Funzioni di Variabile complessa 8.2.2010

Si risolvano il maggior numero possibile fra i seguenti esercizi:

1. Dimostrare che non esiste una funzione olomorfa f sul disco unitario $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$ tale che $f(\frac{1}{2k}) = \frac{1}{k} = f(\frac{1}{2k+1})$ per ogni $k \geq 1$.

2. Sia f una funzione olomorfa su $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ tale che f' è limitata su $\mathbb{D}^*$. Dimostrare che f si estende a una funzione olomorfa su $\mathbb{D}$. Cosa si può dire invece della singolarità di f in 0 se invece si assume che f'' è limitata su $\mathbb{D}^*$?

3. a) Si determini il raggio di convergenza R della serie $\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$ e se ne determini la somma $f(z)$ nel disco di convergenza $\mathbb{D}(R)$ della serie.

b) Se $\mathcal{F}$ è la famiglia di tutte le funzioni olomorfe che hanno serie di potenze $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ con $|a_n| \leq n+1$, dimostrare che $\mathcal{F}$ è una famiglia normale di funzioni olomorfe su $\mathbb{D}(R)$. *(Consiglio: Su un disco chiuso centrato nell'origine contenuto in in $\mathbb{D}(R)$, il modulo della somma parziale della serie di potenze di una funzione in $\mathcal{F}$ si può stimare con la somma parziale dei moduli dei termini corrispondenti per la serie che definisce f....)*

4. Sia f una funzione intera (ossia olomorfa su $\mathbb{C}$).

a) Se

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|} = 0,$$

dimostrare che f è costante.

b) Se, per qualche funzione $g\colon [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ tale che $\lim\limits_{t\to+\infty} tg(t) = 0$, si ha per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$|f(z)| \leq |z|g(|z|),$$

dimostrare che $f \equiv 0$. *(Consiglio: Sembra complicato ma non è vero: dopo aver capito qualcosa su come è fatta g su $[0,+\infty)$, se si assume vero a) rimane poco da fare...)*

5. Sia f una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ con unico zero in $z = 1$ di ordine 3. Se γ è la curva definita da $\gamma(t) = 2 + 2e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$, calcolare $\int_\gamma z\frac{f'(z)}{f(z)}dz$.