Algebra Lineare, c.d.L. in Informatica, compito del 21 dicembre 2011, A.A. 2011-2012, FILA 1

NON SI POSSONO UTILIZZARE CALCOLATRICI NÉ CONSULTARE LIBRI O APPUNTI

NOME E COGNOME: ____

Numero di matricola o data di nascita: ____

1) DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO. OGNI RISPOSTA ESATTA VALE 3 PUNTI

1a) Sia $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Determinare $T\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$ per $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ arbitrario.

1b) Trovare condizioni su $a, b, c \in \mathbf{R}$ affinché $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in Span\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-11\\7\end{pmatrix}\right)$.

1c) Dire per quali $t \in \mathbf{R}$ la matrice $A_t = \begin{pmatrix}t & 0 & 1\\1 & t & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ è invertibile e calcolare, se possibile, A_2^{-1}.

1d) Dire per quali $t \in \mathbf{R}$ la matrice $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & t & t\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

2) Rispondere (con precisione) alle seguenti domande

2a) **(vale 3 punti)** Dare le definizioni di applicazione lineare fra due spazi vettoriali e di nucleo e rango di un'applicazione lineare.

2b) **(vale 4 punti)** Enunciare il teorema di Rouché-Capelli

2c) **(vale 4 punti)** Definire molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore. Enunciare condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice sia diagonalizzabile.

3) RISPONDERE, MOTIVANDO E DANDO DETTAGLI DEL PROCEDIMENTO, ALLA SEGUENTE DOMANDA CHE VALE 10 PUNTI.

3a) Sia A_t definita per $t \in \mathbf{R}$ da

$$A_t = \begin{pmatrix} 1-t & 0 & t+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ t+1 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(a) Trovare $\det(A_t)$ e $rango(A_t)$ per ogni $t \in \mathbf{R}$
(b) per ogni $t \in \mathbf{R}$ trovare una base per $Im(A_t)$ e una base per $Ker(A_t)$
(c) Stabilire se A_1 è diagonalizzabile sui reali e, in caso positivo, trovare una matrice diagonalizzante.