Algebra Lineare, c.d.L. in Informatica, compito del 20 febbraio 2012, A.A. 2011-2012, FILA 1

NON SI POSSONO UTILIZZARE CALCOLATRICI NÉ CONSULTARE LIBRI O APPUNTI

NOME E COGNOME: ____

Numero di matricola o data di nascita: ______________________________________

1) DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO. OGNI RISPOSTA ESATTA VALE 3 PUNTI

1a) Sia $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Trovare una base per $KerT$.

1b) Trovare una base per $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in \mathbf{R}^4 \mid x_1+x_2-x_3+x_4=0\right\}$ e completarla a una base di $\mathbf{R}^4$.

1c) Dire per quali $t\in\mathbf{R}$ la matrice $A_t=\begin{pmatrix}1&t&1\\1&0&1\\1&0&t\end{pmatrix}$ è invertibile e calcolare, se possibile, A_2^{-1}.

1d) Dire per quali $t\in\mathbf{R}$ la matrice $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&t&t-2\\0&0&t\end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

.

2) Rispondere (con precisione) alle seguenti domande

2a) **(vale 3 punti)** Sia V uno spazio vettoriale.
(i) Dire cosa vuole dire che $v_1, \ldots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti.
(ii) Dire cosa vuole dire che $v_1, \ldots, v_n \in V$ generano V.
(iii) Dare la definizione di dimensione di V.

2b) **(vale 4 punti)** Enunciare il Teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare

2c) **(vale 4 punti)** (i) Definire la nozione di autovalore e di autovettore di una matrice.
(ii) Definire molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore.
(iii) Dire cosa vuol dire che due matrici sono simili.
(iv) Dire cosa vuol dire che una matrice è diagonalizzabile.

3) RISPONDERE, MOTIVANDO E DANDO DETTAGLI DEL PROCEDIMENTO, ALLA SEGUENTE DOMANDA CHE VALE 10 PUNTI.

3a) Sia A_t definita per $t \in \mathbf{R}$ da

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 1 & t & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(a) Trovare $\det(A_t)$ e $rango(A_t)$ per ogni $t \in \mathbf{R}$
(b) per i $t \in \mathbf{R}$ tali che $rango(A_t) < 4$ trovare una base per $Im(A_t)$ e una base per $Ker(A_t)$
(c) Stabilire se A_2 è diagonalizzabile sui reali e, in caso positivo, trovare una matrice diagonalizzante.