Algebra Lineare, c.d.L. in Informatica, compito del 4 luglio 2012, A.A. 2011-2012, FILA 1

NON SI POSSONO UTILIZZARE CALCOLATRICI NÉ CONSULTARE LIBRI O APPUNTI

NOME E COGNOME: ____

Numero di matricola o data di nascita: ______________________________________

1) DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO. OGNI RISPOSTA ESATTA VALE 3 PUNTI

1a) Dire per quali $t \in \mathbf{R}$ l'applicazione lineare $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}t\\0\\0\end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\\cos t\\\sin^2 t\end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\\cos t\end{pmatrix}.$$

è suriettiva.

1b) Determinare per quale $t \in \mathbf{R}$ il sistema $\begin{cases} x + 2y + (t+2)z = t \\ tx + (t-1)y - z = 1 \end{cases}$ ha soluzione **unica**.

1c) Dire per quali $t \in \mathbf{R}$ la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$ è invertibile e, se possibile, calcolare A_2^{-1}.

1d) Dire per quali $t \in \mathbf{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & t-1 \\ t+1 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile (sul campo reale).

2) Rispondere (con precisione) alle seguenti domande

2a) **(vale 4 punti)** Dare la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale, dare un esempio di sottospazio di $\mathbf{R}^3$ diverso da $\mathbf{R}^3$ e dal sottospazio nullo e un esempio di sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ che non è un sottospazio vettoriale.

2b) **(vale 4 punti)** Enunciare il teorema di Rouché-Capelli e dare una condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema risolubile abbia soluzione unica.

2c) **(vale 3 punti)** Dare un esempio di matrice di ordine 2 con autovalori tutti reali ma non diagonalizzabile.

3) RISPONDERE, MOTIVANDO E DANDO DETTAGLI DEL PROCEDIMENTO, ALLA SEGUENTE DOMANDA CHE VALE 10 PUNTI.

3a) Sia A_t definita per $t \in \mathbf{R}$ da

$$A_t = \begin{pmatrix} t+1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & t & t & 0 \\ 0 & t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix},$$

(a) Trovare $\det(A_t)$ e $rango(A_t)$ per ogni $t \in \mathbf{R}$
(b) per ogni $t \in \mathbf{R}$ trovare una base per $Im(A_t)$ e una base per $Ker(A_t)$
(c) Stabilire se A_{-2} è diagonalizzabile sui reali e, in caso positivo, trovare una matrice diagonalizzante.