

CAPITOLO 8

Superfici di Riemann

8.1. Superfici di Riemann.

Cominciamo con qualche definizione.

DEFINIZIONE 8.1.1: Una *superficie topologica* è uno spazio topologico connesso M di Hausdorff con topologia a base numerabile tale che ogni punto $a \in M$ ha un intorno aperto omeomorfo a un aperto di \mathbb{C} .

OSSERVAZIONE: Ogni spazio metrico separabile (ossia che ammette un sottoinsieme numerabile denso) è di Hausdorff con topologia a base numerabile. Viceversa si dimostra che una superficie topologica ha sempre topologia metrizzabile, ossia indotta da una distanza.

DEFINIZIONE 8.1.2: Una *carta complessa* di M è un omeomorfismo $F:U \rightarrow V$ dove U è un aperto di M e V è un aperto di \mathbb{C} . Due carte complesse $F_i:U_i \rightarrow V_i$, per $i = 1, 2$, di M , si dicono *olomorficamente compatibili* se $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ oppure, nel caso $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, se la funzione di transizione

$$F_2 \circ F_1^{-1}: F_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow F_2(U_1 \cap U_2)$$

è un biolomorfismo. Un *atlante complesso* di una superficie topologica M è una collezione di carte complesse $\mathcal{U} = \{F_i:U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ tali che:

- (i) $\{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di M (ossia $M = \cup_i U_i$);
- (ii) F_i e F_j sono olomorficamente compatibili per $i, j \in I$.

Due atlanti complessi $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ su una superficie topologica si dicono *equivalenti* se ogni carta F di \mathcal{U} è olomorficamente compatibile con ogni carta di \mathcal{U}' .

OSSERVAZIONI:

- (i) Se $F:U \rightarrow V$ è una carta complessa di una superficie topologica M e $U' \subset U$, allora $F_{U'}:U' \rightarrow V' = F(U')$ è una carta complessa olomorficamente compatibile con $F:U \rightarrow V$.
- (ii) Dato che la composizione di funzioni bilomorfe è un biolomorfismo, si vede subito che l'equivalenza fra strutture complesse è una relazione di equivalenza.
- (iii) Nella classe di equivalenza di un atlante complesso \mathcal{U} esiste un unico atlante massimale \mathcal{U}^* . L'atlante massimale \mathcal{U}^* nella classe di equivalenza di \mathcal{U} è costituito da tutte le carte compatibili col carte di \mathcal{U} .

DEFINIZIONE 8.1.3: Una *struttura complessa* su una superficie topologica M è una classe di equivalenza Σ di atlanti complessi di M . Una *superficie di Riemann* (o *varietà complessa di dimensione 1*) è una superficie topologica M su cui è definita una struttura complessa Σ .

CONVENZIONE: Se la struttura complessa Σ su una superficie di Riemann M è definita dall'atlante complesso \mathcal{U} , una carta complessa di Σ è una carta dell'atlante massimale \mathcal{U}^* nella classe di equivalenza Σ , ossia una carta complessa compatibile con tutte le carte di \mathcal{U} .

ESEMPIO 1. \mathbb{C} è una superficie di Riemann con struttura complessa definita dall'atlante la cui sola carta complessa è l'identità: $Id: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

ESEMPIO 2. Se M è una superficie di Riemann e $N \subset M$ è un aperto connesso, allora N , la struttura complessa definita dall'atlante di tutte le carte di M con dominio contenuto in N definisce una struttura complessa su N . Con questa struttura N è una superficie di Riemann. Ogni aperto connesso di \mathbb{C} è dunque una superficie di Riemann.

ESEMPIO 3. La sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ è una superficie di Riemann con la struttura complessa definita dall'atlante complesso formato dalle due carte

$$F_1: \mathbb{C} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \quad \text{e} \quad F_2: \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

dove si definiscono F_1 e F_2 mediante

$$F_1(z) = z \quad \text{e} \quad F_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{se } z \neq \infty \\ 0 & \text{se } z = \infty. \end{cases} \quad (8.1.1)$$

Si osservi che le applicazioni $F_1 \circ F_2^{-1}$, $F_2 \circ F_1^{-1}$ da $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in sé sono uguali e si ha $F_1(z) = 1/z = F_2(z)$ e sono dunque biolomorfismi.

ESEMPIO 4. Sia $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa su un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Il *grafico* di f definito da $\Gamma_f = \{(z, w) \in A \times \mathbb{C} \mid w = f(z)\}$ è una superficie di Riemann. L'atlante complesso di Γ_f è formato dalla carta $\pi: \Gamma_f \rightarrow A$ dove π è la proiezione sulla prima coordinata: $\pi(z, w) = z$. Più in generale si possono definire superfici di Riemann definite come luogo dove si annulla una funzione di due variabili complesse. Useremo queste notazioni. Se $B \subset \mathbb{C}^2$ è un aperto e $F: B \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1 , denotiamo

$$Z_F = \{(z, w) \in B \mid F(z, w) = 0\}$$

il luogo dei punti dove si annulla F . Sotto opportune ipotesi Z_F è una superficie di Riemann. Per illustrare questo fatto, abbiamo bisogno della seguente versione olomorfa del teorema delle funzioni implicite:

TEOREMA 8.1.1: Sia $B \subset \mathbb{C}^2$ un aperto e $F: B \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1 . Supponiamo che per ogni $(z_0, w_0) \in B$ esistano aperti $A_{z_0} \subset \mathbb{C}$ contenente z e $A_{w_0} \subset \mathbb{C}$ contenente w_0 tali che $A_{z_0} \times A_{w_0} \subset B$ e che

$$\begin{array}{ccc} F(\cdot, w): A_{z_0} \rightarrow \mathbb{C} & & F(z, \cdot): A_z \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto F(z, w) & & w \mapsto F(z, w) \end{array}$$

sono funzioni olomorfe rispettivamente per ogni $w \in A_{w_0}$ e $z \in A_{z_0}$. Allora:

- (i) Se per $(z_0, w_0) \in Z_F$ la funzione $F_w = \frac{\partial F}{\partial w}(z, \cdot)$ non si annulla in (z_0, w_0) , allora esistono un disco \mathbb{D}_{z_0} centrato in z_0 , un disco \mathbb{D}_{w_0} centrato in w_0 e una funzione olomorfa $\phi: \mathbb{D}_{z_0} \rightarrow \mathbb{D}_{w_0}$ tale che $\phi(z_0) = w_0$ e

$$Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0}) = \{(z, \phi(z)) \mid z \in \mathbb{D}_{z_0}\}.$$

- (ii) Se per $(z_0, w_0) \in Z_F$ la funzione $F_z = \frac{\partial F}{\partial z}(\cdot, w)$ non si annulla in (z_0, w_0) , allora esistono un disco \mathbb{D}_{z_0} centrato in z_0 , un disco \mathbb{D}_{w_0} centrato in w_0 e una funzione olomorfa $\psi: \mathbb{D}_{w_0} \rightarrow \mathbb{D}_{z_0}$ tale che $\psi(w_0) = z_0$ e

$$Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0}) = \{(\psi(w), w) \mid w \in \mathbb{D}_{w_0}\}.$$

Sia dunque $F: B \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1 su un aperto $B \subset \mathbb{C}^2$ tale che fissata una delle due variabili, F sia funzione olomorfa dell'altra nell'intorno di ogni punto. Supponiamo inoltre, con le notazioni del Teorema 8.1.1, che per ogni $(z_0, w_0) \in Z_F$ si abbia o $F_z(z_0, w_0) \neq 0$ oppure $F_w(z_0, w_0) \neq 0$. Allora Z_F è una superficie di Riemann. Un atlante si può definire usando il Teorema 8.1.1. Sia $(z_0, w_0) \in Z_F$ tale che $F_w(z_0, w_0) \neq 0$, allora esistono dischi \mathbb{D}_{z_0} centrato in z_0 , \mathbb{D}_{w_0} centrato in w_0 e una funzione olomorfa $\phi: \mathbb{D}_{z_0} \rightarrow \mathbb{D}_{w_0}$ tale che $Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0})$ sia il grafico della funzione ϕ . Per punti di questo tipo definiamo una carta $f: U = Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0}) \rightarrow \mathbb{D}_{z_0}$ dove f è la proiezione sulla prima coordinata: $f(z, \phi(z)) = z$. In modo simmetrico per un punto $(z_1, w_1) \in Z_F$ tale che $F_z(z_1, w_1) \neq 0$, allora esistono dischi \mathbb{D}_{z_1} centrato in z_1 , \mathbb{D}_{w_1} centrato in w_1 e una funzione olomorfa $\psi: \mathbb{D}_{w_1} \rightarrow \mathbb{D}_{z_1}$ tale che $Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_1} \times \mathbb{D}_{w_1})$ sia il grafico della funzione ψ . Per punti di questo tipo definiamo una carta $g: V = Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_1} \times \mathbb{D}_{w_1}) \rightarrow \mathbb{D}_{w_1}$ dove g è la proiezione sulla seconda coordinata: $g(\psi(w), w) = w$. È chiaro che con carte di un tipo o dell'altro si ricopre tutto Z_F . Rimane da controllare la compatibilità per carte che hanno domini che si intersecano. Nel caso di coppie di carte ambedue del primo o del secondo tipo la funzione di transizione non è altro che l'identità definita su una intersezione di due dischi. Nel caso $f: U = Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0}) \rightarrow \mathbb{D}_{z_0}$ sia una carta del primo tipo e $g: V = Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_1} \times \mathbb{D}_{w_1}) \rightarrow \mathbb{D}_{w_1}$ una del secondo, allora la funzione di transizione definita su $\mathbb{D}_{z_0} \cap \mathbb{D}_{z_1}$ è data dalla composizione

$$z \mapsto (z, \phi(z)) \mapsto \phi(z)$$

ed è quindi olomorfa. Analogamente si vede che è olomorfa la funzione di transizione quando i ruoli fra i due tipi di carte sono scambiati.

ESEMPIO 5. Un altro metodo per costruire superfici di Riemann è mediante quozienti. Consideriamo qui tre esempi semplici ma importanti.

a) Come abbiamo già ricordato, la retta proiettiva complessa \mathbb{P}^1 è definita nel modo seguente. Si consideri su

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 \neq 0\},$$

che si considera con la topologia di sottospazio di \mathbb{C}^2 , la relazione di equivalenza \sim definita da

$$(z, w) \sim (u, v) \Leftrightarrow (z, w) = \lambda(u, v) \text{ for some } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

La retta proiettiva è lo spazio quoziente $\mathbb{P}^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\})/\sim$ considerato con la topologia quoziente. Dunque \mathbb{P}^1 non è altro che l'insieme delle rette per l'origine di \mathbb{C}^2 . Ricordiamo che per $(z, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la classe di equivalenza corrispondente si denota con la notazione delle coordinate omogenee: $[(z, w)] = [z : w] \in \mathbb{P}^1$. Si considerino i seguenti aperti di \mathbb{P}^1 :

$$U_1 = \{[z : w] \in \mathbb{P}^1 \mid z \neq 0\}, \quad U_2 = \{[z : w] \in \mathbb{P}^1 \mid w \neq 0\}$$

e le applicazioni $F_1: U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ e $F_2: U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ definite rispettivamente da

$$F_1([z : w]) = \frac{w}{z}, \quad F_2([z : w]) = \frac{z}{w}.$$

Si vede subito che F_1 e F_2 sono omeomorfismi. Inoltre $\mathcal{U} = \{F_1: U_1 \rightarrow \mathbb{C}, F_2: U_2 \rightarrow \mathbb{C}\}$ è un atlante complesso di \mathbb{P}^1 che definisce una struttura complessa su \mathbb{P}^1 . Questa è la struttura complessa standard di \mathbb{P}^1 . Infatti è evidente che $\mathbb{P}^1 = U_1 \cup U_2$. Inoltre le due carte sono olomorficamente compatibili. Infatti $U_1 \cap U_2 = \{[z : w] \in \mathbb{P}^1 \mid z, w \neq 0\}$ e $F_1(U_1 \cap U_2) = F_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si vede subito che per $\zeta \in \mathbb{C}^*$ si ha

$$F_2(F_1^{-1}(\zeta)) = \frac{1}{\zeta} = F_1(F_2^{-1}(\zeta))$$

e quindi, dato che $F_2 \circ F_1^{-1}$ e $F_1 \circ F_2^{-1}$ sono olomorfe, che le carte sono olomorficamente compatibili.

b) Per un altro esempio semplice, si consideri $2\pi\mathbb{Z}$ come sottogruppo additivo di \mathbb{C} e si definisca il quoziente $R = \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ come quoziente di gruppi: $z \sim w \iff z - w \in 2\pi\mathbb{Z}$ ossia se e solo se $z = w + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Con la topologia quoziente si vede subito che R è omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$. Un atlante complesso su R si costruisce in questo modo. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ se $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_z = \mathbb{D}(z, 1)$ allora $z_1 \sim z_2$ se e solo se $z_1 = z_2$ dato che $|z_1 - z_2| < 2 < 2\pi$. Dunque, se $\pi: \mathbb{C} \rightarrow R = \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ è l'applicazione quoziente, allora $\pi: \mathbb{D}_z \rightarrow U_z = \pi(\mathbb{D}_z)$ è biettiva e quindi è un omeomorfismo. Sia ψ_z il suo inverso. Le carte $\psi: U_z \rightarrow U_z = \mathbb{D}_z$ sono un atlante che danno una struttura di superficie di Riemann a R . Infatti si vede subito che se due di queste carte hanno domini che si intersecano, allora la funzione di transizione è del tipo $z \mapsto z + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$ ed è quindi olomorfa.

c) Una classe di quozienti molto interessanti è quella ottenuta da quozienti di \mathbb{C} mediante reticoli ossia sottogruppi additivi di \mathbb{C} isomorfi a \mathbb{Z}^2 . In concreto, siano $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linearmente indipendenti su \mathbb{R} e sia $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ il sottogruppo additivo discreto di \mathbb{C} generato su \mathbb{Z} da ω_1 e da ω_2 . Il quoziente $T = \mathbb{C}/\Gamma$ rispetto alla relazione quoziente di gruppi $z \sim w \iff z - w \in \Gamma$ ossia se e solo se $z = w + m\omega_1 + n\omega_2$ per qualche $m, n \in \mathbb{Z}$, con la topologia quoziente, è connesso, dato che \mathbb{C} è connesso ed è compatto dato che T è anche immagine mediante l'applicazione quoziente $\Pi: \mathbb{C} \rightarrow T = \mathbb{C}/\Gamma$ del parallelogramma (compatto)

$$P = \{s\omega_1 + t\omega_2 \mid s, t \in [0, 1]\}.$$

In effetti è facile convincersi che è omeomorfo a un toro $S^1 \times S^1$. Si può infatti dimostrare che l'applicazione che $F: T = \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow S^1 \times S^1$ definita per $s, t \in \mathbb{R}$ da

$$F([s\omega_1 + t\omega_2]) = (e^{2s\pi i}, e^{2t\pi i}) \in S^1 \times S^1$$

è un omeomorfismo. Per dotare T di una struttura di superficie di Riemann si può procedere nel modo seguente. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ scegliamo un disco $\mathbb{D}_z = \mathbb{D}(z, r)$ in

modo che se $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_z$ allora $z_1 \sim z_2$ se e solo se $z_1 = z_2$. La variazione necessaria consiste nell'opportuna scelta del raggio del disco \mathbb{D}_z . Basta scegliere (verificare per esercizio!) r in modo che

$$0 < 2r < \min\{|m\omega_1 + n\omega_2| \mid (0, 0) \neq (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Procediamo ora come prima: se $\Pi: \mathbb{C} \rightarrow T = \mathbb{C}/\Gamma$ è l'applicazione quoziente, allora $\pi: \mathbb{D}_z \rightarrow U_z = \pi(\mathbb{D}_z)$ è biettiva e quindi è un omeomorfismo. Sia ψ_z il suo inverso. Le carte $\psi_z: U_z \rightarrow \mathbb{D}_z$ sono un atlante che danno una struttura di superficie di Riemann a R . Infatti si vede subito che se due di queste carte hanno domini che si intersecano, allora la funzione di transizione è del tipo $z \mapsto z + m\omega_1 + n\omega_2$ per qualche $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ ed è quindi olomorfa. Infatti se due carte $\psi_z: U_z \rightarrow \mathbb{D}_z$, $\psi_w: U_w \rightarrow \mathbb{D}_w$ sono tali che $U_z \cap U_w \neq \emptyset$, allora se $\phi = \psi_w \circ \psi_z^{-1}: \psi_z(U_z \cap U_w) \rightarrow \psi_w(U_z \cap U_w)$, dato che $\psi_z(U_z \cap U_w) = \Pi(U_z \cap U_w) = \mathbb{D}_z \cap \mathbb{D}_w$ è connesso e $\Pi(\phi(z)) = \psi_z^{-1} = \Pi(z)$, allora $\phi(z) - z \in \Gamma$. Allora $\phi(z) - Id$ è una funzione continua su un connesso a valori in Γ che è discreto: è dunque costante e quindi $\phi(z) = z + m\omega_1 + n\omega_2$ per qualche $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. La famiglia di carte complesse $\psi_z: U_z \rightarrow \mathbb{D}_z$ al variare di $z \in \mathbb{C}$ definisce la struttura complessa di T .

8.2. Applicazioni olomorfe.

Veniamo ora alla nozione di olomorfia su superfici di Riemann.

DEFINIZIONE 8.2.1: Siano M una superficie di Riemann e $U \subset M$ un aperto. Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* se per ogni carta complessa $\phi: U \rightarrow V$ di M la funzione $f \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap A) \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa.

Osservazione. La somma e il prodotto di funzioni olomorfe sono funzioni olomorfe. Le costanti sono funzioni olomorfe. Una funzione olomorfa è automaticamente continua. Non è necessario verificare la condizione di olomorfia su ogni carta dell'atlante massimale, basta controllarla su una famiglia di carte complesse che ricopre A .

TEOREMA 8.2.1: Siano M una superficie di Riemann, $U \subset M$ un aperto e $z_0 \in A$. Una funzione olomorfa $f: A \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ limitata su un intorno di z_0 si estende (in modo unico) a una funzione olomorfa $\hat{f}: A \rightarrow \mathbb{C}$

Dimostrazione: Esercizio!!!

□

DEFINIZIONE 8.2.2: Un'applicazione continua $f: M \rightarrow N$ fra due superfici di Riemann M, N si dice *applicazione olomorfa* se per ogni carta complessa $\phi: U \rightarrow V$ di M e $\psi: W \rightarrow Z$ di N con $f(U) \subset W$, la funzione $\psi \circ f \circ \phi^{-1}: V \rightarrow Z$ è olomorfa. Un'applicazione olomorfa $f: M \rightarrow N$ fra due superfici di Riemann si dice un *biolomorfismo* se è biiettiva con inversa olomorfa e, se esiste, le superfici M e N si dicono *biolomorfe*. Infine un biolomorfismo di una superficie di Riemann M in sé si dice *automorfismo* di M .

ESEMPIO 7. La retta proiettiva complessa \mathbb{P}^1 è biolomorfa alla sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. Si è già osservato nel Capitolo 1 che l'applicazione $\phi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definita da

$$\phi([z : w]) = \begin{cases} \frac{z}{w} & \text{se } w \neq 0 \\ \infty & \text{se } w = 0 \end{cases} \quad (8.2.1)$$

è continua, biiettiva con inversa continua $\psi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1$ definita da

$$\psi(\zeta) = [\zeta : 1] \quad \text{se } \zeta \neq \infty \quad \text{e} \quad \psi(\infty) = [1 : 0]. \quad (8.2.2)$$

In effetti si verifica facilmente (esercizio!) che, con le strutture complesse che abbiamo definito su \mathbb{P}^1 e $\hat{\mathbb{C}}$, le applicazioni ϕ e $\psi = \phi^{-1}$ sono olomorfe.

ESEMPIO 8. Sia $R = \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ la superficie di Riemann descritta nell'Esempio 5 sopra. La funzione esponenziale $E(z) = e^{iz}$ è una funzione intera di periodo 2π ossia tale che $E(z_1) = E(z_2)$ se e solo se $z_1 = z_2 + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre è surgettiva su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dunque induce un'applicazione biettiva $\tilde{E}: R \rightarrow \mathbb{C}^*$. Si vede subito (esercizio!) che \tilde{E} (ossia che è olomorfa con inversa olomorfa).

ESEMPIO 9. Sia $R = \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ la superficie di Riemann descritta nell'Esempio 5 sopra e si consideri la quadrica complessa $Q = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 + w^2 = 1\}$. Dato che, posto $F(z, w) = z^2 + w^2 - 1$, si ha $F_z(z, w) = 2z$ e $F_w(z, w) = 2w$, in nessun punto di Q si può avere che simultaneamente $F_z(z, w) = 0$ e $F_w(z, w) = 0$, allora la quadrica Q è una superficie di Riemann con la struttura definita nell'Esempio 4 sopra. Si definisca un'applicazione olomorfa $G: \mathbb{C} \rightarrow Q$ mediante $G(\zeta) = (\sin i\zeta, \cos i\zeta)$. La funzione G è surgettiva e $G(\zeta_1) = G(\zeta_2)$ se e solo se $\zeta_1 = \zeta_2 + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Dunque induce un'applicazione biettiva $\tilde{G}: R \rightarrow Q$. Si verifica (esercizio!) che \tilde{G} è un biolomorfismo (ossia che è olomorfa con inversa olomorfa).

Ovviamente le funzioni olomorfe definite su aperti di \mathbb{C} sono applicazioni olomorfe a valori in \mathbb{C} . Per uniformità di nomenclatura allora chiameremo *funzione olomorfa* un'applicazione olomorfa $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ su una superficie di Riemann a valori in \mathbb{C} . Vedremo presto che le funzioni meromorfe invece non sono altro che applicazioni olomorfe a valori in $\hat{\mathbb{C}}$. È un utile esercizio esplicitare la definizione di applicazione olomorfa per applicazioni definite su un aperto della sfera di Riemann a valori nella sfera di Riemann. Abbiamo il seguente immediato risultato:

PROPOSIZIONE 8.2.2: *Sia $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ un aperto. Un'applicazione continua $f: U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ è olomorfa se per ogni $z \in U$ è vera una delle seguenti affermazioni:*

- (i) $z, f(z) \in \mathbb{C}$ e esiste un intorno V di z tale che $f(\zeta)$ è olomorfa su V ;
- (ii) $z \in \mathbb{C}, f(z) = \infty$ e esiste un intorno V di z tale che $\frac{1}{f(\zeta)}$ è olomorfa su $V \setminus \{z\}$;
- (iii) $z = \infty, f(\infty) \in \mathbb{C}$ e esiste un intorno V di 0 tale che $f(\frac{1}{\zeta})$ è olomorfa su $V \setminus \{0\}$;
- (iv) $z = \infty, f(\infty) = \infty$ e esiste un intorno V di 0 tale che la funzione $\frac{1}{f(\frac{1}{\zeta})}$ è olomorfa su $V \setminus \{0\}$.

Dimostrazione: Esercizio!!! □

Dato che la loro definizione è locale, le applicazioni olomorfe godono di tutte le proprietà locali delle funzioni olomorfe definite su aperti di \mathbb{C} . In particolare è utile osservare che vale il principio del prolungamento analitico per applicazioni olomorfe che si può formulare nel modo seguente:

TEOREMA 8.2.3: *Siano $f, g: M \rightarrow N$ applicazioni olomorfe fra superfici di Riemann. Se f e g coincidono su un sottoinsieme $E \subset M$ contenente un punto di accumulazione allora $f \equiv g$. In particolare se $f: M \rightarrow N$ è un'applicazione olomorfa non costante allora per ogni $c \in N$ l'insieme $f^{-1}(c)$ è discreto e se M è compatta, allora, per ogni $c \in N$, l'insieme $f^{-1}(c)$ è finito.*

Dimostrazione: Basta dimostrare la prima parte dell'enunciato. Infatti se $f^{-1}(c)$ non è discreto allora ha un punto d'accumulazione e quindi $f \equiv c$ e se M è compatta,

allora, dato che ogni suo sottoinsieme discreto è finito, l'insieme $f^{-1}(c)$ è finito per ogni c . Sia allora

$$B = \{a \in M \mid f = g \text{ in un intorno aperto di } a\}.$$

Per costruzione B è aperto. Sia $b \in \partial B$. Allora, per continuità $f(b) = g(b)$. Siano $\phi: U \rightarrow V$ una carta complessa di M con U connesso contenente b e $\psi: W \rightarrow Z$ una carta complessa di N con $f(U) \subset W$ e $g(U) \subset W$. Allora le funzioni $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}: V \rightarrow Z$ e $\tilde{g} = \psi \circ g \circ \phi^{-1}: V \rightarrow Z$ sono oloedre. Dato che necessariamente $U \cap B \neq \emptyset$ ($b \in \partial B!$), e \tilde{f} e \tilde{g} coincidono su un sottoinsieme di V che ha un punto di accumulazione in V , per il principio del prolungamento analitico usuale, si ha che $\tilde{f} \equiv \tilde{g}$ su V . Dunque $f \equiv g$ su U e quindi $b \in B$. Dunque, dato che contiene la sua frontiera, B è chiuso. Dato che le superfici di Riemann sono connesse per ipotesi, per provare la tesi basta dimostrare che $B \neq \emptyset$. Ma se a è un punto d'accumulazione dell'insieme E dove f e g coincidono, utilizzando di nuovo carte complesse e il principio del prolungamento analitico usuale, si ha che $a \in B$ (esercizio!) \square

Come conseguenza del Teorema 5.3.6, otteniamo la seguente descrizione locale delle applicazioni oloedre:

TEOREMA 8.2.4: *Siano M e N due superfici di Riemann e $f: M \rightarrow N$ un'applicazione oloedra non costante. Siano $p \in M$ e $q = f(p) \in N$. Esiste un intero $k \geq 1$ e carte complesse $\phi: U \rightarrow V$ di M e $\psi: W \rightarrow Z$ di N tali che*

(i) $p \in U$ e $\phi(p) = 0 \in V$; $q \in W$ e $\psi(q) = 0 \in Z$.

(ii) $f(U) \subset W$.

(iii) L'applicazione $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}: V \rightarrow Z$ è data da $F(\zeta) = \zeta^k$.

Dimostrazione: È evidente che si possono scegliere carte complesse $\tilde{\phi}: U \rightarrow \tilde{V}$ di M e $\tilde{\psi}: W \rightarrow Z$ di N tali che $p \in U$ e $\tilde{\phi}(p) = 0 \in \tilde{V}$, $q \in W$ e $\tilde{\psi}(q) = 0 \in Z$, $f(U) \subset W$ (al più occorre "correggere" con traslazioni opportune scelte arbitrarie di carte, si diano i dettagli per esercizio). Per il Teorema 5.3.6, esiste un disco V centrato nell'origine 0 un biolomorfismo $H: V \rightarrow \tilde{V}$ tali che, se $\tilde{F} = \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1}$ per ogni $\zeta \in V$ si ha: $\tilde{F} \circ H(\zeta) = \tilde{F}(H(\zeta)) = \zeta^k$. Se si definisce $\phi: U \rightarrow V$ mediante $\phi = H^{-1} \circ \tilde{\phi}$, le carte $\phi: U \rightarrow V$ di M e $\psi: W \rightarrow Z$ di N sono le carte cercate. \square

COROLLARIO 8.2.5: (Teorema dell'Applicazione Aperta) *Siano M e N due superfici di Riemann e $f: M \rightarrow N$ un'applicazione oloedra non costante. Allora f è un'applicazione aperta.*

Dimostrazione: Segue facilmente dal Teorema 8.2.4 (i dettagli per esercizio!) \square

Il Teorema 7.2.3 si estende immediatamente a superfici di Riemann:

TEOREMA 8.2.6: *Siano M e N due superfici di Riemann e $f: M \rightarrow N$ un'applicazione oloedra. Allora f è un biolomorfismo $\iff f$ è biettiva.*

Dimostrazione: Se f è un'applicazione biolomorfa, è biettiva. Se f è biettiva, si dimostri per esercizio che è un'applicazione biolomorfa utilizzando il Teorema 8.2.4: si osservi che in questo caso $k = 1$, e, localmente $f = \psi^{-1} \circ \phi$ e quindi $f^{-1} = \phi^{-1} \circ \psi$ e pertanto f^{-1} è oloedra. \square

Dal Teorema dell'applicazione aperta (Corollario 8.2.5) segue come per funzioni olomorfe il Principio del Massimo Modulo:

TEOREMA 8.2.7: (Principio del Massimo Modulo) *Sia M una superficie di Riemann e $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Allora $|f|$ non ha massimo locale su M .*

Dimostrazione: Esercizio!!! □

TEOREMA 8.2.8: *Sia M una superficie di Riemann compatta e N una superficie di Riemann arbitraria. Un'applicazione olomorfa $f: M \rightarrow N$ non costante è suriettiva e N è compatta.*

Dimostrazione: Dal Teorema dell'applicazione aperta (Corollario 8.2.5) segue che $f(M)$ è un aperto di N . D'altra parte $f(M)$ è un compatto in N che è uno spazio di Hausdorff, dunque $f(M)$ è un chiuso in N . Dato che N è connessa e $f(M) \neq \emptyset$, allora $f(M) = N$ e il risultato segue. □

Come conseguenza immediata, si ha la seguente versione del Teorema di Liouville:

TEOREMA 8.2.9: *Sia M una superficie di Riemann compatta. Ogni funzione olomorfa $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ è costante.*

Dimostrazione: Se f non fosse costante sarebbe suriettiva e \mathbb{C} un compatto! □

Esercizi.

1. Fornire i dettagli nell'Esempio 7.
2. Fornire i dettagli nell'Esempio 8.
3. Fornire i dettagli nell'Esempio 9.
4. Dimostrare la Proposizione 8.2.2.
5. Completare la dimostrazione del Teorema 8.2.3
6. Fornire i dettagli della dimostrazione del Teorema 8.2.4.
7. Fornire i dettagli della dimostrazione del Corollario 8.2.5.
8. Dimostrare il Teorema 8.2.7.

8.3. Funzioni meromorfe su superfici di Riemann.

Come abbiamo osservato, su una superficie di Riemann compatta M le sole funzioni olomorfe (definite su tutta M) sono le costanti. Fortunatamente si può ovviare a questo problema considerando le applicazioni olomorfe a valori nella sfera di Riemann che sono più “numerose” e che quindi rivestono un ruolo particolarmente importante. Ci limitiamo qui ad alcune considerazioni elementari. Abbiamo già osservato che un’immediata conseguenza della costruzione della sfera di Riemann è il fatto che una funzione meromorfa su un aperto di \mathbb{C} si estende a una funzione continua a valori nella sfera di Riemann. Possiamo ora essere più precisi e interpretare le funzioni meromorfe come applicazioni olomorfe utilizzando il Teorema 8.2.3:

TEOREMA 8.3.1: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto, f una funzione meromorfa su A e $E \subset A$ l’insieme dei poli di f . Si estenda f lungo E a un’applicazione $\hat{f}: A \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ponendo $\hat{f}|_{A \setminus E} = f$, e*

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} \lim_{z \rightarrow a} f(z) & \text{se } \text{ord}_a(f) = 0 \\ \infty & \text{se } \text{ord}_a(f) > 0. \end{cases}$$

Allora \hat{f} è un’applicazione olomorfa. Viceversa se A è un aperto connesso, $F: A \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ è un’applicazione olomorfa con $F \not\equiv \infty$, allora l’insieme $E = \{a \in A \mid F(a) = \infty\}$ è discreto in A e $F: A \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione meromorfa su A .

Dimostrazione: Per quanto riguarda la prima parte basta osservare che la funzione $\frac{1}{\hat{f}(z)}$ è olomorfa nell’intorno di ogni polo di ordine maggiore uguale 1 grazie al teorema di estensione di Riemann. Viceversa sia $F: A \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un’applicazione olomorfa. L’insieme $E = F^{-1}(\infty)$ non può avere punti d’accumulazione in A come dimostrato in Teorema 8.2.3. Inoltre si ha che F ristretta a $A \setminus E$ è olomorfa. Sia allora $a \in E$. Allora esiste un intorno V di a tale che esiste una costante $M > 0$ in modo che, per ogni $z \in V \setminus \{a\}$, si ha $|F(z)| > M$. Allora la funzione $g(z) = 1/F(z)$ è olomorfa e limitata su $V \setminus \{a\}$ e quindi ha estensione olomorfa su V . Dato che $gF = 1$ su $V \setminus \{a\}$, la tesi segue. \square

Spesso, anche per quanto suggerito dal Teorema 8.3.1, si chiama *funzione meromorfa* su una superficie di Riemann M un’applicazione olomorfa $f: M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ a valori nella sfera di Riemann con $f \not\equiv \infty$.

In questo contesto possiamo dare altre illustrazioni di come il comportamento all’infinito “prescriva” le funzioni olomorfe. Il primo risultato classicamente si enuncia dicendo che una funzione intera ha estensione meromorfa all’infinito – o ha un polo all’infinito – se e solo se è un polinomio. Con il linguaggio che abbiamo introdotto, questo è l’enunciato preciso:

TEOREMA 8.3.2: *Sia $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione intera. Allora f si estende a un’applicazione olomorfa $\hat{f}: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ se e solo se è un polinomio.*

Dimostrazione: Se f è un polinomio non costante, allora $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = +\infty$. Posto $\hat{f}(\infty) = \infty$, si vede subito che \hat{f} è un’applicazione olomorfa. Infatti, per il teorema di Riemann, la funzione

$$g(\zeta) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$$

si estende olomorfa su $\zeta = 0$. Viceversa supponiamo che una funzione intera $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si estenda a un'applicazione olomorfa $\hat{f}: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Se $\hat{f}(\infty) \in \mathbb{C}$ allora f è limitata nel complemento di un disco centrato nell'origine. Dunque, per il teorema di Liouville f è costante. Se invece $\hat{f}(\infty) = \infty$ allora $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = +\infty$ e quindi, per il Teorema 4.2.6, f è un polinomio. \square

La versione "meromorfa" del teorema precedente classicamente si enuncia dicendo che una funzione meromorfa su \mathbb{C} ha estensione meromorfa su $\hat{\mathbb{C}}$ se e solo se è una funzione razionale. Anche in questo caso diamo l'enunciato utilizzando il linguaggio che abbiamo introdotto:

TEOREMA 8.3.3: *Sia $F: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un'applicazione olomorfa con $F \not\equiv \infty$. Allora F è l'estensione di una funzione razionale. Di conseguenza una funzione meromorfa f su \mathbb{C} si estende a un'applicazione olomorfa $\hat{f}: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ se e solo se è una funzione razionale.*

Dimostrazione: Sia $F: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un'applicazione olomorfa con $F \not\equiv \infty$. Dal Teorema 8.2.3 segue che $E = F^{-1}(\infty)$ è un insieme finito. Allora la funzione $f = F|_{\mathbb{C} \setminus E}$ definisce una funzione meromorfa su \mathbb{C} . Siano $E \cap \mathbb{C} = \{b_1, \dots, b_k\}$ i suoi poli e $m_1 = \text{ord}_{b_1}(f), \dots, m_k = \text{ord}_{b_k}(f)$ i relativi ordini. Allora la funzione

$$g(z) = (z - b_1)^{m_1} \dots (z - b_k)^{m_k} f(z)$$

si estende a una funzione olomorfa su tutto \mathbb{C} . Ci sono allora tre possibilità:

- (a) $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) \in \mathbb{C}$;
- (b) $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \infty$;
- (c) $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z)$ non esiste.

Se vale (a) allora la funzione $g(z)$ è intera e limitata nel complemento di un disco centrato nell'origine e quindi è costante. Segue allora che f è una funzione razionale.

Se vale (b) allora per il Teorema 4.2.6 la funzione $g(z)$ è un polinomio di grado ≥ 1 e quindi anche in questo caso f è una funzione razionale.

Non può valere (c). Infatti g è il prodotto di due funzioni meromorfe su \mathbb{C} che si estendono a applicazioni olomorfe di $\hat{\mathbb{C}}$ in sé. Dunque in particolare g si estende a una funzione continua di $\hat{\mathbb{C}}$ in sé. Dunque necessariamente la funzione $g(z)$ ha limite in $\hat{\mathbb{C}}$ per $z \rightarrow \infty$.

Dalla prima parte dell'enunciato è immediato osservare che una funzione meromorfa che si estende a una applicazione meromorfa di $\hat{\mathbb{C}}$ in sé è necessariamente una funzione razionale. Il fatto che una funzione razionale si estende a un'applicazione olomorfa di $\hat{\mathbb{C}}$ in sé è evidente. \square

Concludiamo illustrando brevemente una classe di esempi molto importante..

Esempio: Funzioni ellittiche. Siano $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linearmente indipendenti su \mathbb{R} e sia $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ il reticolo che definiscono. Una funzione meromorfa $f: \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ si dice *doppiamente periodica* rispetto a Γ se

$$f(z) = f(z + \omega) \text{ per ogni } z \in \mathbb{C} \text{ e } \omega \in \Gamma.$$

Si vede subito che una funzione doppiamente periodica $f: \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ induce sul quoziente $T = \mathbb{C}/\Gamma$ una funzione $F: T \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tale che $f = F \circ \Pi$ dove $\Pi: \mathbb{C} \rightarrow T = \mathbb{C}/\Gamma$ è l'applicazione quoziente. Per come è definita la struttura complessa su T , allora F è meromorfa su T se e solo se f è meromorfa. In particolare se f (e quindi F) è olomorfa, ossia è a valori in \mathbb{C} , allora, per il Teorema di Liouville 8.2.9, è costante. D'altra parte ogni funzione meromorfa non costante $F: T \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, per il Teorema 8.2.8, è suriettiva. Le funzioni meromorfe doppiamente periodiche su \mathbb{C} e quelle che inducono sui quozienti $T = \mathbb{C}/\Gamma$ si dicono *funzioni ellittiche* e costituiscono un importante e classico argomento di studio.

Esercizi.

1. Usare il Teorema 8.2.9 e il Teorema 8.3.2 per dare una nuova dimostrazione del Teorema di Liouville.
2. Fornire tutti i dettagli che dimostrano le affermazioni contenuti nell'esempio al termine del paragrafo.

8.4. Trasformazioni di Möbius come automorfismi.

Nel paragrafo 1.4 abbiamo visto che il gruppo \mathcal{M} delle trasformazioni di Möbius, naturalmente identificabile al gruppo delle proiettività $PGL(2, \mathbb{C})$ della retta proiettiva complessa, agisce in modo transitivo sulla sfera di Riemann, trasforma circonferenze estese in circonferenze estese e conseguentemente che ogni coppia di aperti della sfera di Riemann che hanno per frontiera una circonferenza estesa può essere trasformata l'uno nell'altro mediante una trasformazione di Möbius che manda la frontiera nella frontiera. Nel paragrafo 6.3 abbiamo inoltre mostrato, utilizzando il Lemma di Schwarz, che il gruppo degli automorfismi del disco unitario $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, 1)$ è un sottogruppo del gruppo \mathcal{M} delle trasformazioni di Möbius.

Caratterizziamo ora gli automorfismi di \mathbb{C} e della sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

TEOREMA 8.4.1: $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}) \iff$ esistono $a \in \mathbb{C}^*$ e $b \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = az + b$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione: Evidentemente se $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è definita da $f(z) = az + b$ per $a \in \mathbb{C}^*$ e $b \in \mathbb{C}$, allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. Sia $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. Allora la funzione definita da $g(z) = f(1/z)$ è olomorfa su \mathbb{C}^* . Inoltre 0 o è un polo o è una singolarità essenziale per g . Siano $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, 1)$ e $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Se 0 fosse una singolarità essenziale per g , per il teorema di Casorati-Weierstrass, $g(\mathbb{D}^*)$ sarebbe un aperto denso di \mathbb{C} . Allora

$$f(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}) \cap f(\mathbb{D}) = g(\mathbb{D}^*) \cap f(\mathbb{D}) \neq \emptyset$$

e quindi f non potrebbe essere iniettiva. Dunque necessariamente 0 è un polo per g . Se $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ è lo sviluppo in serie di Taylor di f , allora $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^{-n}$ e quindi, dato che 0 è un polo per g , occorre che, per qualche N , per ogni $n \geq N$ si abbia $a_n = 0$. Dunque f deve essere un polinomio e dato che f è iniettiva, deve essere un polinomio di grado 1. \square

TEOREMA 8.4.2: $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \iff T \in \mathcal{M}$.

Dimostrazione: È immediato che se $T \in \mathcal{M}$ allora $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. Supponiamo che $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. Se T fissa il punto all'infinito ∞ , allora la restrizione a \mathbb{C} di T è un automorfismo di \mathbb{C} e quindi per il Teorema 8.4.1 è un'affinità e dunque $T \in \mathcal{M}$. Se invece, per qualche $c \in \mathbb{C}$, si ha $T(\infty) = c$, si consideri $S \in \mathcal{M}$ definita per $z \in \mathbb{C}$ da $S(z) = \frac{1}{T(z)-c}$. Allora $S \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, dato che S è la composizione di un automorfismo di $\hat{\mathbb{C}}$ con una trasformazione di Möbius. D'altra parte S fissa il punto all'infinito ∞ e quindi $S \in \mathcal{M}$. Segue che anche $T \in \mathcal{M}$ visto che, se $z \in \mathbb{C}$, $T(z) = \frac{1}{S(z)} + c$. \square

Possiamo utilizzare questo circolo di idee per capire un po' meglio il tipo di comportamento del gruppo di automorfismi almeno in situazioni geometriche molto semplici. Cominciamo con questa utile osservazione

PROPOSIZIONE 8.4.3: Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e E un sottoinsieme discreto. Sia $f: A \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa iniettiva. Allora:

- (i) nessun punto di $z_0 \in E$ è una singolarità essenziale di f ;
- (ii) se tutti i punti di E sono singolarità eliminabili, allora l'estensione olomorfa $\hat{f}: A \rightarrow \mathbb{C}$ è iniettiva.
- (iii) se $z_0 \in E$ è un polo, allora z_0 è un polo di ordine 1.

Dimostrazione: (i) Sia $U \subset \bar{U} \subset A$ un disco contenente z_0 tale che $U \cap E = \{z_0\}$ e sia $A' = A \setminus (E \cup \bar{U})$. Allora A' è connesso (perchè?) e aperto, dunque $f(A')$ è un aperto di \mathbb{C} . Dato che $f(U \setminus \{z_0\}) \cap f(A') = \emptyset$, allora, per il Teorema di Casorati-Weierstrass, z_0 non può essere una singolarità essenziale.

(ii) Supponiamo che esistano punti distinti $z \neq w$ di A tali che $\hat{f}(z) = \hat{f}(w) = p$. Siano U, V dischi disgiunti, $U \cap V = \emptyset$, tali che $z \in U$, $w \in V$ e $U \setminus \{z\} \subset A \setminus E$, $V \setminus \{w\} \subset A \setminus E$. Allora $\hat{f}(U) \cap \hat{f}(V)$ è un aperto che contiene $p = \hat{f}(z) = \hat{f}(w)$, dunque contiene un punto $q \neq p$ (in effetti tanti!). Ma allora esistono $z' \in U \setminus \{z\}$, $w' \in V \setminus \{w\}$ con $f(z') = q = f(w')$ ma questo contraddice l'iniettività di f .

(iii) Se $z_0 \in E$, è un polo per f allora esiste un aperto $U \subset A$ che contiene z_0 tale che la funzione $g = 1/f$ si estende olomorfa su U . Dato che f è iniettiva, allora la funzione $g: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}^*$ è iniettiva e quindi è iniettiva anche $g: U \rightarrow \mathbb{C}$. Allora deve essere $g'(z_0) \neq 0$ e quindi segue che z_0 è uno zero semplice di g . Dunque necessariamente f ha un polo di ordine 1 in z_0 . \square

Possiamo usare la Proposizione 8.4.3 per dimostrare che per molti aperti in \mathbb{C} il gruppo di automorfismi è un sottogruppo del gruppo \mathcal{M} delle trasformazioni di Möbius.

PROPOSIZIONE 8.4.4: $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{C}^*)$ se e solo se per qualche $a \in \mathbb{C}^*$ si ha $\phi(z) = az$ per ogni $z \in \mathbb{C}^*$ oppure $\phi(z) = az^{-1}$ per ogni $z \in \mathbb{C}^*$. In particolare, segue che \mathbb{C}^* è omogeneo.

Dimostrazione: Grazie alla Proposizione 8.4.3 possiamo concludere che o l'origine è una singolarità rimovibile oppure l'origine è un polo di ϕ . Nel primo caso l'estensione di $\hat{\phi}$ è iniettiva e necessariamente $\hat{\phi}(0) = 0$. Dunque ϕ è la restrizione a \mathbb{C}^* di un automorfismo di \mathbb{C} e quindi $\phi(z) = az$ per qualche $a \in \mathbb{C}^*$. Se invece 0 è un polo di ϕ , allora $\psi = \frac{1}{\phi}$ è un automorfismo di \mathbb{C}^* che ha una singolarità rimovibile in 0: usando la prima parte della dimostrazione segue che $\phi(z) = az^{-1}$ per qualche $a \in \mathbb{C}^*$. Il fatto che $\text{Aut}(\mathbb{C}^*)$ sia transitivo su \mathbb{C}^* è evidente. \square

Per una superficie di Riemann M , se $E \subset M$ si definisca:

$$\text{Aut}_E(M) = \{\phi \in \text{Aut}(M) \mid \phi(E) = E\}$$

il sottogruppo degli automorfismi di M che trasformano E in sé. Nel caso $E = \{p\}$ si riduca a un punto, $\text{Aut}_E(M) = \text{Aut}_p(M)$ si dice sottogruppo di isotropia di p . È evidente che ogni $\phi \in \text{Aut}_E(M)$, ristretto a $M \setminus E$, definisce un automorfismo di $M \setminus E$. L'applicazione restrizione $\rho: \text{Aut}_E(M) \rightarrow \text{Aut}(M \setminus E)$ definita $\rho(\phi) = \phi_{M \setminus E}$ è evidentemente un omomorfismo di gruppi. Se $M \setminus E$ è un aperto connesso, si vede subito che ρ è iniettivo. Infatti se $\rho(\phi) = \text{Id}_{M \setminus E}$ allora, in questo caso per prolungamento analitico, $\phi = \text{Id}_M$. Abbiamo allora immediatamente il seguente:

LEMMA 8.4.5: Se $M \setminus E$ è un aperto connesso, che $\rho: \text{Aut}_E(M) \rightarrow \text{Aut}(M \setminus E)$ è un isomorfismo di $\text{Aut}_E(M)$ con un sottogruppo di $\text{Aut}(M \setminus E)$

Da questo punto in poi, se $M \setminus E$ è un aperto connesso, identificheremo $\text{Aut}_E(M)$ con la sua immagine $\rho(\text{Aut}_E(M)) \subset \text{Aut}(M \setminus E)$ e ogni $\phi \in \text{Aut}_E(M)$ con la sua restrizione $\rho(\phi) = \phi_{M \setminus E}$. Ad esempio $M \setminus E$ è un aperto connesso se E è un sottoinsieme chiuso e discreto. In questo caso abbiamo il seguente:

TEOREMA 8.4.6: Se $A \subset \mathbb{C}$ è un aperto limitato tale che la frontiera ∂A non ha punti isolati e $E \subset A$ è un sottoinsieme chiuso (in A) e discreto, allora $\text{Aut}_E(A) = \text{Aut}(A \setminus E)$.

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che per $\psi \in \text{Aut}(A \setminus E)$ esiste $\Psi \in \text{Aut}_E(A)$ tale che $\Psi_{A \setminus E} = \psi$. Dato che $A \setminus E$ è limitato, ψ e ψ^{-1} , per il Teorema di Estensione di Riemann, si estendono rispettivamente a funzioni olomorfe Ψ e Φ definite su A . Per il punto (ii) della Proposizione 8.4.3, abbiamo che Ψ e Φ sono funzioni iniettive. Dimostriamo ora che $\Psi(A) \subset A$ e $\Phi(A) \subset A$. Dato che Ψ è continua, necessariamente $\Psi(A) \subset \bar{A}$. Supponiamo ci sia un punto $a \in A$ tale che $\Psi(a) \in \partial A$. In questo caso necessariamente deve essere $a \in E$. Sia U un disco centrato in a tale che $U \setminus \{a\} \subset A \setminus E$. Tale disco esiste dato che E è discreto. Per il teorema dell'applicazione aperta, $\Psi(U)$ è un aperto contenente $\Psi(a)$. Dato che Ψ è iniettiva allora $\Psi(U) \setminus \{\Psi(a)\} = \Psi(U \setminus \{a\}) \subset A$. Ma allora $\Psi(a)$ sarebbe un punto isolato di ∂A che, per ipotesi, non ne ha. Dunque necessariamente $\Psi(A) \subset A$. Lo stesso argomento prova che $\Phi(A) \subset A$. Dunque, in particolare le funzioni $\Psi \circ \Phi$ e $\Phi \circ \Psi$ sono definite e olomorfe su A . Inoltre ambedue coincidono con l'identità su un sottoinsieme denso di A . Dunque Ψ è un automorfismo di A tale che, dato che $\Psi(A \setminus E) = \psi(A \setminus E) = A \setminus E$, necessariamente $\Psi(E) = E$ e quindi $\Psi \in \text{Aut}_E(A)$ \square

Come conseguenza immediata:

COROLLARIO 8.4.7: Se $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ è il disco unitario con il centro rimosso, allora

$$\text{Aut}(\mathbb{D}^*) = \text{Aut}_0(\mathbb{D}) = \{R_c: \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{D}^* \mid c \in \partial\mathbb{D} = S^1\} \quad \text{dove } R_c(z) = cz.$$

Il Teorema 8.4.6 suggerisce, e il Corollario 8.4.7 lo conferma, che “togliendo” punti a un dominio limitato il gruppo degli automorfismi diventa più piccolo perché togliere punti corrisponde ad “aggiungere” condizioni per l'esistenza degli automorfismi.

Concludiamo il paragrafo mostrando che con facilità si ottengono domini *rigidi* ossia per i quali l'unico automorfismo è l'identità. In effetti la maggior parte delle superfici di Riemann o hanno gruppo di automorfismi finito o addirittura sono rigide. La seguente è un'utile osservazione:

PROPOSIZIONE 8.4.8: Se $\phi \neq Id_{\mathbb{D}}$ è un automorfismo del disco unitario \mathbb{D} , allora vale una delle seguenti mutualmente esclusive affermazioni:

- (i) ϕ ha un solo punto fisso in \mathbb{D} ;
- (ii) ϕ ha un solo punto fisso in $\partial\mathbb{D}$;
- (iii) ϕ ha due punti fissi distinti in $\partial\mathbb{D}$.

In particolare, se $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ ha due punti fissi distinti in \mathbb{D} , ossia esistono $z, w \in \mathbb{D}$, $z \neq w$ con $\phi(z) = z$ e $\phi(w) = w$, allora $\phi \equiv Id_{\mathbb{D}}$.

Dimostrazione: Sia $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora deve essere

$$\phi(\zeta z) = c \frac{\zeta - a}{1 - \bar{a}\zeta}$$

con $c \in \partial\mathbb{D}$. Se $a = 0$ allora o $c \neq 1$ e ϕ ha un solo punto fisso, oppure $c = 1$ e $\phi \equiv Id_{\mathbb{D}}$. Se invece $a \neq 0$, allora i punti fissi di ϕ in \mathbb{D} sono le soluzioni dell'equazione

$$c \frac{\zeta - a}{1 - \bar{a}\zeta} = \zeta \quad \iff \quad \bar{a}\zeta^2 + (c - 1)\zeta - ca = 0. \quad (8.4.1)$$

Per $a \neq 0$ l'equazione (8.4.1) ha due radici contate con la loro molteplicità: z, w . Dato che deve essere $|z||w| = |ca/\bar{a}| = 1$, allora o una sola radice è in \mathbb{D} e vale (i), oppure esiste una radice doppia di modulo 1 e vale (ii), oppure vi sono due radici distinte di modulo 1 e vale (iii). \square

Il fatto cruciale per studiare il gruppo di automorfismi del complemento di un numero finito di punti del disco unitario, è il seguente:

TEOREMA 8.4.9: *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ costituito da $n > 0$ punti distinti. Allora $Aut(\mathbb{D}^* \setminus E)$ è un gruppo isomorfo a un sottogruppo del gruppo delle permutazioni di $E \cup \{0\}$ ossia, a meno di identificazioni, è un sottogruppo del gruppo delle permutazioni S_{n+1} di $n + 1$ lettere.*

Dimostrazione: Dal Teorema 8.4.6 segue che $Aut(\mathbb{D}^* \setminus E) = Aut(\mathbb{D} \setminus (E \cup \{0\})) = Aut_{E \cup \{0\}}(\mathbb{D})$. Dunque ogni $\phi \in Aut(\mathbb{D}^* \setminus E)$ è un automorfismo di \mathbb{D} che trasforma $E \cup \{0\}$ in sé ossia induce una permutazione $\Sigma(\phi)$ di $E \cup \{0\}$. Si vede subito che $\Sigma: Aut(\mathbb{D}^* \setminus E) \rightarrow Perm(E \cup \{0\})$ è un omomorfismo di gruppi. Dato che $E \cup \{0\}$ ha almeno due punti, se $\Sigma(\phi) = Id_{E \cup \{0\}}$ allora ϕ è un automorfismo di \mathbb{D} con due punti fissi e quindi, per la Proposizione 8.4.8, $\phi \equiv Id_{\mathbb{D}}$ e quindi Σ è iniettivo. \square

I seguenti corollari illustrano, come desiderato, il fenomeno di “irrigidimento” togliendo punti a un disco:

COROLLARIO 8.4.10: *Sia $a \in \mathbb{D}^*$. Allora $Aut(\mathbb{D}^* \setminus \{a\})$ è isomorfo a S_2 e il suo unico automorfismo diverso dall'identità è definito da $\phi(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$.*

Dimostrazione: Dal Teorema 8.4.9 segue che $Aut(\mathbb{D}^* \setminus \{a\})$ è isomorfo a un sottogruppo di S_2 . D'altra parte si vede subito che $\phi(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ definisce un automorfismo di $\mathbb{D}^* \setminus \{a\}$ diverso dall'identità. \square

COROLLARIO 8.4.11: *Siano $s, t \in (0, 1)$ con $s \neq t$. Allora $Aut(\mathbb{D} \setminus \{0, s, t\}) \neq \{Id\}$ se e solo se $2t = (t^2 + 1)s$ oppure $2s = (s^2 + 1)t$*

Dimostrazione: Dal Teorema 8.4.6 segue che $Aut(\mathbb{D} \setminus \{0, s, t\}) = Aut_{\{0, s, t\}}(\mathbb{D})$. Dunque se $\phi \in Aut(\mathbb{D} \setminus \{0, s, t\})$ allora per qualche $c \in \partial\mathbb{D}$ e $a \in \mathbb{D}$ si ha

$$\phi(z) = c \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

D'altra parte dal Teorema 8.4.9 segue che ϕ induce una permutazione dei tre punti $0, s, t$. Si vede subito che se 0 è un punto fisso di ϕ , allora ϕ è una rotazione che fissa due punti dell'asse reale positivo e quindi, necessariamente ϕ è l'identità. Se $\phi(s) = 0$, allora $a = s$ e quindi $\phi(z) = c \frac{z-s}{1-sz}$.

Ci sono due possibilità:

$$(i) \quad \phi(0) = s \text{ e } \phi(t) = t \quad \text{oppure} \quad (ii) \quad \phi(0) = t \text{ e } \phi(t) = s.$$

Il caso (ii) non può verificarsi dato che, da $\phi(0) = t$ si avrebbe che $t = \phi(0) = -cs$ che non è possibile perchè altrimenti $1 = |c| = t/s \neq 1$. Se vale (i) da $\phi(0) = s$ si avrebbe che $c = -1$ e quindi necessariamente $t = \phi(t) = -\frac{t-s}{1-st}$ ossia $2t = (t^2 + 1)s$.

Dunque se $\phi(s) = 0$ e $2t = (t^2 + 1)s$, si ha $Aut(\mathbb{D} \setminus \{0, s, t\}) = \{Id, \phi\}$ con ϕ definita da

$$\phi(z) = -\frac{z-s}{1-sz}$$

dato che si verifica immediatamente che $\phi = \phi^{-1}$. Se invece $\phi(s) = 0$ ma $2t \neq (t^2 + 1)s$, si ha necessariamente $Aut(\mathbb{D} \setminus \{0, s, t\}) = \{Id\}$. Se invece è $\phi(t) = 0$, scambiando i ruoli di s e t , l'argomento di sopra prova che, se $2s = (s^2 + 1)t$, si ha $Aut(\mathbb{D} \setminus \{0, s, t\}) = \{Id, \phi\}$ con ϕ definita da

$$\phi(z) = -\frac{z-t}{1-tz},$$

mentre, se invece $\phi(s) = 0$ ma $2t \neq (t^2 + 1)s$, si ha necessariamente $Aut(\mathbb{D} \setminus \{0, s, t\}) = \{Id\}$. \square

Esercizi.

1. Dare i dettagli della dimostrazione del Corollario 8.4.7
2. Trovare $T \in \mathcal{M}$ che trasforma il disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ nel semipiano superiore $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid Imz > 0\}$.
3. Utilizzando l'esistenza del biolomorfismo $T \in \mathcal{M}$ trovato nell'esercizio 2, determinare il gruppo $Aut(\mathbb{H}^+)$ degli automorfismi del semipiano superiore. *Consiglio:* $\phi \in Aut(\mathbb{H}^+)$ se e solo se $T^{-1} \circ \phi \circ T \in Aut(\Delta)$ e quindi....
4. Siano \mathbb{H}^+ il semipiano superiore e $Q = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0, Im(z) > 0\}$. Determinare un biolomorfismo $\phi: Q \rightarrow \mathbb{H}^+$. Utilizzando l'esistenza del biolomorfismo ϕ trovato e l'esercizio 3, determinare il gruppo $Aut(Q)$
5. Siano M e N due superfici Riemann e sia $F: M \rightarrow N$ un biolomorfismo, ossia un'applicazione olomorfa invertibile con inversa olomorfa. Dimostrare che $Aut(M)$ e $Aut(N)$ sono gruppi isomorfi.
6. Dimostrare il Corollario 8.4.7 utilizzando l'idea usata per la dimostrazione della Proposizione 8.4.4. (*Idea:* se ϕ è un automorfismo di \mathbb{D}^* l'origine è una singolarità rimovibile di ϕ . Dunque si può definire $\phi(0)$ e deve essere $\phi(0) \in \partial\mathbb{D}^*$. Per il principio del massimo modulo non può essere $\phi(0) \in \partial\mathbb{D}$ e quindi $\phi(0) = 0$ e pertanto...)

