene almeno un punto di $\mathbb{C} \setminus A$, allora esiste una successione di funzioni olomorfe in A, che converge uniformemente a f su K.*

Dimostrazione: Si applichi il Teorema 5.2.4 scegliendo un insieme $S \subset \mathbb{C} \setminus K$ tale che $S \cap A = \emptyset$. Le funzioni razionali approssimanti saranno allora olomorfe su A. $\square$

5.3. L'equazione di Cauchy-Riemann non omogenea.

Vogliamo ora utilizzare la formula di Cauchy per funzioni di classe C^1 ricordata nel primo paragrafo per provare risultati di esistenza e regolarità per le soluzioni dell'equazione di Cauchy-Riemann non omogenea:

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = h. \tag{5.3.1}$$

Cominciamo con una situazione molto particolare, nella quale le cose sono molto semplici. Ricordiamo una definizione. Il *supporto* di una funzione $f\colon A \to \mathbb{C}$ definita su un aperto A è dato da

$$\mathit{supp}(f) = \overline{\{z \in A \mid f(z) \neq 0\}}.$$

Per ogni $k = 1, 2, \ldots, \infty$, denoteremo con $C_0^k(A)$ l'insieme di tutte le funzioni a valori complessi su A di classe C^k e con supporto compatto contenuto in A. Il primo risultato è quasi immediato dalla formula di Cauchy per funzioni C^1

Teorema 5.3.1: *Sia $h \in C_0^k(\mathbb{C})$, per $k = 1, 2, \ldots, \infty$. La funzione u definita per $z \in \mathbb{C}$*

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \tag{5.3.2}$$

è soluzione su $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = h,$$

inoltre la funzione u costruita in (5.3.2) è di classe C^k.

Dimostrazione: Per quanto riguarda le proprietà di differenziabilità di u, se D è un operatore differenziale del primo ordine (nelle variabili x e y, se $z = x + iy$), allora:

$$\begin{aligned} Du(z) &= -\frac{1}{\pi} D \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta = -\frac{1}{\pi} D \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{h(\zeta' + z)}{\zeta'} d\xi' d\eta' \\ &= -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{Dh(\zeta' + z)}{\zeta'} d\xi' d\eta' \end{aligned}$$

dove si è denotato $\zeta = \xi + i\eta$ e $\zeta + z = \zeta' = \xi' + i\eta'$. Dato che Dh è una funzione continua a supporto compatto e $\frac{1}{\zeta'}$ è una funzione integrabile, il calcolo dimostra che l'ultima espressione definisce una funzione continua e quindi u è di classe C^1. Iterando l'argomento per ogni $l \leq k$ si dimostra che u è di classe C^k.

Sia $z \in \mathbb{C}$ e sia $R > 0$ tale che $z \in \mathbb{D}(0, R)$ e $\mathit{supp}(h) \subset \mathbb{D}(0, R)$. Allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) &= -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{h(\zeta' + z)}{\zeta'} d\xi' d\eta' \\ &= -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{h_{\overline{z}}(\zeta' + z)}{\zeta'} d\xi' d\eta' = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{D}(0,R)} \frac{h_{\overline{z}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{D}(0,R)} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{D}(0,R)} \frac{h_{\overline{z}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta = h(z). \end{aligned}$$

□

Osservazione. Anche se h è a supporto compatto, non è detto che la soluzione u dell'equazione $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = h$ costruita in (5.3.2) sia a supporto compatto come dimostra il seguente esempio. Sia $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ una funzione tale che $\phi(t) = 1$ per $|t| < 1$ e $\phi(t) = 0$ se $|t| > 4$. Si definisca

$$u_0 = -\frac{1 - \phi(|z|^2)}{z}.$$

Se $h = \frac{\partial u_0}{\partial \bar{z}}$, allora $h = 0$ sul disco $\mathbb{D}(0,1)$ e sul complemento del disco chiuso $\overline{\mathbb{D}(0,2)}$ Dunque $h \in C_0^\infty(\mathbb{C})$. Sia u_1 una soluzione a supporto compatto per l'equazione $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = h$. Per $R > 2$ grande abbastanza, se $z \in A_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$, risulta $u_1(z) = 0$. Allora la funzione $v = u_1 - u_0$ sarebbe olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ e, per ogni $z \in A_R$ si ha $v(z) = u_0(z) = \frac{1}{z}$. Per prolungamento analitico allora $v(z) = \frac{1}{z}$ su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma in questo caso $\frac{1}{z}$ sarebbe la restrizione di una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$!

Il Teorema 5.3.1 ci fornisce immediatamente questa conseguenza:

COROLLARIO 5.3.2: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $h \in C_0^k(A)$, per $k = 1, 2, \ldots, \infty$. Allora (5.3.2) fornisce una soluzione di classe C^k per l'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = h$$

e ogni altra soluzione di classe dell'equazione è di classe C^k.

Dimostrazione: Dato che h è a supporto compatto, si può estendere con regorità ponendola uguale a zero fuori del suo supporto e quindi la dimostrazione del Teorema 5.3.1 ci fornisce la dimostrazione della prima parte dell'enunciato. Se v è un'altra soluzione dell'equazione, allora la funzione $f = v - u$ è olomorfa su A e quindi $v = u + f \in C^k$. □

Per le applicazioni non basta risolvere l'equazione di Cauchy-Riemann solo per funzioni a supporto compatto. Per affrontare il problema generale occorre un argomento che ci è possibile mettere in piedi usando in modo essenziale i risultati di approssimazione di Runge. In particolare il Teorema 5.2.6 permette di dimostrare la seguente utilissima variante del Lemma 4.1.6.

LEMMA 5.3.3: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Esiste una successione $\{A_n\}_{n \geq 1}$ di aperti tali che*
(i) $K_n = \overline{A}_n$ è compatto per ogni $n \geq 1$;
(ii) $K_n = \overline{A}_n \subset A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
(iii) $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$;
(iv) Per ogni n, ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus K_n$ interseca $\mathbb{C} \setminus A$;
(v) Per ogni n e per ogni funzione olomorfa f definita su un aperto contenente K_n esiste una successione di funzioni olomorfe su A che converge uniformemente su K_n a f.

Dimostrazione: Per ogni intero positivo n si definiscano

$$K_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid dist(z, \mathbb{C} \setminus A) \geq \frac{1}{n} \right\} \cap \overline{\mathbb{D}(0,n)}$$

e

$$A_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid dist(z, \mathbb{C} \setminus A) > \frac{1}{n} \right\} \cap \mathbb{D}(0,n).$$

Allora per ogni n si ha che A_n è aperto e K_n è compatto perché chiuso e limitato e

$$A_n \subset K_n \subset A_{n+1} \subset K_{n+1}.$$

Inoltre si ha evidentemente che $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} K_n$. Dunque le prime tre condizioni sono soddisfatte. Per quanto riguarda (iv), si osservi che

$$\mathbb{C} \setminus K_n = \bigcup_{w \notin A} \mathbb{D}(w, \frac{1}{n}) \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > n\}.$$

Dunque la componente connessa illimitata di $\mathbb{C} \setminus K_n$ deve allora contenere l'insieme connesso illimitato $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > n\}$ e se U è una componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus K_n$ e $z \in U$, allora per qualche $w_0 \notin A$ si deve avere $z \in \mathbb{D}(w_0, \frac{1}{n})$. Dato che $\mathbb{D}(w_0, \frac{1}{n})$ è un insieme connesso allora $\mathbb{D}(w_0, \frac{1}{n}) \subset U$ e quindi, in particolare $w_0 \in U \cap \mathbb{C} \setminus A \neq \emptyset$. Infine (v) segue da (iv) e dal Teorema 5.2.6. $\square$

Possiamo ora dimostrare

TEOREMA 5.3.4: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $h \in C^k(A)$, per $k = 1, 2, \ldots, \infty$. Allora esiste una soluzione $u \in C^k(A)$ per l'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = h. \tag{5.3.3}$$

Dimostrazione: Siano $\{A_n\}$ e $\{K_n\}$ le successioni di aperti e di compatti costruite nel Lemma 5.3.3, si fissi $K_0 = \emptyset$ e siano $\phi_n \in C_0^\infty(A)$ funzioni con

$$\phi_n \equiv 1 \quad \text{su} \quad K_n \qquad \text{e} \qquad supp(\phi_n) \subset A_{n+1}.$$

Dal Teorema 5.3.2 segue che esistono $u_1 \in C^k(A)$ e $u_2 \in C^k(A)$ tali che

$$\frac{\partial u_1}{\partial \overline{z}} = \phi_1 h \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_2}{\partial \overline{z}} = \phi_2 h$$

di modo che su K_1:

$$\frac{\partial (u_2 - u_1)}{\partial \overline{z}} = \phi_2 h - \phi_1 h = 0$$

e quindi $u_2 - u_1$ è olomorfa su A_1. Inoltre (banalmente!) su $K_0 = \emptyset$ si ha

$$|u_2 - u_1| < \frac{1}{2}.$$

Supponiamo ora induttivamente di aver costruito funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n \in C^k(A)$ tali che per ogni $j = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_j}{\partial \overline{z}} = \phi_j h \\ &u_{j+1} - u_j \quad \text{olomorfa su } A_j \\ &|u_{j+1} - u_j| < \frac{1}{2^j} \quad \text{su } K_{j-1}. \end{aligned}$$

Sia $v \in C^k(A)$ tale che

$$\frac{\partial v}{\partial \overline{z}} = \phi_{n+1} h.$$

Dato che $\phi_{n+1} = \phi_n$ su K_n, allora

$$\frac{\partial (v - u_n)}{\partial \overline{z}} = 0$$

su K_n e quindi $v - u_n$ è olomorfa su A_n. Dal Lemma 5.3.3 segue che esiste una funzione olomorfa f su A tale che $|v - u_n - f| < 2^{-n}$ su K_{n-1}. Dunque, definendo $u_{n+1} = v - f$, abbiamo dimostrato per induzione che esiste una successione di funzioni $u_n \in C^k(A)$ tale che per ogni n si abbia:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_n}{\partial \overline{z}} = \phi_n h \\ &u_{n+1} - u_n \quad \text{olomorfa su } A_n \\ &|u_{n+1} - u_n| < \frac{1}{2^n} \quad \text{su } K_{n-1}. \end{aligned}$$

Dato che se $K \subset A$ è un compatto si ha $K \subset K_n$ per n grande abbastanza, allora la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{k} (u_{n+1} - u_n)$$

converge uniformemente su ogni compatto contenuto in A. Allora

$$u = u_1 + \sum_{n=1}^{k} (u_{n+1} - u_n)$$

(ben) definisce una funzione su A. Si vede subito che $u \in C^k(A)$. Infatti per ogni fissato N, se $n \geq N$, la funzione $u_{n+1} - u_n$ è olomorfa su A_n e quindi anche

$$u - u_N = \sum_{n=N}^{k} (u_{n+1} - u_n)$$

perché limite uniforme di una succesione di funzioni olomorfe. Segue allora che $u \in C^k(A_N)$ per ogni N e quindi che $u \in C^k(A)$. Infine, dato che per N arbitrario su A_N si ha

$$\frac{\partial (u - u_N)}{\partial \overline{z}} = 0,$$

allora su A_N si ha

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial\, u_N}{\partial \overline{z}} = h$$

e quindi, per l'arbitrarietà di N, u è soluzione di (5.3.3) su tutto A. $\square$

5.4. Funzioni meromorfe con singolarità assegnate.

L'unicità dei coefficienti di una serie di Laurent (vedi Teorema 4.2.1), ci permette di provare la seguente

Proposizione 5.4.1: *Sia f una funzione olomorfa su $\mathbb{D}(a,r)\setminus\{a\}$. Allora esistono e sono uniche funzioni olomorfe g su $\mathbb{D}(a,r)$ e h su $\mathbb{C}$ con $h(0)=0$ tali che per $z\in\mathbb{D}(a,r)\setminus\{a\}$ si abbia*

$$f(z)=g(z)+h\left(\frac{1}{z-a}\right). \tag{5.4.1}$$

Dimostrazione: Per il Teorema 4.2.1 su $\mathbb{D}(a,r)\setminus\{a\}$ vale lo sviluppo di Laurent

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

dove i coefficienti c_n sono unicamente determinati e la convergenza è uniforme sui compatti contenuti in $\mathbb{D}(a,r)\setminus\{a\}$. Se si pone

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad \text{e} \qquad \tilde{h}(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-a)^n,$$

allora, ripercorrendo la dimostrazione del Teorema 4.2.1 dove si dimostra l'esistenza degli sviluppi di Laurent segue che g è olomorfa su $\mathbb{D}(a,r)$ dato che la serie di potenze che la definisce ha raggio di convergenza $\geq r$ e quindi converge uniformemente sui compatti contenuti in $\mathbb{D}(a,r)$, mentre $\tilde{h}(z)$ è olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ dato la serie che la definisce converge uniformemente sui compatti contenuti in $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|>0\}$. Ora se si pone per $d_n=c_{-n}$ la funzione h definita da

$$h(z)=\sum_{n=1}^{\infty}d_nz^n$$

è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. Infatti, la serie che la definisce ha raggio di convergenza $+\infty$ dato che $\limsup\limits_{n\to\infty}(|d_n|)^{1/n}=\limsup\limits_{n\to\infty}(|c_{-n}|)^{1/n}=0$. Inoltre, per costruzione $h(0)=0$, $\tilde{h}(z)=h(\frac{1}{z-a})$ e quindi la proposizione è provata. □

Proposizione 5.4.1 ci permette di dare la seguente

Definizione. Sia Sia f una funzione olomorfa su $\mathbb{D}(a,r)\setminus\{a\}$. La funzione $h\left(\frac{1}{z-a}\right)$ definta da (5.4.1) si dice *parte principale di f in a*.

Se si assegna un insieme finito di punti distinti $b_1,\ldots,b_n$ e di parti principali $h_1\left(\frac{1}{z-b_1}\right),\ldots,h_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$ in ciascuno di essi, ovviamente la loro somma definisce una funzione con singolarità isolate nei punti $b_1,\ldots,b_n$ con parte principale $h_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)$ in ogni singolarità b_j. In generale se si assegna una successione di parti principali in un una successione (discreta) di punti, la somma non converge. Il teorema di Mittag-Leffler afferma che se le parti principali sono tutte meromorfe esiste una funzione meromorfa con le prescritte parti principali. Precisamente abbiamo:

Teorema 5.4.2: (di Mittag-Leffler) *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ una successione di punti distinti di A senza punti di accumulazione in A e sia P_j una successione di polinomi che si annullano nell'origine. Allora esiste una funzione meromorfa f su A con poli nei punti $\{b_j\}$ e parti principali in b_j date da $P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)$ per ogni j.*

Dimostrazione: Per ogni j, sia $h_j(z) = P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)$ e siano $r_j > 0$ tali che i dischi $\mathbb{D}(b_j, r_j)$ siano contenuti in A e con $\mathbb{D}(b_j, r_j) \cap \mathbb{D}(b_k, r_k) = \emptyset$ se $j \neq k$. Inoltre per ogni j, sia $\phi_j \in C_0^{\infty}(\mathbb{D}(b_j, r_j)) \subset C_0^{\infty}(A)$ con $\phi_j \equiv 1$ su $\mathbb{D}(b_j, \frac{r_j}{2})$. Allora la funzione

$$h = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j h_j$$

è di classe C^{∞} su $\tilde{A} = A \setminus \{b_j \mid j = 1, \ldots\}$ e risolverebbe il nostro problema se fosse olomorfa su $\tilde{A}$. Cerchiamo ora di "correggere" h. Definiamo

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \overline{z}} & \text{su } \tilde{A} = A \setminus \{b_j \mid j = 1, \ldots\} \\ \\ 0 & \text{se } z \in \{b_j \mid j = 1, \ldots\}. \end{cases}$$

Allora, evidentemente, $g \in \mathbb{C}^{\infty}(\tilde{A})$ e, dato che per ogni j su $\mathbb{D}(b_j, \frac{r_j}{2}) \setminus \{b_j\}$ si ha

$$g = \frac{\partial h}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial h_j}{\partial \overline{z}} = 0$$

e quindi $g \in \mathbb{C}^{\infty}(A)$. Allora per il Teorema 5.3.4 esiste una funzione $u \in \mathbb{C}^{\infty}(A)$ tale che

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = g.$$

Per costruzione la funzione u è olomorfa su ogni disco $\mathbb{D}(b_j, \frac{r_j}{2})$. Sia $f = h - u$. Allora, per costruzione, f è di classe $\mathbb{C}^{\infty}$ e soddisfa

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

su $A \setminus \{b_j \mid j = 1, \ldots\}$. Dunque f è olomorfa su $A \setminus \{b_j \mid j = 1, \ldots\}$ e su $\mathbb{D}(b_j, \frac{r_j}{2}) \setminus \{b_j\}$ si ha $f = h_j - u$. Dato che u è olomorfa su $\mathbb{D}(b_j, r_j)$, f ha parte principale $h_j(z) = P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)$ in b_j come richiesto. □

Il teorema appena dimostrato fornisce una risposta completa al problema di stabilire l'esistenza di una funzione olomorfa con singolarità assegnate. In pratica però sarebbe desiderabile avere un metodo più esplicito per costruire la funzione meromorfa. Nel caso l'aperto su cui si lavora è tutto $\mathbb{C}$ questo si può fare in modo abbastanza elementare e quindi diamo anche questa versione speciale del Teorema di Mittag-Leffler:

Teorema 5.4.3: (di Mittag-Leffler per $\mathbb{C}$) *Sia $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ una successione di punti distinti di $\mathbb{C}$ senza punti di accumulazione in $\mathbb{C}$ e sia sia Q_j una successione di polinomi* *che si annullano nell'origine e si ponga* $h_j(z) = Q_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)$ *per ogni* j. *Allora per ogni* j *esiste un polinomio* P_j *tale che la serie*

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} [h_j(z) - P_j(z)] \tag{5.4.2}$$

converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C} \setminus \{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ *e definisce una funzione meromorfa* $\mathbb{C}$ *con poli nei punti* $\{b_j\}$ *e parti principali in* b_j *date da* $h_j(z)$ *per ogni* j.

Dimostrazione: Dovremo dimostrare i seguenti fatti:

(a) si possono trovare polinomi $P_j(z)$ che rendono la serie (5.4.2) uniformemente convergente sui compatti di $\mathbb{C} \setminus \{b_j\}_{j=1}^{\infty}$;

(b) per ogni j esiste un disco $\mathbb{D}_j$ centrato in b_j tale che $f(z) - h_j(z)$ è olomorfa su $\mathbb{D}_j$.

In effetti, se vale (a), f è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ e in ciascuna delle singolarità b_j la funzione f ha un polo con la parte principale desiderata ed è quindi la funzione meromorfa desiderata.

Cominciamo osservando che è restrittivo supporre che $b_j \neq 0$ per ogni j. Infatti se uno dei $b_{j_0} = 0$ per qualche j_0, costruita $\tilde{f}$ usando (5.4.2) con singolarità negli altri b_j con parti principali date da $h_j(z)$ per ogni $j \neq j_0$, allora $f = \tilde{f} + h_{j_0}$ sarebbe la funzione cercata.

Dimostriamo allora (a) supponendo che $b_j \neq 0$ per ogni j. Dato che la successione $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ non ha punti di accumulazione in $\mathbb{C}$, per ogni $r > 0$ l'intersezione $\mathbb{D}(0,r) \cap \{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ è un insieme finito e quindi $\lim\limits_{j\to\infty} |b_j| = \infty$. Per ogni j la funzione $h_j(z)$ è olomorfa per $z \neq b_j$ e quindi abbiamo lo sviluppo

$$h_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)} z^k$$

che converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{D}(0,|b_j|)$ e quindi in particolare su $\overline{\mathbb{D}(0,|b_j|/2)}$. Esiste allora n_j tale che

$$\left| h_j(z) - \sum_{k=0}^{n_j} a_k^{(j)} z^k \right| < 2^{-j} \qquad \text{per } |z| \leq \frac{|b_j|}{2}. \tag{5.4.3}$$

Se si pone $P_j(z) = \sum_{k=0}^{n_j} a_k^{(j)} z^k$ si ha allora

$$|h_j(z) - P_j(z)| < 2^{-j} \qquad \text{per } |z| \leq \frac{|b_j|}{2}.$$

Sia $K \subset \mathbb{C} \setminus \{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ un sottoinsieme compatto. Per qualche $R > 0$ deve essere $K \subset \mathbb{D}(0,R)$. Sia N un intero positivo tale che per ogni $j \geq N$ si abbia $|b_j| > 2R$. Allora, per $z \in K$ e $j \geq N$ abbiamo

$$|h_j(z) - P_j(z)| < 2^{-j}$$

e quindi possiamo concludere che la serie

$$\sum_{j=N}^{\infty} [h_j(z) - P_j(z)]$$

converge uniformemente su K e pertanto anche l'intera serie (5.4.2). Per l'arbitrarietà di $K \subset \mathbb{C} \setminus \{b_j\}_{j=1}^{\infty}$, il punto (a) è dimostrato.

Proviamo ora il punto (b). Fissato b_k sia $\rho > 0$ tale che per ogni $j \neq k$ si abbia $b_j \notin \mathbb{D}_k = \mathbb{D}(b_k, \rho)$. Sia $R = |b_k| + \rho$. Allora $\mathbb{D}_k \subset \mathbb{D}' = \mathbb{D}(0, R)$. Allora, come nella dimostrazione del punto (a), segue che, se N è un intero positivo tale che $|b_j| > 2R$ per ogni $j \geq N$, la serie $\sum_{j=N}^{\infty} [h_j(z) - P_j(z)]$ converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{D}'$ e quindi la sua somma $H(z)$ definisce una funzione olomorfa su $\mathbb{D}'$. In particolare H è una funzione olomorfa su $\mathbb{D}_k$ e quindi:

$$f(z) - h_k(z) = -P_k(z) + \sum_{k \neq j=1}^{N-1} [h_j(z) - P_j(z)] + H(z)$$

è una funzione olomorfa su $\mathbb{D}_k$. □

Osservazione. È importante sottolineare che in (5.4.3) la scelta della successione 2^{-j} è solo dovuta a comodità: si sarebbe potuto scegliere un qualunque successione a termini positivi t_j tale che la serie $\sum_j t_j$ sia convergente dato che il criterio della serie maggiorante avrebbe garantito la correttezza del resto dell'argomento. Inoltre, sempre in (5.4.3), di nuovo senza alterare il resto dell'argomento, si sarebbe potuto sostituire $\frac{|b_j|}{2}$ con $\frac{|b_j|}{s}$ per qualunque $s > 1$. Questa semplice osservazione permette in molti casi di trovare senza troppa difficoltà i polinomi P_j da sottrarre alle parti principali per ottenere la convergenza in (5.4.2).

Alla luce dell'osservazione, in molti casi è utile il seguente

LEMMA 5.4.4: *Sia $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ una successione di punti distinti di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ senza punti di accumulazione in $\mathbb{C}$ e sia sia Q_j una successione di polinomi che si annullano nell'origine e si ponga $h_j(z) = Q_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)$ per ogni j. Se, per qualche $R > 1$, la serie numerica*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[\max_{|\zeta| \leq \frac{R}{|b_j|}} |Q_j(\zeta)| \right]$$

converge, allora la serie

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j(z) \tag{5.4.4}$$

converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C} \setminus \{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ e definisce una funzione meromorfa $\mathbb{C}$ con poli nei punti $\{b_j\}$ e parti principali in b_j date da $h_j(z)$ per ogni j.

Dimostrazione: Sia $s = \frac{R}{R-1}$. Allora $s > 1$ e se $|z| < \frac{|b_j|}{s}$, allora

$$|z - b_j| \geq |b_j| - |z| \geq |b_j| - \frac{R-1}{R}|b_j| = \frac{|b_j|}{R}$$

e quindi $\frac{1}{|z-b_j|} \leq \frac{R}{|b_j|}$ in modo che

$$|h_j(z)| = \left| Q_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right) \right| \leq \max_{|\zeta| \leq \frac{R}{|b_j|}} |Q_j(\zeta)|.$$

Dunque, seguendo il suggerimento dell'osservazione, si può ripercorrere la dimostrazione del Teorema 5.4.3 per provare la tesi. □

Esempio 1. Vale il seguente sviluppo

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \tag{5.4.5}$$

dove la serie converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Infatti, utilizzando il Lemma 5.4.4 si dimostra che la serie converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ e definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli in ogni intero n e con corrispondente parte principale $\frac{1}{(z-n)^2}$. Sia $f(z)$ la somma della serie (5.4.5). Allora si vede subito che f è periodica di periodo 1 e che dato che per ogni intero n si ha per $z = x + iy$

$$\left| \frac{1}{(z-n)^2} \right| = \frac{1}{(x-n)^2 + y^2} \le \frac{1}{y^2}$$

Dunque, dato che ogni addendo della serie converge a 0 per $|y| \to \infty$, dato che la serie converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, allora

$$\lim_{y \to \infty} f(z) = 0.$$

D'altra parte la funzione $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ è periodica di periodo 1, meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli in ogni intero n e con le stesse parti principali di f. Inoltre, dato che per $z = x + iy$

$$|\sin^2 \pi z| = |\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y,$$

si ha

$$\lim_{y \to \infty} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = 0.$$

Dunque la differenza $g(z) = f(z) - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ è una funzione intera, periodica di periodo 1 che tende a zero quando $|Im(z)|$ tende a $+\infty$. Segue che g è limitata e quindi, per il Teorema di Liouville, è costante e dato che tende a zero quando $|Im(z)|$ tende a $+\infty$, segue che g è identicamente nulla e quindi vale lo sviluppo (5.4.5).

Gli sviluppi in frazioni parziali si utilizzano spesso per calcolare somme di serie. Ad esempio, ricordando che

$$\begin{aligned}
\sin^2 \pi z &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\pi z)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)^2 = \left(\pi z - \frac{\pi^3 z^3}{3!} + \frac{\pi^5 z^5}{5!} + \dots \right)^2 \\
&= \pi^2 z^2 - \frac{1}{3}\pi^4 z^4 + \frac{11}{360} z^6 + \dots,
\end{aligned}$$

abbiamo che

$$\lim_{z \to 0} \left(\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{z^2} \right) = \lim_{z \to 0} \frac{\pi^2 z^2 - \sin^2 \pi z}{z^2 \sin^2 \pi z} = \lim_{z \to 0} \frac{\frac{1}{3}\pi^4 z^4 + \frac{11}{360} z^6 + \dots}{\pi^2 z^4 - \frac{1}{3}\pi^4 z^6 + \dots} = \frac{\pi^2}{3}$$

e quindi

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2} \left(\lim_{z \to 0} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} - \frac{1}{z^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2} + \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Esempio 2. In questo esempio consideriamo la funzione $f(z) = \pi \cot \pi z$. La funzione f è meromorfa su $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ e ha in ogni intero n un polo di ordine 1 e precisamente parte principale $\frac{1}{z-n}$. Cominciamo provando a costruire una funzione meromorfa su $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ che ha in ogni intero n parte principale $\frac{1}{z-n}$. Si vede subito che in questo caso la serie $\sum \frac{1}{z-n}$ non converge sui compatti contenuti in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ e quindi il tentativo di costruzione più ovvio non funziona. D'altra parte, vale il seguente sviluppo:

$$\frac{1}{z-n} = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{n}}\right) = -\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^k,$$

e quindi, nello schema suggerito dalla dimostrazione del Teorema di Mittag-Leffler, si può provare a fissare per ogni $n \neq 0$ il polinomio $P_n(\zeta) = -\frac{1}{n}$ e studiare la convergenza della serie

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}}\left(\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + z\sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n}\frac{1}{z-n}. \tag{5.4.6}$$

L'ultima serie in (5.4.6) converge sui compatti di $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ dato che se $|z| \leq 2R$ e $n > 2R$, allora $|z-n| > \frac{n}{2}$ e quindi

$$\frac{1}{n}\frac{1}{z-n} < \frac{2}{n^2}.$$

La convergenza uniforme sui compatti segue allora perché la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ è convergente. Dunque

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}}\left(\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2} \tag{5.4.7}$$

definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con gli stessi poli e le stesse corrispondenti parti principali. Si osservi che la seconda espressione di g è ottenuta raggruppando i termini relativi a n e $-n$ Derivando per serie $g(z)$ e utilizzando lo sviluppo ottenuto nell'esempio precedente, otteniamo:

$$g'(z) = -\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2} = -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = (\pi \cot \pi z)'.$$

Dunque esiste una costante c tale che

$$\pi \cot \pi z = g(z) + c = \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}}\left(\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}\right) + c = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2} + c.$$

Dalla seconda espressione in (5.4.7) segue che $g(z)$ è una funzione dispari come $\pi \cot \pi z$ e quindi necessariamente $c = 0$. Possiamo allora concludere che vale il seguente sviluppo:

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2}.$$

Appendice: La funzione $\wp$ di Weierstrass.

Gli argomenti appena presentati ci permettono di definire la funzione $\wp$ di Weierstrass e di presentarne le proprietà elementari. Siano w_1, w_2 due numeri complessi linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ e sia $\Gamma = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2$ il gruppo abeliano che generano. Per le questioni di convergenza che che confronteremo è cruciale il seguente

Lemma 5.4.5: *La serie* $\displaystyle\sum_{w\in\Gamma\setminus\{0\}} \frac{1}{|w|^q}$ *è convergente se, e solo se,* $q > 2$.

Dimostrazione: Se $\Gamma_k = \{w = mw_1 + nw_2 \in \Gamma \mid \sup\{m, n\} = k$, ossia, per ogni $k \geq 1$, l'insieme Γ_k è costituito dai punti di Γ che giacciono sul parallelogramma di vertici $kw_1 + kw_2, kw_1 - kw_2, -kw_1 - kw_2, -kw_1 + kw_2$, allora

$$\Gamma = \bigcup_{k\geq 1} \Gamma_k.$$

Per ogni $k \geq 1$, su ciascuno dei lati congiungenti $-kw_1+kw_2$ a kw_1+kw_2 e $-kw_1-kw_2$ a $kw_1 - kw_2$ giacciono $2k + 1$ punti di Γ_k. Inoltre sui lati congiungenti $-kw_1 + kw_2$ a $-kw_1 - kw_2$ e $kw_1 + kw_2$ a $kw_1 - kw_2$ giacciono $2k - 1$ punti di Γ_k diversi dagli estremi. Pertanto Γ_k contiene esattamente

$$2(2k + 1) + 2(2k - 1) = 8k$$

punti distinti. Se, inoltre,

$$\delta = \max_{\Gamma_1} |w|, \qquad d = \min_{\Gamma_1} |w|$$

allora per ogni $w \in \Gamma_k$ si ha $k\delta \leq |w| \leq kd$ e quindi:

$$\frac{8}{d^q}\frac{1}{k^{q-1}} = 8k\frac{1}{d^q k^q} \leq \sum_{w\in\Gamma_k} \frac{1}{|w|^q} \leq 8k\frac{1}{\delta^q k^q} = \frac{8}{\delta^q}\frac{1}{k^{q-1}}.$$

Dato che $\displaystyle\sum_{w\in\Gamma\setminus\{0\}} \frac{1}{|w|^q} = \lim_{k\to\infty} \sum_{w\in\Gamma_k} \frac{1}{|w|^q}$, la tesi segue. □

Vogliamo ora costruiire una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli esattamente nei punti del gruppo $\Gamma = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2$ e con parte principale in ciascun $w \in \Gamma$ data da $h(z) = \dfrac{1}{(z-w)^2}$. Il Lemma 5.4.5 implica che non che il tentativo "ingenuo" di considerare la serie $\displaystyle\sum_{w\in\Gamma} \frac{1}{(z-w)^2}$ non funziona. Infatti la serie $\displaystyle\sum_{w\in\Gamma\setminus\{0\}} \frac{1}{(z-w)^2}$ dovrebbe convergere uniformemente sui compatti di $(\mathbb{C}\setminus\Gamma)\cup\{0\}$ e, conseguentemente convergere assolutamente in 0 contro il Lemma 5.4.5. Dato che, per i compatti contenuti in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < |w|\}$ lo sviluppo

$$\frac{1}{(z-w)^2} = \frac{1}{w^2}\frac{1}{(1-\frac{z}{w})^2} = \frac{1}{w^2}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{z}{w}\right)^{k-1} = \frac{1}{w^2} + 2\frac{z}{w^3} + 3\frac{z^2}{w^4} + \ldots \tag{5.4.8}$$

è naturale "correggere" la parte principale $h(z) = \dfrac{1}{(z-w)^2}$ sottraendo il primo termine del suo sviluppo in serie nell'origine. Per $|z| < \dfrac{|w|}{2}$, abbiamo

$$\left|\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right| \leq \frac{|z|}{|w|^3}\sum_{k=2}^{\infty} k\left|\frac{z}{w}\right|^{k-2} \leq \frac{|z|}{|w|^3}\sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$$

$$= 2\frac{|z|}{|w|^3}\left[\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 1\right] = 6\frac{|z|}{|w|^3}.$$

Per il Lemma 5.4.5, allora la serie $\displaystyle\sum_{w\in\Gamma\setminus\{0\}}\left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]$ converge uniformemente sui compatti di $(\mathbb{C}\setminus\Gamma)\cup\{0\}$. Pertanto la *funzione* $\wp(z) = \wp(w_1, w_2, z)$ *di Weierstrass associata a* $\Gamma = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2$ definita da

$$\wp(z) = \frac{1}{w^2} + \sum_{w\in\Gamma\setminus\{0\}}\left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right] \tag{5.4.9}$$

è olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ e definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli in ogni $w \in \Gamma$ con rispettiva parte principale $\dfrac{1}{(z-w)^2}$.

La funzione $\wp$ è doppiamente periodica con periodi w_1, w_2 e che quindi definisce una funzione meromorfa sulla superficie di Riemann $\mathbb{C}/\Gamma$. Abbiamo infatti la seguente:

PROPOSIZIONE 5.4.6: *La funzione $\wp(z)$ definita in (5.4.9) e la sua derivata $\wp'(z)$ sono meromorfe su $\mathbb{C}\setminus\Gamma = \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}w_1\oplus\mathbb{Z}w_2$ e doppiamente periodiche di periodi w_1 e w_2. Definiscono pertanto funzioni meromorfe su $\mathbb{C}/\Gamma$.*

Dimostrazione: Derivando $\wp(z)$ otteniamo:

$$\wp'(z) = -2\sum_{w\in\Gamma}\frac{1}{(z-w)^3} \tag{5.4.10}$$

Dall'espressione (5.4.10) segue immediatamente che $\wp'(z)$ è doppiamente periodica con periodi w_1 e w_2 dato che, con un semplice cambio di variabili $w' = w - w_j$, abbiamo per $j = 1, 2$

$$\wp'(z+w_j) = -2\sum_{w\in\Gamma}\frac{1}{(z+w_j-w)^3} = -2\sum_{w'\in\Gamma}\frac{1}{(z-w')^3} = \wp'(z).$$

Dunque, per opportune costanti c_j per $J = 1, 2$, si ha anche $c_j = \wp(z) - \wp(z+w_j)$. D'altra parte, dallo sviluppo (5.4.9) che la definisce, segue che $\wp(z)$ è una funzione pari. Dunque, valutando per $z = -\dfrac{a_j}{2}$, abbiamo

$$c_j = \wp\left(-\frac{a_j}{2}\right) - \wp\left(\frac{a_j}{2}\right) = \wp\left(\frac{a_j}{2}\right) - \wp\left(\frac{a_j}{2}\right) = 0$$

e quindi che anche $\wp(z)$ è doppiamente periodica con periodi w_1 e w_2. Il resto dell'enunciato è immediato. $\square$