# CAPITOLO 1

# Numeri complessi e funzioni continue

## 1.1. Il campo dei numeri complessi

Sull'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali siano definite operazioni di somma e di prodotto mediante

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \tag{1.1.1}$$

e

$$(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu). \tag{1.1.2}$$

Con le operazioni (1.1.1) e (1.1.2), $\mathbb{R}^2$ ha una struttura algebrica di campo che denoteremo $\mathbb{C}$ e chiameremo il campo dei numeri complessi. L'elemento neutro della somma è il numero complesso $0 = (0, 0)$ e l'elemento neutro del prodotto è il numero complesso $1 = (1, 0)$. Il reciproco di $(a, b) \neq (0, 0)$ è dato da

$$(a, b)^{-1} = \frac{(a, -b)}{a^2 + b^2} \tag{1.1.3}$$

Il numero complesso $i = (0, 1)$ è tale che $i^2 = ii = -1$. A volte il numero $i$ viene chiamato *unità immaginaria*. Per ogni numero complesso $z = (a, b)$ si ha allora

$$(a, b) = a + ib. \tag{1.1.4}$$

Allora per ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ se $z = a + ib$ diremo che il numero (reale) $Re(z) = a$ è la *parte reale* di $z$ e che il numero (reale) $Im(z) = b$ è la *parte immaginaria* di $z$. Il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ si identifica con il sottocampo di $\mathbb{C}$ dei numeri complessi con parte immaginaria nulla (al quale è ovviamente isomorfo). Diremo quindi che un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è *reale* se la parte immaginaria di $z$ è nulla. Il *coniugato* di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero $\overline{z} = a - ib$ e l'applicazione di $\mathbb{C}$ in sé definita da $z \mapsto \overline{z}$ si dice *coniugio*. Dunque $\mathbb{R}$ è esattamente l'insieme dei punti fissi del coniugio. Il coniugio è un automorfismo di $\mathbb{C}$ ossia

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \quad e \quad \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}.$$

Inoltre il coniugio è involutivo, ossia $\overline{\overline{z}} = z$. È immediato verificare che

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad e \quad Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Il *modulo* di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero reale

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{z\overline{z}}. \tag{1.1.5}$$

Si osservi che dalla definizione, per $z \neq 0$ abbiamo immediatamente $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Riassumiamo rapidamente le proprietà del modulo:

$$|z| \geq 0 \quad e \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0, \tag{1.1.6}$$

$$|zw| = |z||w|. \tag{1.1.7}$$

$$|Re(z)| \leq |z| \quad e \quad |Im(z)| \leq |z|, \tag{1.1.8}$$

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad e \quad |z - w| \geq ||z| - |w|| \tag{1.1.9}$$

Su $\mathbb{R}^2$ si possono introdurre coordinate polari in modo da scrivere il punto $(a, b)$ nella forma $(a, b) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ dove $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e, per $(a, b) \neq (0, 0)$, $\theta$ è un angolo fra l'asse reale positivo e la semiretta per l'origine e $(a, b)$. Allora con la notazione di numero complesso, se $z = a + ib$, avremo la seguente *forma trigonometrica* per $z$:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Per $z \neq 0$ l'angolo $\theta$ è determinato a meno di multipli interi di $2\pi$; ogni tale angolo $\theta$ si dice *argomento* di $z$ e si scrive $\theta = \arg z$. In forma trigonometrica il prodotto di due numeri complessi ha una semplice interpretazione geometrica. Se $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $w = |w|(\cos \phi + i \sin \phi)$ allora da un calcolo immediato segue

$$zw = |z||w|(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)). \tag{1.1.10}$$

Dunque il prodotto di due numeri complessi è il numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti. In particolare da (1.1.10) segue che, a meno di multipli interi di $2\pi$, $\arg z^{-1} = -\arg z$. Dunque l'angolo orientato (determinato a meno di multipli interi di $2\pi$) fra due numeri complessi non nulli $z$ e $w$ è dato da

$$\angle(z, w) = \arg w - \arg z = \arg \frac{w}{z}. \tag{1.1.11}$$

Per evitare ambiguità in genere si fissa un intervallo di lunghezza $2\pi$ nel quale far variare l'argomento. Ad esempio nell'esercizio 8 sceglieremo l'intervallo $(-\pi, \pi]$. È molto utile usare la seguente notazione:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \tag{1.1.12}$$

Dato che la (1.1.10) implica che $e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$, la notazione (1.1.12) è coerente con le usuali proprietà dell'esponenziale. Nel prossimo capitolo daremo una giustificazione rigorosa della (1.1.12).

Per quanto riguarda potenze (intere positive) e radici di un numero complesso ricordiamo il seguente elementare

Teorema 1.1.1: *Siano $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi) = |z|e^{i\phi} \in \mathbb{C}$ e $n \geq 1$ un intero. Allora*

*(i)* $z^n = |z|^n(\cos n\phi + i \sin n\phi) = |z|^n e^{in\phi}$;

*(ii) l'equazione $z^n = 0$ ha soluzione unica $z = 0$ di molteplicità $n$; per $0 \neq w = |w|(\cos \theta + i \sin \theta) = |w|e^{i\theta}$, le soluzioni dell'equazione $z^n = w$ sono gli $n$ numeri complessi distinti*

$$z_0 = |w|^{1/n}(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0) = |w|^{1/n} e^{i\theta_0}$$
$$, \dots ,$$
$$z_{n-1} = |w|^{1/n}(\cos \theta_{n-1} + i \sin \theta_{n-1}) = |w|^{1/n} e^{i\theta_{n-1}}$$

*dove, per $j = 0, \dots, n-1$, si è posto $\theta_j = \frac{\theta + 2\pi j}{n}$.*

Infine $\mathbb{C}$ può ovviamente essere pensato sia come spazio vettoriale complesso di dimensione 1, ma anche visto come $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ e inteso come spazio vettoriale reale di dimensione 2. A questo proposito si osservi che mentre un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare è sempre $\mathbb{R}$-lineare, non è vero il viceversa. Vedremo che questo fatto giocherà un ruolo importante.

**Esercizi.**

**1.** Sia $M_2(\mathbb{R})$ l'anello delle matrici quadrate di ordine 2 considerato con le usuali operazioni di somma e di prodotto. Se $\varphi\colon \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ è definita da

$$\varphi(x+iy) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

dimostrare che $\mathcal{C} = \varphi(\mathbb{C})$ è un campo e che $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathcal{C}$ è un isomorfismo di campi.

**2.** Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C} |\ |z-2| + |z+2| = 5\},\ \ B = \{z \in \mathbb{C} |\, 0 < Re(iz) < 1\},$$
$$C = \{z \in \mathbb{C} |\, Re(z) + Im(z) < 1\},\ \ D = \{z \in \mathbb{C} |\ |z|^2 - 2iz + 2i\overline{z} + 1 < 0\}.$$

**3.** Per $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, disegnare l'insieme:

$$R = \{z \in \mathbb{C} |\ Im\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0\}.$$

**4.** Se $f(z) = z^2$ e

$$A = \{z \in \mathbb{C} |\, Re(z) = cost.\},\ \ B = \{z \in \mathbb{C} |\, Im(z) = cost.\},$$
$$C = \{z \in \mathbb{C} |\ \arg(z) = cost.\},\ \ D = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = cost.\},$$

determinare $f(A), f(B), f(C), f(D)$.

**5.** Se $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, determinare le immagini $f(\Gamma_r)$ mediante $f$ delle circonferenze $\Gamma_r = \{z \in \mathbb{C} ||z| = r\}$ al variare di $r > 0$.

**6.** Dimostrare che se $L\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare, allora $L$ è $\mathbb{R}$-lineare. Trovare un esempio che dimostri che non vale il viceversa.

**7.** Sia $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare e sia $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice di $T$ relativa alla base $\{1, i\}$ di $\mathbb{C}$. Trovare una condizione necessaria e sufficiente su $a, b, c, d$ affinchè $T$ sia $\mathbb{C}$-lineare.

**8.** Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dimostrare che se $\frac{z}{|z|} \neq -1$, esiste unico $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{z}{|z|} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2}.$$

Imponendo che $\arg z \in (-\pi, \pi]$ e scegliendo la determinazione di $\arctan t$ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, dimostrare che si ha per $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\arg z = \begin{cases} \pi \text{ se } \frac{z}{|z|} = -1 \\ 2\arctan t \text{ se } \frac{z}{|z|} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2} \end{cases} = \begin{cases} \pi \text{ se } \frac{z}{|z|} = -1 \\ 2\arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)+|z|}\right) \text{ se } \frac{z}{|z|} \neq -1. \end{cases} \tag{1.1.13}$$

**9.** Sia $w$ una radice $n$-esima dell'unità, ossia un numero complesso tale che tale che $w^n = 1$. Calcolare $1 + w + w^2 + \ldots + w^{n-1}$.

**10.** Per $n \in \mathbb{N}$, sia $G_n \subset S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z = 1\}$ l'insieme di delle radici $n$-esima dell'unità (si intende che $G_0 = \{0\}$). Si definiscano inoltre

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n \qquad \text{e} \qquad H = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} G_{2^m}.$$

Si dimostri che $G_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $G$ e $H$ sono sottogruppi del gruppo $S^1$.

## 1.2. Topologia di $\mathbb{C}$, limiti e funzioni continue.

In questo paragrafo richiamiamo alcune semplici nozioni topologiche per fissare le idee e qualche qualche utile notazione.

### 1.2.1 Topologia di $\mathbb{C}$

Su $\mathbb{C}$ si considera la topologia indotta dalla distanza definita da

$$d(z, w) = |z - w| \tag{1.2.1}$$

che, con l'identificazione di $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ illustrata nel paragrafo precedente, non è altro che la usuale topologia euclidea. In particolare un sottoinsieme $A \subset \mathbb{C}$ è un *aperto* se e solo se per ogni $z_0 \in A$ esiste $\epsilon > 0$ tale che se

$$\mathbb{D}(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z - z_0| < \epsilon\} \tag{1.2.2}$$

è il *disco* di centro $z_0$ e raggio $\epsilon$, allora $\mathbb{D}(z_0, \epsilon) \subset A$.

È immediato verificare dalla definizione che la famiglia degli aperti di $\mathbb{C}$ definiti in questo modo verifica gli assiomi di una topologia (esercizio!):

$(i)$ $\emptyset$ e $\mathbb{C}$ sono aperti,

$(ii)$ l'unione di un numero arbitrario di aperti è un aperto,

$(iii)$ l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto.

Un sottoinsieme $C \subset \mathbb{C}$ si dice *chiuso* se il suo complemento $\mathbb{C} \setminus C$ è aperto. È facile dimostrare che la famiglia degli insiemi chiusi gli usuali assiomi (esercizio!):

$(i)$ $\emptyset$ e $\mathbb{C}$ sono chiusi,

$(ii)$ l'unione di un numero finito di chiusi è un chiuso,

$(iii)$ l'intersezione di un arbitrario di chiusi è un chiuso.

Come d'uso, se $E \subset \mathbb{C}$ chiamiamo *chiusura* di $E$ l'insieme $\overline{E}$ intersezione di tutti i chiusi che contengono $E$. Un sottoinsieme $A \subset E$ si dice *denso* in $E$ se $\overline{A} = E$. Daremo per noto il fatto fondamentale che l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è denso in $\mathbb{R}$ e cui segue facilmente (esercizio!) che $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{C}$.

Per un sottoinsieme $E \subset \mathbb{C}$ chiamiamo *frontiera* di $E$ l'insieme $\partial E = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{C} \setminus E}$. Se $A \subset \mathbb{C}$ è un aperto allora si dimostra (esercizio!) che $\partial E = \overline{E} \setminus E$.

Sia $E \subset \mathbb{C}$ un sottoinsieme arbitrario. Allora la restrizione $d_E$ a $E$ della distanza euclidea di $\mathbb{C}$ è una distanza su $E$. La topologia su $E$ indotta dalla distanza $d_E$ ha per aperti (chiusi) esattamente le intersezioni di $E$ con gli aperti (chiusi)dell'ambiente $\mathbb{C}$. Tutte le volte che abbiamo la necessità di nozioni topologiche su un sottoinsieme $E \subset \mathbb{C}$, utilizzeremo questa struttura di sottospazio definita dalla distanza $d_E$.

### 1.2.2 Successioni e serie di numeri complessi

Se $z_n$ è una successione di numeri complessi, si dice che

$$\lim_{n \to \infty} z_n = l \in \mathbb{C}$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_0 > 0$ tale che se $n \geq n_0$ si ha $|z_n - l| < \epsilon$. In questo caso la successione $x_n$ si dice *convergente*. Inoltre si ha

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste $n_0 > 0$ tale che se $n \geq n_0$ si ha $|z_n| > M$. È facile dimostrare (esercizio!) che un sottoinsieme $C \subset \mathbb{C}$ è chiuso se e solo se contiene i limiti di tutte le successioni $\{z_n\} \subset C$ convergenti.

Un punto $a$ si dice *d'accumulazione* di $A \subset \mathbb{C}$ se per ogni $\epsilon > 0$ nel disco $\mathbb{D}(a, \epsilon)$ cadono punti di $A$ distinti da $a$. Se $a$ è d'accumulazione per $A$ allora si vede facilmente che per ogni $\epsilon > 0$ nel disco $\mathbb{D}(a, \epsilon)$ cadono infiniti punti di $A$ distinti da $a$. Un punto $a \in A$ che non è d'accumulazione per $A$ si dice *punto isolato* di $A$. Si può dimostrare (esercizio!) che un sottoinsieme $C$ è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti d'accumulazione. Inoltre è semplice convincersi (esercizio!) che se $a$ è un punto di d'accumulazione di $A \subset \mathbb{C}$, esiste una successione di punti $\{z_n\} \subset A$ tale che $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$. Infine queste considerazioni insieme all'osservazione fatta sopra che $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{C}$, implicano (esercizio!) che se $E \subset \mathbb{C}$ è un aperto e $a \in \overline{E}$, allora esiste una successione $\{z_n\} \subset E \cap \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ tale che $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$.

Molte importanti proprietà di $\mathbb{C}$ dipendono dal fatto che, con la distanza euclidea, è uno spazio metrico completo ossia ogni successione di Cauchy ammette limite in $\mathbb{C}$. In altre parole, come per successioni reali, il *criterio di Cauchy* caratterizza le successioni convergenti. Enunciamo e dimostriamo questo semplice fatto:

Teorema 1.2.1: *Una successione $z_n$ di numeri complessi è convergente se e solo se è una successione di Cauchy, ossia per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N = N_\epsilon$ tale che se $m, n > N$ allora $|z_m - z_n| < \epsilon$.*

*Dimostrazione*: Se $\lim_{n\to\infty} z_n = L \in \mathbb{C}$, sia $\epsilon > 0$ arbitrario. Allora esiste $N = N_\epsilon$ tale che se $k > N$ allora $|z_k - L| < \frac{\epsilon}{2}$. Dunque se $m, n > N$ si ha

$$|z_m - z_n| \leq |z_m - L| + |z_n - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

e quindi $z_n$ è una successione di Cauchy. Viceversa se $z_n$ è una successione di Cauchy e $a_n = Re(z_n)$ e $b_n = Im(z_n)$ allora $a_n$ e $b_n$ sono successioni reali di Cauchy dato che

$$|a_m - a_n| \leq |z_m - z_n|, \qquad |b_m - b_n| \leq |z_m - z_n|.$$

Dunque esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Ma allora $\lim_{n\to\infty} z_n = a + ib$ e quindi la successione $z_n$ è convergente. $\square$

Se $z_n$ è una successione di numeri complessi la *serie* $\sum_{i=0}^{\infty} z_n$ si dice *convergente* se la successione delle some parziali $s_N = \sum_{i=0}^{N} z_n$ converge a $S \in \mathbb{C}$. In questo caso $S$ si dice *somma* della serie e si scrive $S = \sum_{i=0}^{\infty} z_n$. Un'immediata applicazione del criterio di Cauchy prova (esercizio!) che la serie $\sum_{i=0}^{\infty} z_n$ converge se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N_\epsilon$ tale che, se $N > M > N_\epsilon$, allora

$$\left| \sum_{i=M}^{N} z_n \right| < \epsilon.$$

La *serie* $\sum_{i=0}^{\infty} z_n$ si dice *assolutamente convergente* se converge la serie $\sum_{i=0}^{\infty} |z_n|$. Dato che, se $N > M$ si ha

$$\left| \sum_{i=M}^{N} z_n \right| \leq \sum_{i=M}^{N} |z_n|,$$

allora segue dal criterio di Cauchy per le serie che una serie assolutamente convergente è convergente e

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |z_n|.$$

Di nuovo utilizzando il criterio di Cauchy, si dimostra immediatamente (esercizio!) che se esiste una serie convergente $\sum_{i=0}^{\infty} t_n$ di numeri reali non negativi $t_n \geq 0$, tale che $|z_n| \geq t_n$ per ogni $n \geq N_0$ per qualche $N_0$, allora la serie $\sum_{i=0}^{\infty} z_n$ converge assolutamente.

Esattamente come nel caso reale, si dimostra il *Teorema di riordino per serie assolutamente convergenti*:

Teorema 1.2.2: *Se la serie* $\sum_{i=0}^{\infty} z_n$ *è assolutamente convergente, allora per ogni funzione biettiva* $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *la serie* $\sum_{i=0}^{\infty} z_{\tau(n)}$ *è convergente e*

$$\sum_{i=0}^{\infty} z_{\tau(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} z_n.$$

*Dimostrazione*: Sia $S = \sum_{i=0}^{\infty} z_n$ e $s_n$ la succesione delle somme parziali della serie. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N_\epsilon$ tale che se $N \geq N_\epsilon$

$$|S - s_N| = \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{i=N_\epsilon+1}^{\infty} |z_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Per qualche insieme finito $F_\epsilon \subset \mathbb{N}$ si ha $\tau(F_\epsilon) = \{0, 1, \ldots, N_\epsilon\}$. Sia $M_\epsilon = \max F_\epsilon$. Necessariamente $M_\epsilon \geq N_\epsilon$ e per ogni $m \geq M_\epsilon$ si ha

$$\{0, 1, \ldots, N_\epsilon\} = \tau(F_\epsilon) \subset \tau(\{0, 1, \ldots, m\}).$$

Allora

$$\begin{aligned}
\left| S - \sum_{i=0}^{m} z_{\tau(n)} \right| &\leq \left| S - \sum_{n \in F_\epsilon} z_{\tau(n)} \right| + \left| \sum_{n \in \{0,1,\ldots,m\} \setminus F_\epsilon} z_{\tau(n)} \right| \\
&= \left| S - \sum_{k \in \tau(F_\epsilon)} z_k \right| + \left| \sum_{k \in \tau(\{0,1,\ldots,m\}) \setminus \tau(F_\epsilon)} z_k \right| \\
&\leq \left| S - \sum_{k=0}^{N_\epsilon} z_k \right| + \sum_{k \in \tau(\{0,1,\ldots,m\}) \setminus \tau(F_\epsilon)} |z_k| \\
&\leq 2 \sum_{i=N_\epsilon+1}^{\infty} |z_n| < \epsilon
\end{aligned}$$

e quindi la tesi segue. □

### 1.2.3 Limiti e continuità di funzioni complesse

Sia $A \subset \mathbb{C}$ e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione. La funzione $f$ si dice *continua nel punto* $z_0 \in A$ se per ogni aperto $V \subset \mathbb{C}$ con $f(z_0) \in V$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$f\left(\mathbb{D}(z_0, \delta) \cap A\right) \subset V.$$

La funzione $f$ si dice *continua* su $A$ se è continua in ogni punto di $A$. Si osservi che se $z_0$ è un punto isolato di $A$ allora ogni funzione è continua in $z_0$. Segue immediatamente che $f$ è continua su $A$ se e solo se per ogni aperto $V \subset \mathbb{C}$ l'insieme $f^{-1}(V)$ è l'intersezione di $A$ con un aperto di $\mathbb{C}$.

Sia $a \in A$ un punto d'accumulazione di $A$. Allora

$$\lim_{z \to a} f(z) = L \in \mathbb{C}$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $z \in (\mathbb{D}(a, \delta) \cap A) \setminus \{a\}$ allora $f(z) \in \mathbb{D}(L, \epsilon)$. Dunque che una funzione $f\colon A \to \mathbb{C}$ è continua su $A$ se e solo se per ogni punto di accumulazione $a \in A$ si ha

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a).$$

Diciamo invece che

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $z \in (\mathbb{D}(a, \delta) \cap A) \setminus \{a\}$ allora $|f(z)| > M$. Inoltre, se $A$ è un sottoinsieme illimitato, diremo che

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = L \in \mathbb{C}$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N$ tale che se $z \in A$ e $|z| > N$, allora $f(z) \in \mathbb{D}(L, \epsilon)$. Infine, se $A$ è un sottoinsieme illimitato, diremo che

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$$

se per ogni $M$ esiste $N$ tale che se $z \in A$ e $|z| > N$, allora $|f(z)| > M$.

Sia $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione. Sono unicamente determinate due funzioni $u\colon A \to \mathbb{R}$ e $v\colon A \to \mathbb{R}$, dette rispettivamente *parte reale* e parte immaginaria della funzione $f$ tali che $f(z) = u(z) + iv(z)$ per ogni $z \in A$. La funzione $f$ è continua se e solo se le funzioni $u$ e $v$ sono continue.

**Esempi** Le funzioni costanti sono continue. La funzione identica $f(z) = z$ è continua. La funzione coniugio $f(z) = \overline{z}$ è continua. Le funzioni $f(z) = Re(z)$ e $g(z) = Im(z)$ sono continue. La funzione $f(z) = |z|$ è continua.

A partire da funzioni continue, se ne possono costruire altre utilizzando la seguente immediata

Proposizione 1.2.3: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ e $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ due funzioni continue. Allora le funzioni $f + g$, $-f$ e $fg$ sono continue. Se $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in A$, allora la funzione $1/f$ è continua.*

### 1.2.4 Compattezza.

La nozione di compattezza è importante in molte occasioni. Sensa entrare nei dettagli, ricordiamo che in $\mathbb{C}$ questa nozione si esprime in diversi modi equivalenti che riassumiamo nel seguente:

Teorema 1.2.4: *Un sottoinsieme $K \subset \mathbb{C}$ si dice compatto se verifica una delle seguenti equivalenti proprietà:*

*(i) per ogni famiglia $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j\in J}$ di aperti di $\mathbb{C}$ tale che $K \subset \cup_{j\in J} A_j$, esiste una sottofamiglia finita $\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_n}\} \subset \mathcal{A}$ tale che $K \subset \cup_{k=1}^{n} A_{j_k}$;*

*(ii) ogni successione $x_n$ di punti di $K$ ha una sottosuccessione $x_{n_k}$ convergente a un punto di $K$;*

*(iii) $K$ è chiuso e limitato (ossia $K \subset \mathbb{D}(0, R)$ per qualche $R > 0$).*

Una proprietà molto importante anche se semplice da dimostrare, è il fatto che le funzioni continue trasformano compatti in compatti. Dato che i compatti di $\mathbb{R}$ sono proprio i sottoinsiemi chiusi e limitati – che dunque contengono il loro punti di massimo e di minimo – si ottiene di conseguenza il ben noto teorema di Weiestrass sull'esistenza di massimi e minimi per funzioni reali definite su un compatto. Riassumiamo tutto ciò nel seguente:

Teorema 1.2.5: *Se $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua e $K \subset A$, è compatto allora $f(K)$ è compatto. Se $f(K) \subset \mathbb{R}$ allora esistono punti di massimo e di minimo per $f$ in $K$ ossia $z_0, z_1 \in K$ tali che*

$$\min_{z\in K} f(z) = f(z_0) \qquad\qquad \max_{z\in K} f(z) = f(z_1).$$

### 1.2.5 Connessione e connessione per archi.

In molte questioni che studieremo giocherà un ruolo importante il fatto che gli insiemi su cui lavoreremo sono connessi. Ricordiamo che uno spazio topologico $X$ si dice *connesso* se non è unione di due sottoinsiemi aperti non vuoti. Si osserva immediatamente che questo equivale a richiedere che gli unici sottoinsiemi di $X$ simultaneamente aperti e chiusi, sono $\emptyset$ e $X$ stesso. Questa formulazione sarà spesso quella che useremo.

Una funzione $f\colon X \to \mathbb{C}$ si dice *localmente costante* se per ogni punto $x$ dello spazio topologico $X$ esiste un intorno $U$ tale che la restrizione $f_{|U}$ è costante. È un esercizio immediato verificare che le funzioni localmente costanti sono continue. In molte applicazioni risulta cruciale il fatto che le funzioni localmente costanti su un connesso sono costanti. Vale in realtà la seguente caratterizzazione:

Proposizione 1.2.6: *Uno spazio topologico è connesso se e solo se ogni funzione $f\colon X \to \mathbb{C}$ localmente costante è costante.*

*Dimostrazione*: Supponiamo che ogni funzione $f\colon X \to \mathbb{C}$ localmente costante è costante e sia $A \subset X$ non vuoto, aperto e chiuso. Sia $\chi_A$ la funzione caratteristica di $A$ definita da

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Allora $\chi_A$ è localmente costante dato che $A$ e $X \setminus A$ sono aperti. Dunque $\chi_A$ è costante. Dato che $A \neq \emptyset$ allora deve essere $\chi_A \equiv 1$. Dunque $A = X$ e quindi $X$ è connesso.

Se $X$ è connesso e $f\colon X \to \mathbb{C}$ è localmente costante, allora scelto arbitrariamente $x_0 \in X$, sia $A = f^{-1}(f(x_0))$. Ovviamente $x_0 \in A$ e quindi $A \neq \emptyset$. Dato che $f$ è localmente costante, $A$ è un aperto (perché? esercizio!). D'altro canto $A$ è un chiuso visto che è la l'immagine inversa del chiuso $\{x_0\}$ mediante la funzione continua $f$. Dunque deve essere $A = X$ ossia $f(x) = f(x_0)$ per ogni $x \in X$ e $f$ è costante. $\square$

Come conseguenza immediata della definizione segue che le funzioni continue trasformano connessi in connessi ossia se $X$ è uno spazio connesso e $f\colon X \to Y$ è continua, allora $f(X)$ è connesso (esercizio!).

Daremo per conosciuto un risultato più recondito ma cruciale: *i sottoinsiemi connessi (non vuoti) di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli intervalli (con o senza gli estremi, limitati e illimitati).*

Molto spesso utilizzeremo la seguente nozione. Uno spazio topologico $X$ si dice *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste un *cammino* che li congiunge ossia una funzione continua $\alpha\colon [a, b] \to X$ tale che $\alpha(a) = x$ e $\alpha(b) = y$. Si vede subito che se $X$ è connesso per archi, $f\colon X \to Y$ è continua, allora $f(X)$ è connesso per archi(esercizio!). È anche semplice verificare che la connessione per archi è una proprietà "più forte" della connessione:

PROPOSIZIONE 1.2.7: *Uno spazio topologico connesso per archi è connesso.*

*Dimostrazione*: Sia $X$ uno spazio connesso per archi e sia $\emptyset \neq A \subset X$ un sottoinsieme aperto e chiuso. Sia $x \in A$ e sia $y \in X$ arbitrario. Sia $\alpha\colon [a, b] \to X$ un cammino tale che $\alpha(a) = x$ e $\alpha(b) = y$. Allora $\alpha^{-1}(A)$ è un sottoinsieme aperto, chiuso e non vuoto dell'intervallo $[a, b]$. Necessariamente allora $\alpha^{-1}(A) = [a, b]$. Ma allora $y = \alpha(b) \in A$ e quindi, per l'arbitrarietà di $y$, $A = X$ e quidi $X$ è connesso. $\square$

In realtà le due nozioni di connessione coincidono per aperti di $\mathbb{C}$:

TEOREMA 1.2.8: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto non vuoto. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

*$(i)$ $A$ è connesso;*

*$(ii)$ $A$ è connesso per archi.*

*Dimostrazione*: Abbiamo già osservato che $(ii)$ implica $(i)$. Supponiamo dunque che $A$ sia connesso. Se $a \in A$ è un punto arbitrario, sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ definita da $f(z) = 1$ se esiste un cammino che congiunge $a$ a $z$, $f(z) = 0$ altrimenti. Ovviamente $f(a) = 1$. Sia $\mathbb{D}$ un qualunque disco contenuto in $A$. Dato che $\mathbb{D}$ è convesso per ogni coppia di punti di $\mathbb{D}$ il segmento che li congiunge è tutto contenuto in $\mathbb{D}$. Dunque esiste un cammino che congiunge $a$ con almeno un punto di $\mathbb{D}$ se e solo se si pò congiungere con un cammino $a$ con tutti i punti di $\mathbb{D}$. Dunque $f_{|\mathbb{D}} \equiv 1$ oppure $f_{|\mathbb{D}} \equiv 0$. Quindi per l'arbitrarità di $\mathbb{D} \subset A$, $f$ è localmente costante. Dato che $A$ è connesso e $f(a) = 1$ si ha $f \equiv 1$ e la tesi segue. $\square$

Si osservi che la dimostrazione usa solo il fatto che ogni punto di un aperto ha un intorno connesso per archi. Lo stesso argomento dunque prova che un connesso localmente connesso per archi è connesso per archi.

Concludiamo con una nomenclatura che si usa spesso. Per definizione un *dominio* $D \subset \mathbb{C}$ è un aperto connesso non vuoto di $\mathbb{C}$.

**Esercizi.**

**1.** Dimostrare tutte le affermazioni che non trovate qui di seguito ma che sono lasciate per esercizio nel paragrafo.

**2.** Dimostrare che se ogni punto di $E \subset \mathbb{C}$ è un punto d'accumulazione per $A \subset E$ allora ogni punto di $E$ è limite di una successione di punti di $A$ e $A$ è denso in $E$.

**3.** Dimostrare che per aperto $E \subset \mathbb{C}$ si ha $z \in \overline{E}$ se e solo se esiste una successione di punti di $E \subset \mathbb{C}$ che converge a $z$.

**4.** Dimostrare che ogni successione limitata di numeri complessi ammette una sottosuccessione convergente.

**5.** Dimostrare che se $a$ è punto di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{C}$, esiste una successione di punti di $A$ che converge a $a$.

**6.** Dimostrare che se $E \subset \mathbb{C}$ è un aperto e $a \in \overline{E}$, allora esiste una successione $\{z_n\} \subset E \cap \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ tale che $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

**7.** Dimostrare che $\mathcal{D} = \{m2^{-n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ è denso in $\mathbb{R}$ e che $\mathcal{D} + i\mathcal{D}$ è denso in $\mathbb{C}$.

**8.** Dimostrare che una funzione a valori complessi è continua se e solo se la sua parte reale e la sua parte immaginaria sono continue.

**9.** Dimostrare che i polinomi con coefficienti complessi della variabile $z$ o della variabile $\overline{z}$ sono funzioni continue su $\mathbb{C}$.

**10.** Stabilire per quali numeri reali $a, b, c$ il polinomio $ax^2 + 2bxy + cy^2$ (di due variabili reali) è

(a) la parte reale (b) la parte immaginaria

di un polinomio della variabile $z = x + iy$.

**11.** Se $p(z), q(z)$ sono polinomi in $z$, la funzione razionale $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ è continua su $\{z \in \mathbb{C} | q(z) \neq 0\}$.

**12.** Dimostrare che la funzione argomento $\arg\colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to (-\pi, \pi)$ definita da (1.1.13) è continua.

**13.** Stabilire per quali $z \neq 0$ si ha $\lim\limits_{n\to\infty} \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^n \in \mathbb{C}$.

**14.** Dimostrare che $\mathbb{C}$ è un campo topologico ossia che se su $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ si considera la topologia prodotto, le funzioni

$$s\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \text{ definita da } \ s(z, w) = z + w,$$

$$p\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \text{ definita da } \ p(z, w) = zw,$$

$$opp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \text{ definita da } \ opp(z) = -z,$$

$$inv\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \ \text{ definita da } \ inv(z) = z^{-1}$$

sono continue.

**15.** Dimostrare in almeno due modi che se $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua e $K \subset A$, è compatto, allora $f(K)$ è compatto.

**16.** Dimostrare che una funzione $f\colon A \to B \subset \mathbb{C}$ continua e suriettiva, e $E$ è denso in $A$, allora $f(E)$ è denso in $B$.

**17.** (Densità delle radici dell'unità in $S^1$) Si dimostri che i sottogruppi $G$ e $H$ definiti nell'esercizio 9 del paragrafo 1.1 sono densi in $S^1$ *(Consiglio: Si osservi che dato che $H \subset G$ basta dimostrare la densità di $H$. Si sfruttino anche gli esercizi* 7 *e* 16 *e il fatto che che la funzione $f(t) = e^{2\pi it}$* è *continua e suriettiva da $\mathbb{R}$ in $S^1$).*

**18.** Utilizzando la stessa idea della dimostrazione del Teorema 1.2.8 dimostrare che s $A \subset \mathbb{C}$ è un aperto connesso non vuoto allora per ogni coppia di punti $x, y \in A$ esiste un cammino poligonale (ossia unione di segmenti consecutivi) che congiunge $x$ e $y$.

## 1.3. La sfera di Riemann.

In molte considerazioni che faremo ci sarà utile dare un senso più preciso alla nozione di punto all'infinito per $\mathbb{C}$ che abbiamo dato in modo molto elementare parlando di limiti di funzioni complesse. Per avere avere una nozione corretta e geometricamente efficace dell'idea di "aggiungere" $\infty$ a $\mathbb{C}$ si usa l'idea topologica di compattificare $\mathbb{C}$ con l'aggiunta di un punto. Più precisamente consideriamo l'insieme $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ottenuto aggiungendo all'insieme dei numeri complessi un punto. Vogliamo definire una topologia su $\hat{\mathbb{C}}$ in modo che la topologia indotta su $\mathbb{C}$ sia quella euclidea e che $\mathbb{C}$ sia denso in $\hat{\mathbb{C}}$. Come è usuale, diremo che un insieme $\mathcal{V}_p$ è un *intorno* di $p \in \mathbb{C}$ se esiste $r > 0$ tale che $\mathbb{D}(p, r) \subset \mathcal{V}_p$. Diremo che un insieme $\mathcal{V}_\infty$ è un *intorno* di $\infty$ se esiste un compatto $K \subset \mathbb{C}$ tale che $\hat{\mathbb{C}} \setminus K \subset \mathcal{V}_\infty$. Sia $\mathcal{T}$ la famiglia di sottoinsiemi $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ tali che per ogni $p \in U$ ci sia un intorno di $p$ tutto contenuto in $U$

PROPOSIZIONE 1.3.1: *La famiglia $\mathcal{T}$ è una topologia per $\hat{\mathbb{C}}$ che induce su $\mathbb{C}$ l'usuale topologia euclidea e tale che $\mathbb{C}$ è denso in $\hat{\mathbb{C}}$. Inoltre gli aperti che contengono $\{\infty\}$ sono esattamente i sottoinsiemi di $\hat{\mathbb{C}}$ i cui complementi sono sottoinsiemi compatti di $\mathbb{C}$.*

*Dimostrazione*: Evidentemente l'insieme vuoto e $\hat{\mathbb{C}}$ sono in $\mathcal{T}$. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia arbitraria di elementi di $\mathcal{T}$ e sia $U = \cup_i U_i$. Allora se $p \in U$ allora $p \in U_i$ per qualche $i$ e quindi esiste un intorno $\mathcal{V}_p$ di $p$ con $\mathcal{V}_p \subset U_i \subset U$ e quindi $U \in \mathcal{T}$. Siano inoltre $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$ e $V = V_1 \cap V_2$. Se $p \in V \cap \mathbb{C}$, allora esistono intorni (euclidei!) di $p$ contenuti rispettivamente in $V_1$ e $V_2$. Dunque esistono $r_1, r_2 > 0$ tali che $\mathbb{D}(p, r_1) \subset V_1$ e $\mathbb{D}(p, r_2) \subset V_2$. Se $r = \min\{r_1, r_2\}$, allora $\mathbb{D}(p, r) \subset V$ e quindi $V$ contiene un intorno di $p$. Se $\infty \in V$, esistono intorni $\mathcal{V}_\infty^1$ e $\mathcal{V}_\infty^2$ di $\infty$ e compatti $K_1, K_2 \subset \mathbb{C}$ tali che per $j = 1, 2$ si ha

$$\mathcal{V}_\infty^j \subset V_j \qquad \text{e} \qquad \hat{\mathbb{C}} \setminus K^j \subset \mathcal{V}_\infty^j.$$

Sia $\mathcal{V}_\infty = \mathcal{V}_\infty^1 \cap \mathcal{V}_\infty^2$ e $K = K^1 \cup K^2$. Allora $\mathcal{V}_\infty$ è un intorno di infinito dato che $K$ è compatto e $\hat{\mathbb{C}} \setminus K \subset \mathcal{V}_\infty$. Inoltre $\mathcal{V}_\infty \subset V = V_1 \cap V_2$. Dunque $V \in \mathcal{T}$ e $\mathcal{T}$ è una topologia. Sia $V$ un aperto di $\hat{\mathbb{C}}$ con $\infty \in V$. Esiste allora un compatto $K$ in $\mathbb{C}$ e un intorno di $\infty$ con $\mathcal{V}_\infty \subset V$ e $\hat{\mathbb{C}} \setminus K \subset \mathcal{V}_\infty \subset V$. Dunque $\hat{\mathbb{C}} \setminus V$ è un chiuso di $\mathbb{C}$ tale che $\hat{\mathbb{C}} \setminus V \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{V}_\infty \subset K$. Quindi $\hat{\mathbb{C}} \setminus V$ è anche limitato e, pertanto, compatto. Per costruzione $\mathcal{T}$ induce su $\mathbb{C}$ l'usuale topologia euclidea ed è immediato verificare che la successione $z_n = n$ converge in questa topologia a $\infty$ e quindi $\mathbb{C}$ è denso in $\hat{\mathbb{C}}$. $\square$

Lo spazio topologico $\hat{\mathbb{C}}$ che ha per aperti gli elementi di $\mathcal{T}$, viene chiamato *sfera di Riemann*. In Topologia Generale $\hat{\mathbb{C}}$ viene chiamato la *compattificazione di Alexandroff* di $\mathbb{C}$. Invece di riferirci alla teoria generale, riassumiamo qui di seguito le proprietà topologiche di $\hat{\mathbb{C}}$ che ci interessano.

PROPOSIZIONE 1.3.2: *La sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ è uno spazio topologico compatto e connesso omeomorfo alla sfera bidimensionale $S^2$.*

*Dimostrazione*: Tutto l'enunciato sarà dimostrato se proveremo che $\hat{\mathbb{C}}$ è omeomorfo alla sfera bidimensionale unitaria

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Sia $N = (0, 0, 1)$ il "polo nord" di $S^2$. La proiezione stereografica $\Pi\colon S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ dal punto $N$, è definita da

$$\Pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}. \tag{1.3.1}$$

Se si identifica $\mathbb{C}$ con il piano $x_3 = 0$ mediante $x_1 + ix_2 \leftrightarrow (x_1, x_2, 0)$, allora $\Pi$ è l'applicazione che fa corrispondere a ciascun punto $P \in S^2 \setminus \{N\}$ l'intersezione con il piano $\{x_3 = 0\} \equiv \mathbb{C}$ della retta passante per i punti $N$ e $P$. Dalla definizione segue che $\Pi$ è continua dato che le sue componenti sono restrizioni di funzioni continue in un intorno aperto di $S^2 \setminus \{N\}$. Inoltre $\Pi$ è biettiva con inversa continua data

$$\Psi(z) = \frac{(2Re(z), 2Im(z), |z|^2 - 1)}{|z|^2 + 1}. \tag{1.3.2}$$

Dunque $\Pi\colon S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ è un omeomorfismo. Estendiamo $\Pi$ e $\Psi$ a applicazioni $\hat{\Pi}\colon S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ e $\hat{\Psi}\colon \hat{\mathbb{C}} \to S^2$ rispettivamente in questo modo:

$$\hat{\Pi}_{|S^2\setminus\{N\}} = \Pi; \;\; \hat{\Pi}(N) = \infty; \qquad \hat{\Psi}_{|\mathbb{C}} = \Psi; \;\; \hat{\Psi}(\infty) = N.$$

Allora $\hat{\Pi}$ è biettiva con inversa $\hat{\Psi}$. Inoltre $\hat{\Pi}$ e $\hat{\Psi}$ sono continue e quindi $\hat{\Pi}$ è un omeomorfismo fra $S^2$ e $\hat{\mathbb{C}}$. Per quanto riguarda $\hat{\Pi}$ occorre controllare solo la continuità in $N$. Sia $U$ un aperto di $\hat{\mathbb{C}}$ con $\hat{\Pi}(N) = \infty \in U$. Esiste $R > 0$ tale che $V_R = \{z \in \mathbb{C} |\; |z| > R\} \subset U$. Un calcolo immediato dimostra che

$$C = \hat{\Pi}^{-1}(V_R) = S^2 \cap \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 > \frac{R^2 - 1}{R^2 + 1} \right\}$$

che è un aperto di $S^2$ contenente $N$. Allora $\hat{\Pi}(C) \subset V_R \subset U$ e quindi $\hat{\Pi}$ è continua in $N$. D'altra parte ogni aperto $V$ di $S^2$ che contiene $N = \hat{\Psi}(\infty)$ contiene per qualche $0 < t < 1$ la calotta

$$C_t = S^2 \cap \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 > t \right\}.$$

Dato che

$$U = \hat{\Psi}^{-1}(C_t) = \left\{ z \in \mathbb{C} |\; |z| > \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \right\} \cup \{\infty\}$$

è un aperto di $\hat{\mathbb{C}}$ contenente $\infty$ e $\hat{\Psi}(U) = C_t \subset V$, segue che $\Psi$ è continua in $\infty$. □

Un utile esercizio per capire la topologia di $\hat{\mathbb{C}}$ è dimostrare il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 1.3.3: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto, $a \in A$ e $f\colon A \setminus \{a\} \to \mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$ una funzione. Allora* $\lim\limits_{z \to a} |f(z)| = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$

*Dimostrazione*: Esercizio!! □

Vi è un altro modo per descrivere la sfera di Riemann che è molto importante tener presente. In effetti la sfera di Riemann non è altro che una presentazione della retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1$ di cui ora ricordiamo rapidamente la definizione. Si consideri su

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 \neq 0\},$$

che si considera con la topologia di sottospazio di $\mathbb{C}^2$, la relazione di equivalenza $\sim$ definita da

$$(z,w) \sim (u,v) \Leftrightarrow (z,w) = \lambda(u,v) \text{ for some } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

La retta proiettiva è lo spazio quoziente $\mathbb{P}^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\})_{/\sim}$ considerato con la topologia quoziente. Dunque $\mathbb{P}^1$ non è altro che l'insieme delle rette per l'origine di $\mathbb{C}^2$. Se $\pi: \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{P}^1$ è l'applicazione di passaggio al quoziente, la topologia di $\mathbb{P}^1$ è esattamente la topologia più grande tale che rende $\pi$ continua e si ha che per ogni spazio topologico $Y$ un'applicazione $f: \mathbb{P}^1 \to Y$ è continua se e solo se $\pi \circ f: \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \to Y$ è continua. Per denotare il punto $\pi((z,w))$ di $\mathbb{P}^1$, individuata da $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ si usa la notazione in coordinate omogenee: $\pi((z,w)) = [z : w]$. Si vede allora subito (Esercizio!) che l'applicazione $\phi: \mathbb{P}^1 \to \hat{\mathbb{C}}$ definita da

$$\phi([z:w]) = \begin{cases} \frac{z}{w} & \text{se } w \neq 0 \\ \\ \infty & \text{se } w = 0 \end{cases} \tag{1.3.3}$$

è continua, biettiva con inversa continua $\psi: \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1$ definita da

$$\psi(\zeta) = [\zeta : 1] \;\; \text{se } \zeta \neq \infty \qquad \text{e} \qquad \psi(\infty) = [1:0], \tag{1.3.4}$$

e quindi $\mathbb{P}^1$ e $\hat{\mathbb{C}}$ sono omeomorfi.

**Esercizi.**

**1.** Dimostrare la Proposizione 1.3.3.

**2.** Sia $\Psi$ l'applicazione definita da (1.3.2)e $\| \;\|$ la norma euclidea di $\mathbb{R}^3$. Se $d: \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}_+$ è definita per $z, w \in \mathbb{C}$ da

$$d(z,\infty) = d(\infty, z) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}} = \|\Psi(z) - \Psi(\infty)\|,$$

$$d(z,w) = d(w,z) = \frac{2|z-w|}{[(1+|z|^2)(1+|w|^2)]^{\frac{1}{2}}} = \|\Psi(z) - \Psi(w)\|,$$

dimostrare che $d$ è una distanza su $\hat{\mathbb{C}}$ che induce la topologia che abbiamo definito sulla sfera di Riemann.

**3.** Siano $\Pi$ e $\Psi$ le applicazioni definite rispettivamente da (1.3.1) e da (1.3.2). Dimostrare che se definiamo $f(z) = -1/\overline{z}$ e $g(z) = 1/z$ per $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, allora $\Psi \circ f \circ \Pi(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, -x_3)$ e $\Psi \circ g \circ \Pi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, -x_3)$

**4.** Dimostrare che l'applicazione definita da (1.3.3) è continua, biettiva con inversa continua $\psi$ definita da (1.3.4).

## 1.4. Trasformazioni di Möbius e circonferenze.

Siano $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tali che $ad - bc \neq 0$. L'applicazione definita per $z \neq -d/c$ da

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{1.4.1}$$

si dice *trasformazione di Möbius* o *trasformazione lineare fratta*. Una traformazione di Möbius definita da (1.4.1) si estende a una applicazione contina (dimostrazione per esercizio!) della sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ in sé ponendo

$$T(-d/c) = \infty \text{ e } T(\infty) = a/c \text{ se } c \neq 0$$

e $T(\infty) = \infty$ se $c = 0$. Denoteremo con $\mathcal{M}$ l'insieme di tutte le trasformazioni di Möbius. È facile provare che se $T \in \mathcal{M}$ è definita da (1.4.1), allora $T$, come applicazione dalla sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ in sé, è invertibile con inversa definita da

$$T^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}$$

Dunque, dato che l'inversa di una trasformazione di Möbius è ancora una trasformazione di Möbius abbiamo immediatamente la seguente

Proposizione 1.4.1: *L'insieme $\mathcal{M}$ delle trasformazioni di 1.4.1, considerato con l'operazione definita dalla composizione, è un gruppo di omeomorfismi della sfera di Riemann.*

*Dimostrazione*: Esercizio! □

Si consideri l'applicazione $\Phi\colon GL(2, \mathbb{C}) \to \mathcal{M}$ definita da

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = T$$

dove $T$ è definita da (1.4.1). Si vede subito che $\Phi$ è un omomorfismo suriettivo e che

$$Ker\Phi = \mathcal{S} = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) | A = \lambda I_2,\ \ \lambda \in \mathbb{C}^*\}$$

dove $I_2$ è la matrice identità di ordine 2. Si può dunque concludere il seguente risultato la cui dimostrazione precisa è lasciata al lettore:

Proposizione 1.4.2: *Il gruppo $\mathcal{M}$ delle trasformazioni di Möbius è isomorfo al gruppo $PGL(2, \mathbb{C}) = GL(2, \mathbb{C})/\mathcal{S}$.*

La proposizione non sorprende affatto se si considera la sfera si Riemann come una realizzazione della retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1$. Si vede subito che se $\phi\colon \mathbb{P}^1 \to \hat{\mathbb{C}}$ e $\psi\colon \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1$ sono le applicazioni definite rispettivamente da (1.3.3) e (1.3.4), allora data $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$, se $T \in \mathcal{M}$ è la trasformazione di Möbius definita da $A$, allora l'applicazione $\psi \circ T \circ \phi$ è la proiettività definita dalla matrice $A$.

Definizione 1.4.1: Una trasformazione $T \in \mathcal{M}$ si dice *traslazione* se è definita per $z \in \mathbb{C}$ da $T(z) = z + b$ per qualche $b \in \mathbb{C}$. Una trasformazione $T \in \mathcal{M}$ si dice *dilatazione* se è definita per $z \in \mathbb{C}$ da $T(z) = az$ per qualche $a \in \mathbb{C}^*$. Infine la trasformazione $T \in \mathcal{M}$ definita per $z \in \mathbb{C}$ da $T(z) = \frac{1}{z}$ si dice *inversione*.

Proposizione 1.4.3: *Il gruppo delle trasformazioni di Möbius è generato da traslazioni, dilatazioni e dall'inversione.*

*Dimostrazione*: Sia $T \in \mathcal{M}$ definita per $z \in \mathbb{C}$ da

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Se $c = 0$ allora

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

e quindi $T$ è la composizione di una dilatazione e di una traslazione. Supponiamo che $c \neq 0$. Dato che

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2z+cd} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{z+\frac{d}{c}},$$

se $T_1, T_2, T_3, T_4 \in \mathcal{M}$ sono definite per $z \in \mathbb{C}$ rispettivamente da

$$T_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad T_2(z) = \frac{1}{z}, \quad T_3(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z, \quad T_4(z) = z + \frac{a}{c},$$

si ha allora $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ e la tesi segue. □

Prima di illustrare una fondamentale proprietà geometrica delle trasformazioni di Möbius, dobbiamo dare una descrizione unitaria per rette e circonferenze di $\mathbb{C}$.

Proposizione 1.4.4: *Un sottoinsieme $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ è una retta o una circonferenza se e solo se i punti $z \in \mathcal{C}$ verificano una equazione del tipo*

$$\alpha|z|^2 + cz + \overline{cz} + \delta = 0 \tag{1.4.2}$$

*dove $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{C}$ sono tali che $|c|^2 > \alpha\delta$. Se in (1.4.2) $\alpha = 0$ allora $\mathcal{C}$ è una retta, se $\alpha \neq 0$ allora $\mathcal{C}$ è una circonferenza di centro $-\frac{\overline{c}}{\alpha}$ e raggio $\sqrt{\frac{|c|^2-\alpha\delta}{\alpha^2}}$.*

*Dimostrazione*: Un sottoinsieme $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ è una retta se e solo se i suoi punti $z = x+iy$ verificano una equazione del tipo

$$ax + by + \delta = 0 \tag{1.4.3}$$

con $a, b, \delta \in \mathbb{R}$ e $(a,b) \neq (0,0)$. Dunque se $c = \frac{1}{2}(a - ib)$, allora (1.4.3) equivale all'equazione

$$cz + \overline{cz} + \delta = 0$$

e quindi l'asserto è dimostrato nel caso $\mathcal{C}$ sia una retta visto che in questo caso $\alpha = 0$ e $|c|^2 > 0 = \alpha\delta$. Sia invece $\mathcal{C}$ una circonferenza di centro $\gamma \in \mathbb{C}$ e raggio $r > 0$. Allora $z \in \mathcal{C}$ se e solo se soddisfa l'equazione

$$\alpha\left(|z-\gamma|^2 - r^2\right) = 0 \tag{1.4.4}$$

dove $\alpha$ è un numero reale non nullo. Dunque $z \in \mathcal{C}$ se e solo se verifica

$$\alpha|z|^2 - \alpha\overline{\gamma}z - \alpha\gamma\overline{z} + \alpha(|\gamma|^2 - r^2) = 0. \tag{1.4.5}$$

Posto $\delta = \alpha(|\gamma|^2 - r^2)$ e $c = -\alpha\overline{\gamma}$, si vede che (1.4.5) equivale a (1.4.2) nel caso $\alpha \neq 0$. Il resto della tesi segue da facili verifiche dirette. □

La Proposizione (1.4.4) illustra in modo "quantitativo" come si possa intendere le rette come deformazione di circonferenze e precisamente come limite di circonferenze di raggio tendente a infinito. Infatti facendo tendere $\alpha \neq 0$ a 0 nell'equazione (1.4.2), il raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ definita da (1.4.2) tende a $\infty$ e l'equazione di $\mathcal{C}$ degenera nell'equazione di una retta. Questo tipo di ragionamento si rilegge efficacemente in $\hat{\mathbb{C}}$ dato che in questo caso le rette vengono compattificate con l'aggiunta del punto all'infinito e la loro compattificazione è omeomorfa a una circonferenza. Per questo motivo nel resto di questo paragrafo ci riferiremo a rette e circonferenze con la dizione *circonferenze estese*.

Riassumiamo alcune delle proprietà delle trasformazioni di Möbius riguardanti le circonferenze nel seguente

TEOREMA 1.4.5: *Sia $T \in \mathcal{M}$. Allora $T$ trasforma circonferenze estese in circonferenze estese. Inoltre siano $\Omega_1, \Omega_2 \subset \hat{\mathbb{C}}$ aperti tali che $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ sono circonferenze estese. Allora esiste $T \in \mathcal{M}$ tale che $T(\partial\Omega_1) = \partial\Omega_2$ e $T(\Omega_1) = \Omega_2$.*

*Dimostrazione*: È semplice verificare che se $T \in \mathcal{M}$ è una traslazione, una dilatazione o l'inversione, i punti che appartengono all'immagine secondo $T$ di una circonferenza estesa definita da un'equazione (1.4.2) soddisfano un'equazione dello stesso tipo e quindi $T$ trasforma circonferenze estese in circonferenze estese. Se $T \in \mathcal{M}$ è arbitraria, si giunge alla stessa conclusione grazie alla Proposizione 1.4.3.

Siano $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ punti distinti. Si definisca $T_{z_1z_2z_3} \in \mathcal{M}$ ponendo per $z \in \mathbb{C}$:

$$T_{z_1z_2z_3}(z) = \begin{cases} \frac{z-z_2}{z-z_3} : \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3} & \text{se } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, \\ \frac{z-z_2}{z-z_3} & \text{se } z_1 = \infty, \\ \frac{z_1-z_3}{z-z_3} & \text{se } z_2 = \infty, \\ \frac{z-z_2}{z_1-z_2} & \text{se } z_3 = \infty. \end{cases}$$

Allora $T_{z_1z_2z_3}(z_1) = 1$, $T_{z_1z_2z_3}(z_2) = 0$, $T_{z_1z_2z_3}(z_3) = \infty$. Siano $z_1, z_2, z_3 \in \partial\Omega_1$ e $w_1, w_2, w_3 \in \partial\Omega_2$ terne di punti distinti. Allora, se si pone $T_1 = T_{z_1z_2z_3}$, $T_2 = T_{w_1w_2w_3}$, dato che $T_1$ e $T_2$ trasformano circonferenze estese in circonferenze estese e che per tre punti distinti passa una unica circonferenza estesa, allora per $k = 1, 2$ si ha $T_k(\partial\Omega_k) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Siano $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} | Im z > 0\}$ e $\mathbb{H}^- = \{z \in \mathbb{C} | Im z < 0\}$. Allora $\hat{\mathbb{C}}$ si decompone nelle unioni disgiunte $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{H}^+ \cup \mathbb{H}^- \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e, per $k = 1, 2$, in $\hat{\mathbb{C}} = \Omega_k \cup (\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}_k) \cup \partial\Omega_k$. Dato che $T_1, T_2$ sono omeomorfismi di $\hat{\mathbb{C}}$ è quindi verificata una delle seguenti coppie di uguaglianze:

$$T_1(\Omega_1) = \mathbb{H}^+ \text{ e } T_2(\Omega_2) = \mathbb{H}^+ \tag{1.4.6}$$

$$T_1(\Omega_1) = \mathbb{H}^- \text{ e } T_2(\Omega_2) = \mathbb{H}^- \tag{1.4.7}$$

$$T_1(\Omega_1) = \mathbb{H}^+ \text{ e } T_2(\Omega_2) = \mathbb{H}^- \tag{1.4.8}$$

$$T_1(\Omega_1) = \mathbb{H}^- \text{ e } T_2(\Omega_2) = \mathbb{H}^+ \tag{1.4.9}$$

Se vale la (1.4.6) oppure la (1.4.7), si ponga $T = T_2^{-1} \circ T_1$; se vale la (1.4.8) oppure la (1.4.9), si ponga $T = T_2^{-1} \circ (-T_1)$. In ogni caso $T \in \mathcal{M}$ è la trasformazione cercata. □

**Esercizi.**

**1.** Dimostrare che ogni trasformazione di Moëbius è un omeomorfismo e la Proposizione 1.4.1.

**2.** Dimostrare la Proposizione 1.4.2.

**3.** Sia $C$ la circonferenza nello spazio ottenuta intersecando il piano di equazione $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = b$ con la sfera unitaria $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1\}$. Utilizzando la (1.3.2), dimostrare che l'immagine mediante la proiezione stereografica di $C$ è la circonferenza estesa di equazione $\alpha|z|^2 + cz + \overline{cz} + \delta = 0$ dove $\alpha = a_3 - b$, $c = a_1 - ia_2$ e $\delta = -(a_3 + b)$. Concludere in particolare che le rette di $\mathbb{C}$ sono esattamente le immagini delle circonferenze di $S^2$ che passano per il punto $N = (0, 0, 1)$.

**4.** Trovare $T \in \mathcal{M}$ che trasforma il disco $\Delta = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ nel semipiano superiore $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} | Imz > 0\}$.

**5.** Sia $F(z) = \frac{z-i}{z+i}$ e $U = \{z \in \mathbb{C} \mid Rez > 0, Imz > 0\}$. Determinare (e disegnare) $F(U)$.

**6.** Se $T \in \mathcal{M}$ è definita da $T(z) = \frac{z-2}{z+2}$, trovare centro e raggio dell'immagine mediante $T$ della circonferenza $\{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$