Esercizi Algebra Lineare

1. Si consideri l'endomorfismo $T\colon \mathbf{R}_3[t] \to \mathbf{R}_3[t]$ definito da $T(p(t) = tp'(t) + p(t+1)$.

(a) Trovare la matrice di T relativa alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$, calcolare il polinomio caratteristico di T e calcolare i suoi autovalori.

(b) Stabilire se T è diagonalizzabile e, in caso positivo, trovare una base diagonalizzante per T.

2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A e calcolare i suoi autovalori.

(b) Trovare una base per gli autospazi relativi agli autovalori di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A e calcolare i suoi autovalori.

(b) Trovare una base per gli autospazi relativi agli autovalori di A e stabilire se A è diagonalizzabile e, nel caso trovare una matrice diagonalizzante per A.

4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Trovare autovalori e basi per i corrispondenti autospazi di f_A. È diagonalizzabile? Se no, dire perché, se si trovare una base diagonalizzante.

5. Sia $D\colon \mathbf{R}_3[t] \to \mathbf{R}_3[t]$ l'applicazione che associa a un polinomio la sua derivata seconda. Trovare autovalori e autospazi di D e dimostrare che D non è diagonalizzabile.

6. (a) Si dimostri che per qualunque $t \in \mathbf{R}$ esiste una e una sola applicazione lineare $f_t\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$f_t\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t \\ t-1 \end{pmatrix}, \qquad f_t\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t \\ 1+t \end{pmatrix}, \qquad f_t\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

(b) Si determini per ogni $t \in \mathbf{R}$ la matrice A_t di f_t relativa alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

(c) Si determinino i valori di t per i quali f_t non è suriettiva.

(d) Per i valori di di t per i quali f_t non è suriettiva si determini se f_t è diagonalizzabile e, in caso positivo, si trovi una base diagonalizzante.