

NON SI POSSONO UTILIZZARE CALCOLATRICI NÉ CONSULTARE LIBRI O APPUNTI

NOME E COGNOME: _____

Numero di matricola o data di nascita: _____

1) DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO. OGNI RISPOSTA ESATTA VALE 3 PUNTI

1a) Dire per quali $t \in \mathbf{R}$ l'applicazione lineare $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tale che

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

è iniettiva.

1b) Trovare condizioni su $x, y \in \mathbf{R}$ affinché $\begin{pmatrix} 3 \\ x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

1c) Dire per quali $t \in \mathbf{R}$ la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 0 & t & 1 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$ è invertibile e calcolare, se possibile, A_t^{-1} .

1d) Dire per quali $t \in \mathbf{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \\ 0 & 0 & t^2-1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

2) Rispondere (con precisione) alle seguenti domande

2a) **(vale 4 punti)** Dare la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale, dare un esempio di sottospazio di \mathbf{R}^2 diverso da \mathbf{R}^2 e dal sottospazio nullo e un esempio di sottoinsieme di \mathbf{R}^2 che non è un sottospazio vettoriale.

2b) **(vale 3 punti)** Dire che relazione c'è fra il rango di un'applicazione lineare, la dimensione della sua immagine e la dimensione del suo dominio.

2c) **(vale 4 punti)** Definire molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore. Enunciare condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice sia diagonalizzabile.

3) RISPONDERE, MOTIVANDO E DANDO DETTAGLI DEL PROCEDIMENTO, ALLA SEGUENTE DOMANDA CHE VALE 10 PUNTI.

3a) Sia A_t definita per $t \in \mathbf{R}$ da

$$A_t = \begin{pmatrix} t+1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & t \\ 0 & 0 & t & t \end{pmatrix},$$

- (a) Trovare $\det(A_t)$ e $\text{rango}(A_t)$ per ogni $t \in \mathbf{R}$
- (b) per ogni $t \in \mathbf{R}$ trovare una base per $\text{Im}(A_t)$ e una base per $\text{Ker}(A_t)$
- (c) Stabilire se A_2 è diagonalizzabile sui reali e, in caso positivo, trovare una matrice diagonalizzante.

