Funzioni di Variabile complessa 29.9.2010

Si risolvano il maggior numero possibile fra i seguenti esercizi:

1. Se $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, al variare di $R > 0$, si determini l'immagine mediante f della circonferenza di raggio R centrata nell'origine.

2. Sia f una funzione olomorfa non costante su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ e sia $D \subset \overline{D} \subset A$ un aperto connesso limitato tale che $|f(z)|$ è costante su ∂D. Dimostrare che f ha uno zero in D.

3. Cosa si può dire di una funzione intera f tale che per qualche $R > 1$ si ha $|f(z)| \leq \log|z|$ per ogni $|z| > R$.

4. Sia f una funzione intera tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha che $f(x) \in \mathbb{R}$ e $f(iy) \in i\mathbb{R}$.
(i) Dimostrare che le funzioni definite da

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})} \qquad \text{e} \qquad h(z) = -\overline{f(-\overline{z})}$$

sono funzioni intere
(ii) Dimostrare che $g(z) = f(z) = h(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ e concludere che f è dispari (ossia $f(z) = -f(-z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$).

5. Siano $\phi(z)$ una funzione intera $f(z)$ una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$. Posto $z_n = 2n$ e $w_n = 2n - 1$ per ogni intero $n > 0$, si supponga che gli zeri di f siano i punti z_n esattamente con molteplicità n per ogni n e che i poli di f siano i punti w_n esattamente di ordine n per ogni n. Calcolare

$$I_r = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{5}{2}} \phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$