Funzioni di Variabile complessa 23.2.2010

Si risolvano il maggior numero possibile fra i seguenti esercizi:

1. Siano $T \subset \mathbb{C}$ il triangolo chiuso di vertici 0, 1, i e $f(z) = \frac{z}{1+z}$. Disegnare approssimativamente $B = f(T)$.

2. Sia f_n una successione di funzioni intere con solo zeri reali uniformemente convergente sui compatti di $\mathbb{C}$ alla funzione f. Dimostrare che o f è identicamente nulla oppure f ha solo zeri reali.

3. Sia $f(z)$ una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ ma non intera. Dimostrare che $g(z) = e^{f(z)}$ non definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$

4. Dimostrare che se $a \in \mathbb{C}$ è tale che $|a| > e$, allora, per ogni intero $n \geq 0$ l'equazione $e^z = az^n$ ha n radici nel disco $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

5. Per ogni una curva di classe C^1 regolare semplice chiusa $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ tale che per ogni $t \in [a,b]$ si abbia $\gamma(t) \neq 0$ e $\gamma(t) \neq 1$, si calcoli

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{e^z - 1}{z^2(1-z)^2} dz.$$