CAPITOLO 7

Funzioni meromorfe e Automorfismi

7.1. Superfici di Riemann.

Abbiamo già osservato che un'immediata conseguenza della costruzione della sfera di Riemann è la seguente proprietà delle funzioni meromorfe:

PROPOSIZIONE 7.1.1: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto, f una funzione meromorfa su A e $E \subset A$ l'insieme dei poli di f. Si estenda f lungo E a un'applicazione $\hat{f}: A \to \hat{\mathbb{C}}$ ponendo $\hat{f}_{A \setminus E} = f$, e*

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} \lim\limits_{z \to a} f(z) & se\, ord_a(f) = 0 \\ \infty & se\, ord_a(f) > 0. \end{cases}$$

La funzione $\hat{f}$ è continua.

In effetti è naturale aspettarsi che con una nozione di "olomorfia" appropriata per funzioni a valori in $\hat{\mathbb{C}}$ le funzioni meromorfe, estese come in Proposizione 7.1.1, siano in effetti "olomorfe". Il modo più naturale per fare questo è quello di mettersi nel contesto generale delle superfici di Riemann.

Cominciamo con qualche definizione.

DEFINIZIONE 7.1.1: Una *superficie topologica* è uno spazio topologico connesso M di Hausdorff con topologia a base numerabile tale che ogni punto $a \in M$ ha un intorno aperto omeomorfo a un aperto di $\mathbb{C}$.

OSSERVAZIONE: Ogni spazio metrico separabile (ossia che ammette un sottoinsieme numerabile denso) è di Hausdorff con topologia a base numerabile. Viceversa si dimostra che una superficie topologica ha sempre topologia metrizzabile, ossia indotta da una distanza.

DEFINIZIONE 7.1.2: Una *carta complessa* di M è un omeomorfismo $F: U \to V$ dove U è un aperto di M e V è un aperto di $\mathbb{C}$. Due carte complesse $F_i: U_i \to V_i$, per $i = 1, 2$, di M, si dicono *olomorficamente compatibili* se $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ oppure, nel caso $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, se la funzione di transizione

$$F_2 \circ F_1^{-1}: F_1(U_1 \cap U_2) \to F_2(U_1 \cap U_2)$$

è un biolomorfismo. Un *atlante complesso* di una superficie topologica M è una collezione di carte complesse $\mathcal{U} = \{F_i : U_i \to V_i\}_{i \in I}$ tali che:

(i) $\{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di M (ossia $M = \cup_i U_i$);

(ii) F_i e F_j sono olomorficamente compatibili per $i, j \in I$.

Due atlanti complessi $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ su una superficie topologica si dicono *equivalenti* se ogni carta F di $\mathcal{U}$ è olomorficamente compatibile con ogni carta di $\mathcal{U}'$.

OSSERVAZIONI:

(i) Se $F : U \to V$ è una carta complessa di una superficie topologica M e $U' \subset U$, allora $F_{U'} : U' \to V' = F(U')$ è una carta complessa olomorficamente compatibile con $F : U \to V$.

(ii) Dato che la composizione di funzioni bilolomorfe è un biolomorfismo, si vede subito che l'equivalenza fra strutture complesse è una relazione di equivalenza.

(iii) Nella classe di equivalenza di un atlante complesso $\mathcal{U}$ esiste un unico atlante massimale $\mathcal{U}^*$. L'atlante massimale $\mathcal{U}^*$ nella classe di equivalenza di $\mathcal{U}$ è costituito da tutte le carte compatibili col carte di $\mathcal{U}$.

DEFINIZIONE 7.1.3: Una *struttura complessa* su una superficie topologica M è una classe di equivalenza Σ di atlanti complessi di M. Una *superficie di Riemann* (o *varietà complessa di dimensione* 1) è una superficie topologica M su cui è definita una struttura complessa Σ.

CONVENZIONE: Se la struttura complessa Σ su una superficie di Riemann M è definita dall'atlante complesso $\mathcal{U}$, una carta complessa di Σ è una carta dell'atlante massimale $\mathcal{U}^*$ nella classe di equivalenza Σ, ossia una carta complessa compatibile con tutte le carte di $\mathcal{U}$.

ESEMPIO 1. $\mathbb{C}$ è una superficie di Riemann con struttura complessa definita dall'atlante la cui sola carta complessa è l'identità: $Id : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

ESEMPIO 2. Se M è una superficie di Riemann e $N \subset M$ è un aperto connesso, allora N, la struttura complessa definita dall'atlante di tutte le carte di M con dominio contenuto in N definisce una struttura complessa su N. Con questa struttura N è una superficie di Riemann. Ogni aperto connesso di $\mathbb{C}$ è dunque una superficie di Riemann.

ESEMPIO 3. La sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ è una superficie di Riemann con la struttura complessa definita dall'atlante complesso formato dalle due carte

$$F_1 : \mathbb{C} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \to \mathbb{C} \ \text{ e } \ F_2 : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

dove si definiscono F_1 e F_2 mediante

$$F_1(z) = z \qquad \text{e} \qquad F_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \text{ se } z \neq \infty \\ 0 \text{ se } z = \infty. \end{cases} \tag{7.1.1}$$

Si osservi che le applicazioni $F_1 \circ F_2^{-1}$, $F_2 \circ F_1^{-1}$ da $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in sé sono uguali e si ha $F_1(z) = 1/z = F_2(z)$ e sono dunque biolomorfismi.

ESEMPIO 4. Sia $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa su un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Il *grafico di* f definito da $\Gamma_f = \{(z,w) \in A \times \mathbb{C} \mid w = f(z)\}$ è una superficie di Riemann. L'atlante complesso di Γ_f è formato dalla carta $\pi\colon \Gamma_f \to A$ dove π è la proiezione sulla prima coordinata: $\pi(z,w) = z$. Più in generale si possono definire superfici di Riemann definite come luogo dove si annulla una funzione di due variabili complesse. Useremo queste notazioni. Se $B \subset \mathbb{C}^2$ è un aperto e $F\colon B \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1, denotiamo

$$Z_F = \{(z,w) \in B \mid F(z,w) = 0\}$$

il luogo dei punti dove si annulla F. Sotto opportune ipotesi Z_F è una superficie di Riemann. Per illustrare questo fatto, abbiamo bisogno della seguente versione olomorfa del teorema delle funzioni implicite:

TEOREMA 7.1.2: *Sia $B \subset \mathbb{C}^2$ un aperto e $F\colon B \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1. Supponiamo che per ogni $(z_0, w_0) \in B$ esistano aperti $A_{z_0} \subset \mathbb{C}$ contenente z e $A_{w_0} \subset \mathbb{C}$ contente w_0 tali che $A_{z_0} \times A_{w_0} \subset B$ e che*

$$\begin{aligned} F(\cdot, w)\colon A_{z_0} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto F(z,w) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} F(z, \cdot)\colon A_{z} &\to \mathbb{C} \\ w &\mapsto F(z,w) \end{aligned}$$

sono funzioni olomorfe rispettivamente per ogni $w \in A_{w_0}$ e $z \in A_{z_0}$. Allora:

(i) Se per $(z_0, w_0) \in Z_F$ la funzione $F_w = \frac{\partial F}{\partial w}(z, \cdot)$ non si annulla in (z_0, w_0), allora esistono un disco $\mathbb{D}_{z_0}$ centrato in z_0, un disco $\mathbb{D}_{w_0}$ centrato in w_0 e una funzione olomorfa $\phi\colon \mathbb{D}_{z_0} \to \mathbb{D}_{w_0}$ tale che $\phi(z_0) = w_0$ e

$$Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0}) = \{(z, \phi(z)) \mid z \in \mathbb{D}_{z_0}\}.$$

(ii) Se per $(z_0, w_0) \in Z_F$ la funzione $F_z = \frac{\partial F}{\partial z}(\cdot, w)$ non si annulla in (z_0, w_0), allora esistono un disco $\mathbb{D}_{z_0}$ centrato in z_0, un disco $\mathbb{D}_{w_0}$ centrato in w_0 e una funzione olomorfa $\psi\colon \mathbb{D}_{w_0} \to \mathbb{D}_{z_0}$ tale che $\psi(w_0) = z_0$ e

$$Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0}) = \{(\psi(w), w) \mid w \in \mathbb{D}_{w_0}\}.$$

Sia dunque $F\colon B \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1 su un aperto $B \subset \mathbb{C}^2$ tale che fissata una delle due variabili, F sia funzione olomorfa dell'altra nell'intorno di ogni punto. Supponiamo inoltre, con le notazioni del Teorema 7.1.2, che per ogni $(z_0, w_0) \in Z_F$ si abbia o $F_z(z_0, w_0) \neq 0$ oppure $F_w(z_0, w_0) \neq 0$. Allora Z_F è una superficie di Riemann. Un atlante si può definire usando il Teorema 7.1.2. Sia $(z_0, w_0) \in Z_F$ tale che $F_w(z_0, w_0) \neq 0$, allora esistono dischi $\mathbb{D}_{z_0}$ centrato in z_0, $\mathbb{D}_{w_0}$ centrato in w_0 e una funzione olomorfa $\phi\colon \mathbb{D}_{z_0} \to \mathbb{D}_{w_0}$ tale che $Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0})$ sia il grafico della funzione ϕ. Per punti di questo tipo definiamo una carta $f\colon U = Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0}) \to \mathbb{D}_{z_0}$ dove f è la proiezione sulla prima coordinata: $f(z, \phi(z)) = z$. In modo simmetrico per un punto punto $(z_1, w_1) \in Z_F$ tale che $F_z(z_1, w_1) \neq 0$, allora esistono dischi $\mathbb{D}_{z_1}$ centrato in z_1, $\mathbb{D}_{w_1}$ centrato in w_1 e una funzione olomorfa $\phi\colon \mathbb{D}_{w_1} \to \mathbb{D}_{z_1}$ tale che $Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_1} \times \mathbb{D}_{w_1})$ sia il grafico della funzione ψ. Per punti di questo tipo definiamo una carta $g\colon V = Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_1} \times \mathbb{D}_{w_1}) \to \mathbb{D}_{w_1}$ dove g è la proiezione sulla seconda coordinata: $g(\psi(w), w) = w$. È chiaro che con carte di un tipo o dell'altro si ricopre tutto Z_F. Rimane da controllare la compatibilità per carte che hanno domini che si intersecano. Nel caso di coppie di carte ambedue del primo o del secondo tipo la funzione di transizione non è altro che l'identità definita su una intersezione di due dischi. Nel caso $f\colon U = Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0}) \to \mathbb{D}_{z_0}$ sia una carta del primo tipo e $g\colon V = Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_1} \times \mathbb{D}_{w_1}) \to \mathbb{D}_{w_1}$ una del secondo, allora la funzione di transizione definita su $\mathbb{D}_{z_0} \cap \mathbb{D}_{w_1}$ è data dalla composizione

$$z \mapsto (z, \phi(z)) \mapsto \phi(z)$$

ed è quindi olomorfa. Analogamente si vede che è olomorfa la funzione di transizione quando i ruoli fra i due tipi di carte sono scambiati.

ESEMPIO 5. Un altro metodo per costruire superfici di Riemann è mediante quozienti. Per un esempio semplice, si consideri $2\pi\mathbb{Z}$ come sottogruppo additivo di $\mathbb{C}$ e si definisca il quoziente $R = \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ come quoziente di gruppi: $z \sim w \Longleftrightarrow z - w \in 2\pi\mathbb{Z}$ ossia se e solo se $z = w + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Con la topologia quoziente si vede subito che R è omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$. Un atlante complesso su R si costruisce in questo modo. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ se $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_z = \mathbb{D}(z, 1)$ allora $z_1 \sim z_2$ se e solo se $z_1 = z_2$ dato che $|z_1 - z_2| < 2 < 2\pi$. Dunque, se $\pi\colon \mathbb{C} \to R = \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ è l'applicazione quoziente, allora $\pi\colon \mathbb{D}_z \to U_z = \pi(\mathbb{D}_z)$ è biettiva e quindi è un omeomorfismo. Sia ψ_z il suo inverso. Le carte $\psi\colon U_z \to U_z = \mathbb{D}_z$ sono un atlante che danno una struttura di superficie di Riemann a R. Infatti si vede subito che se due di queste carte hanno domini che si intersecano, allora la funzione di transizione è del tipo $z \mapsto z + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$ ed è quindi olomorfa.

Una classe di quozienti molto interessanti è quella ottenuta da quozienti di $\mathbb{C}$ mediante reticoli ossia sottogruppi additivi di $\mathbb{C}$ isomorfi a $\mathbb{Z}^2$. In concreto sia $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ il sottogruppo additivo discreto di $\mathbb{C}$ generato su $\mathbb{Z}$ da 1 e da un numero complesso τ tale che $Im(\tau) > 0$. È facile convincersi che il quoziente $T = \mathbb{C}/\Gamma$ rispetto alla relazione quoziente di gruppi $z \sim w \Longleftrightarrow z - w \in \Gamma$ ossia se e solo se $z = w + m + n\tau$ per qualche $m, n \in \mathbb{Z}$, con la topologia quoziente, è omeomorfo a un toro $S^1 \times S^1$. In particolare T è uno spazio topologico compatto. Si può ripetere l'argomento precedente per dotare T di una struttura di superficie di Riemann. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ scegliamo un disco $\mathbb{D}_z = \mathbb{D}(z, r)$ in modo che se $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_z$ allora $z_1 \sim z_2$ se e solo se $z_1 = z_2$. La variazione necessaria consiste nell'opportuna scelta del raggio del disco $\mathbb{D}_z$. Basta scegliere (verificare per esercizio!) r in modo che

$$0 < 2r < \min\{|m + n\tau| \mid (0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

D'altra parte, se $n \neq 0$ allora $|m + n\tau| \geq |nIm(\tau)| \geq |Im(\tau)|$ mentre se $n = 0$ allora $|m + n\tau| \geq 1$. Dunque per ottenere la proprietà che vogliamo basta scegliere r tale che

$$0 < 2r < \min\{1, |Im(\tau)|\} \leq \min\{|m + n\tau| \mid (0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Procediamo ora come prima: se $\pi\colon \mathbb{C} \to T = \mathbb{C}/\Gamma$ è l'applicazione quoziente, allora $\pi\colon \mathbb{D}_z \to U_z = \pi(\mathbb{D}_z)$ è biettiva e quindi è un omeomorfismo. Sia ψ_z il suo inverso. Le carte $\psi\colon U_z \to U_z = \mathbb{D}_z$ sono un atlante che danno una struttura di superficie di Riemann a R. Infatti si vede subito che se due di queste carte hanno domini che si intersecano, allora la funzione di transizione è del tipo $z \mapsto z + m + n\tau$ per qualche $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ ed è quindi olomorfa.

Veniamo ora alla nozione di olomorfia su superfici di Riemann che ha motivato questa digressione.

Definizione 7.1.4: Un'applicazione continua $f: M \to N$ fra due superfici di Riemann M, N si dice *applicazione olomorfa* se per ogni carta complessa $\phi: U \to V$ di M e $\psi: W \to Z$ di N con $f(U) \subset W$, la funzione $\psi \circ f \circ \phi^{-1}: V \to Z$ è olomorfa. Un'applicazione olomorfa $f: M \to N$ fra due superfici di Riemann si dice un *biolomorfismo* se è biiettiva con inversa olomorfa e, se esiste, le superfici M e N si dicono *biolomorfe*. Infine un biolomorfismo di una superficie di Riemann M in sé si dice *automorfismo* di M.

ESEMPIO: Sia $R = \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ la superficie di Riemann descritta nell'Esempio 5 sopra. La funzione esponenziale $E(z) = e^{iz}$ è una funzione intera di periodo 2π ossia tale che $E(z_1) = E(z_2)$ se e solo se $z = w + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre è surgettiva su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dunque induce un'applicazione biettiva $\tilde{E}: R \to \mathbb{C}^*$. Si vede subito (esercizio!) che $\tilde{E}$ (ossia che è olomorfa con inversa olomorfa).

Ovviamente le funzioni olomorfe definite su aperti di $\mathbb{C}$ sono applicazioni olomorfe a valori in $\mathbb{C}$. Per uniformità di nomenclatura allora chiameremo *funzione olomorfa* un' applicazione olomorfa $f: M \to \mathbb{C}$ su una superficie di Riemann a valori in $\mathbb{C}$. Vedremo presto che le funzioni meromorfe invece non sono altro che applicazioni olomorfe a valori in $\hat{\mathbb{C}}$.

È un utile esercizio esplicitare la definizione di applicazione olomorfa per applicazioni definite su un aperto della sfera di Riemann a valori nella sfera di Riemann. Abbiamo il seguente immediato risultato:

Proposizione 7.1.3: *Sia $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ un aperto. Un'applicazione continua $f: U \to \hat{\mathbb{C}}$ è olomorfa se per ogni $z \in U$ è vera una delle seguenti affermazioni:*
(i) $z, f(z) \in \mathbb{C}$ e esiste un intorno V di z tale che $f(z)$ è olomorfa su V;
(ii) $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \infty$ e esiste un intorno V di z tale che $\frac{1}{f(z)}$ è olomorfa su $V \setminus \{z\}$;
(iii) $z = \infty$, $f(\infty) \in \mathbb{C}$ e esiste un intorno V di 0 tale che $f(\frac{1}{z})$ è olomorfa su $V \setminus \{0\}$;
(iv) $z = \infty$, $f(\infty) = \infty$ e esiste un intorno V di 0 tale che la funzione $\frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ è olomorfa su $V \setminus \{0\}$.

Dimostrazione: Esercizio!!! □

Dato che la loro definizione è locale, le applicazioni olomorfe godono di tutte le proprietà locali delle funzioni olomorfe definite su aperti di $\mathbb{C}$.

In particolare è utile osservare che vale il principio del prolungamento analitico per applicazioni olomorfe che si può formulare nel modo seguente:

Teorema 7.1.4: *Siano $f, g: M \to N$ applicazioni olomorfe fra superfici di Riemann. Se f e g coincidono su un sottoinsieme $E \subset M$ contenente un punto di accumulazione allora $f \equiv g$. In particolare se $f: M \to N$ è un'applicazione olomorfa non costante allora per ogni $c \in N$ l'insieme $f^{-1}(c)$ è discreto e se M è compatta, allora, per ogni $c \in N$, l'insieme $f^{-1}(c)$ è finito.*

Dimostrazione: Basta dimostrare la prima parte dell'enunciato. Infatti se $f^{-1}(c)$ non è discreto allora ha un punto d'accumulazione e quindi $f \equiv c$ e se M è compatta, allora, dato che ogni suo sottoinsieme discreto è finito e quindi l'insieme $f^{-1}(c)$ è finito per ogni c.

Sia allora

$$B = \{a \in M \mid f = g \text{ in un intorno aperto di } a\}.$$

Per costruzione B è aperto. Sia $b \in \partial B$. Allora, per continuità $f(b) = g(b)$. Siano $\phi: U \to V$ una carta complessa di M con U connesso contente b e $\psi: W \to Z$ una carta complessa di N con $f(U) \subset W$ e $g(U) \subset W$. Allora le funzioni $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}: V \to Z$ e $\tilde{g} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}: V \to Z$ sono olomorfe. Dato che necessariamente $U \cap B \neq \emptyset$ ($b \in \partial B$!), e $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ coincidono su un sottoinsieme di V che ha un punto di accumulazione in V, per il principio del prolungamento analitico usuale, si ha che $\tilde{f} \equiv \tilde{g}$ su V. Dunque $f \equiv g$ su U e quindi $b \in B$. Dunque, dato che contiene la sua frontiera, B è chiuso. Dato che le superfici di Riemann sono connesse per ipotesi, per provare la tesi basta dimostrare che $B \neq \emptyset$. Ma se a è un punto d'accumulazione dell'insieme E dove f e g coincidono, utilizzando di nuovo carte complesse e il principio del prolungamento analitico usuale, si ha che $a \in B$ (esercizio!) e la dimostrazione è completa. □

Una prima conseguenza è il seguente

Teorema 7.1.5: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto, f una funzione meromorfa su A e $E \subset A$ l'insieme dei poli di f. Si estenda f lungo E a un'applicazione $\hat{f}: A \to \hat{\mathbb{C}}$ ponendo $\hat{f}_{A \setminus E} = f$, e*

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} \lim_{z \to a} f(z) & \text{se } ord_a(f) = 0 \\ \infty & \text{se } ord_a(f) > 0. \end{cases}$$

Allora $\hat{f}$ è un'applicazione olomorfa. Viceversa se A è un aperto connesso, $F: A \to \hat{\mathbb{C}}$ è un'applicazione olomorfa con $F \not\equiv \infty$, allora l'insieme $E = \{a \in A | F(a) = \infty\}$ è discreto in A e $F: A \setminus E \to \mathbb{C}$ è una funzione meromorfa su A.

Dimostrazione: Per quanto riguarda la prima parte basta osservare che la funzione $\frac{1}{\hat{f}(z)}$ è olomorfa nell'intorno di ogni polo di ordine maggiore uguale 1 grazie al teorema di estensione di Riemann. Viceversa sia $F: A \to \hat{\mathbb{C}}$ un'applicazione olomorfa. L'insieme $E = F^{-1}(\infty)$ non può avere punti d'accumulazione in A come dimostrato in Teorema 7.1.4. Inoltre si ha che F ristretta a $A \setminus E$ è olomorfa. Sia allora $a \in E$. Allora esiste un intorno V di a tale che esiste una costante $M > 0$ in modo che, per ogni $z \in V \setminus \{a\}$, si ha $|F(z)| > M$. Allora la funzione $g(z) = 1/F(z)$ è olomorfa e limitata su $V \setminus \{a\}$ e quindi ha estensione olomorfa su V. Dato che $gF = 1$ su $V \setminus \{a\}$, la tesi segue. □

Spesso, anche per quanto suggerito dal Teorema 7.1.5, si chiama *funzione meromorfa* su una superficie di Riemann M un'applicazione olomorfa $f: M \to \hat{\mathbb{C}}$ a valori nella sfera di Riemann con $f \not\equiv \infty$.

In questo contesto possiamo dare altre illustrazioni di come il comportamento all'infinito "prescriva" le funzioni olomorfe. Il primo risultato classicamente si enuncia dicendo che una funzione intera ha estensione meromofa all'infinito – o ha un polo all'infinito – se e solo se è un polinomio. Con il linguaggio che abbiamo introdotto, questo è l'enunciato preciso:

Teorema 7.1.6: *Sia $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione intera. Allora f si estende a un'applicazione olomorfa $\hat{f}: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ se e solo se è un polinomio.*

Dimostrazione: Se f è un polinomio non costante, allora $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = +\infty$. Posto $\hat{f}(\infty) = \infty$, si vede subito che $\hat{f}$ è un'applicazione olomorfa. Infatti, per il teorema di Riemann, la funzione

$$g(\zeta) = \frac{1}{f(\frac{1}{\zeta})}$$

si estende olomorfa su $\zeta = 0$. Viceversa supponiamo che una funzione intera $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si estenda a un'applicazione olomorfa $\hat{f}: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. Se $\hat{f}(\infty) \in \mathbb{C}$ allora f è limitata nel complemento di un disco centrato nell'origine. Dunque, per il teorema di Liouville f è costante. Se invece $\hat{f}(\infty) = \infty$ allora $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = +\infty$ e quindi, per il Teorema 4.2.6, f è un polinomio. □

La versione "meromorfa" del teorema precedente classicamente si enuncia dicendo che una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ ha estensione meromofa su $\hat{\mathbb{C}}$ se e solo se è una funzione razionale. Anche in questo caso diamo l'enunciato utilizzando il linguaggio che abbiamo introdotto:

Teorema 7.1.7: *Sia $F: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ un'applicazione olomorfa con $F \not\equiv \infty$. Allora F è l'estensione di una funzione razionale. Di conseguenza una funzione meromorfa f su $\mathbb{C}$ si estende a un'applicazione olomorfa $\hat{f}: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ se e solo se è una funzione razionale.*

Dimostrazione: Sia $F: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ un'applicazione olomorfa con $F \not\equiv \infty$. Dal Teorema 7.1.4 segue che $E = F^{-1}(\infty)$ è un insieme finito. Allora la funzione $f = F_{|\mathbb{C}\setminus E}$ definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$. Siano $E \cap \mathbb{C} = \{b_1, \ldots, b_k\}$ i suoi poli e $m_1 = ord_{b_1} f, \ldots, m_k = ord_{b_k} f$ i relativi ordini. Allora la funzione

$$g(z) = (z - b_1)^{m_1} \ldots (z - b_k)^{m_k} f(z)$$

si estende a una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. Ci sono allora tre possibilità:

(a) $\lim_{z\to\infty} g(z) \in \mathbb{C}$;

(b) $\lim_{z\to\infty} g(z) = \infty$;

(c) $\lim_{z\to\infty} g(z)$ non esiste.

Se vale (a) allora la funzione $g(z)$ è intera e limitata nel complemento di un disco centrato nell'origine e quindi è costante. Segue allora che f è una funzione razionale.

Se vale (b) allora per il Teorema 4.2.6 la funzione $g(z)$ è un polinomio di grado ≥ 1 e quindi anche in questo caso f è una funzione razionale.

Non può valere (c). Infatti g è il prodotto di due funzioni meromorfe su $\mathbb{C}$ che si estendono a applicazioni olomorfe di $\hat{\mathbb{C}}$ in sé. Dunque in particolare g si estende a una funzione continua di $\hat{\mathbb{C}}$ in sé. Dunque necessariamente la funzione $g(z)$ ha limite in $\hat{\mathbb{C}}$ per $z \to \infty$.

Dalla prima parte dell'enunciato è immediato osservare che una fuzione meromorfa che si estende a una applicazione meromorfa di di $\hat{\mathbb{C}}$ in sé è necessariamente una funzione razionale. Il fatto che una funzione razionale si estende a un'applicazione olomorfa di $\hat{\mathbb{C}}$ in sé è evidente. □

Esercizi.

2. Dimostrare la Proposizione 7.1.1.

3. Dimostrare la Proposizione 7.1.3.

4. Completare la dimostrazione del Teorema 7.1.4

5. (Teorema dell'applicazione aperta per applicazioni olomorfe) Sia $F: M \to N$ un'applicazione olomorfa non costante fra superfici di Riemann. Per ogni aperto conneso $U \subset M$ l'immagine $F(U)$ è aperta.

6. (Principio del Massimo modulo) Sia M una superficie di Riemann e $f: M \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Allora $|f|$ non ha massimo locale e non ha minimo locale strettamente positivo su M.

7. Sia M una superficie di Riemann compatta. Usando l'esercizio **6.** dimostrare che ogni funzione olomorfa $f: M \to \mathbb{C}$ è costante.

8. Usare l'esercizio **7.** per dare una nuova dimostrazione del Teorema di Liouville.

9. Sia M una superficie di Riemann compatta e N una superficie di Riemann arbitraria. Dimostrare che un'applicazione olomofa $f: M \to N$ non costante è suriettiva *Ricordare: (i) N è connessa; (ii) f(M) è chiuso perché compatto in N di Hausdorff; (iii) l'enunciato dell'esercizio* **5.**

7.2. Trasformazioni di Möbius come automorfismi.

Nel paragrafo **1.4** Abbiamo visto che il gruppo $\mathcal{M}$ delle trasformazioni di Möbius, naturalmente identificabile al gruppo delle proiettività $PGL(2,\mathbb{C})$ della retta proiettiva complessa, agisce in modo transitivo sulla sfera di Riemann, trasforma circonferenze estese in circonferenze estese e conseguentemente che ogni coppia di aperti della sfera di Riemann che hanno per frontiera una circonferenza estesa può essere trasformata l'uno nell'altro mediante una trasformazione di Möbius che manda la frontiera nella frontiera. Nel paragrafo **6.3** abbiamo inoltre mostrato,utilizzando il Lemma di Schwarz, che il gruppo degli automorfismi del disco unitario $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$ è un sottogruppo del gruppo $\mathcal{M}$ delle trasformazioni di Möbius.

Caratterizziamo ora gli automorfismi di $\mathbb{C}$ e della sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

Teorema 7.2.1: *$f \in Aut(\mathbb{C}) \iff$ esistono $a \in \mathbb{C}^*$ e $b \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = az + b$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.*

Dimostrazione: Evidentemente se $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è definita da $f(z) = az + b$ per $a \in \mathbb{C}^*$ e $b \in \mathbb{C}$, allora $f \in Aut(\mathbb{C})$. Sia $f \in Aut(\mathbb{C})$. Allora la funzione definita da $g(z) = f(1/z)$ è olomorfa su $\mathbb{C}^*$. Inoltre 0 o è un polo o è una singolarità essenziale per g. Siano $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$ e $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Se 0 fosse una singolarità essenziale per g, per il teorema di Casorati-Weierstrass, $g(\mathbb{D}^*)$ sarebbe un aperto denso di $\mathbb{C}$. Allora

$$f(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \cap f(\mathbb{D}) = g(\mathbb{D}^*) \cap f(\mathbb{D}) \neq \emptyset$$

e quindi f non potrebbe essere iniettiva. Dunque necessariamente 0 è un polo per g. Se $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ è lo sviluppo in serie di Taylor di f, allora $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^{-n}$ e quindi, dato che 0 è un polo per g, occorre che, per qualche N, per ogni $n \geq N$ si abbia $a_n = 0$. Dunque f deve essere un polinomio e dato che f è iniettiva, deve essere un polinomio di grado 1. $\square$

Teorema 7.2.2: *$T \in Aut(\hat{\mathbb{C}}) \iff T \in \mathcal{M}$.*

Dimostrazione: È immediato che se $T \in \mathcal{M}$ allora $T \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$. Supponiamo che $T \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$. Se T fissa il punto all'infinito ∞, allora la restrizione a $\mathbb{C}$ di T è un automorfismo di $\mathbb{C}$ e quindi per il Teorema 7.2.1 è un'affinità e dunque $T \in \mathcal{M}$. Se invece, per qualche $c \in \mathbb{C}$, si ha $T(\infty) = c$, si consideri $S \in \mathcal{M}$ definita per $z \in \mathbb{C}$ da $S(z) = \frac{1}{T(z)-c}$. Allora $S \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$, dato che S è la composizione di un automorfismo di $\hat{\mathbb{C}}$ con una trasformazione di Möbius. D'altra parte S fissa il punto all'infinito ∞ e quindi $S \in \mathcal{M}$. Segue che anche $T \in \mathcal{M}$ visto che, se $z \in \mathbb{C}$, $T(z) = \frac{1}{S(z)} + c$. $\square$

Possiamo utilizzare questo circolo di idee per capire un po' meglio il tipo di comportamento del gruppo di automorfismi almeno in situazioni geometriche molto semplici. Cominciamo con questa utile osservazione

Proposizione 7.2.3: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e E un sottoinsieme discreto. Sia $f\colon A \setminus E \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa iniettiva. Allora:*
(i) nessun punto di $z_0 \in E$ è una singolarità essenziale di f;
(ii) se tutti i punti di E sono sono singolarità eliminabili, allora l'estensione olomorfa $\hat{f}\colon A \to \mathbb{C}$ è iniettiva.

Dimostrazione: (i) Sia $U \subset \overline{U} \subset A$ un disco contenente z_0 tale che $U \cap E = \{z_0\}$ e sia $A' = A \setminus (E \cup \overline{U})$. Allora A' è connesso (perchè?) e aperto, dunque $f(A')$ è un aperto di $\mathbb{C}$. Dato che $f(U \setminus \{z_0\}) \cap f(A') = \emptyset$, allora, per il Teorema di Casorati-Weierstrass, z_0 non può essere una singolarità essenziale.

(ii) Supponiamo che esistano punti distinti $z \neq w$ di A tali che $\hat{f}(z) = \hat{f}(w) = p$. Siano U, V dischi disgiunti, $U \cap V = \emptyset$, tali che $z \in U$, $w \in V$ e $U \setminus \{z\} \subset A \setminus E$, $V \setminus \{w\} \subset A \setminus E$. Allora $\hat{f}(U) \cap \hat{f}(V)$ è un aperto che contiene $p = \hat{f}(z) = \hat{f}(w)$, dunque contiene un punto $q \neq p$ (in effetti tanti!). Ma allora esistono $z' \in U \setminus \{z\}$, $w' \in V \setminus \{w\}$ con $f(z') = q = f(w')$ ma questo contraddice l'iniettività di f. □

OSSERVAZIONE: In effetti si può dimostrare, utilizzando un risultato del prossimo capitolo, che se $z_0 \in E$, è un polo, ossia nell'unico caso non considerato nella Proposizione 7.2.3, allora z_0 è un polo di ordine 1. Si procede nel modo seguente. Se $z_0 \in E$, è un polo per f allora esiste un aperto $U \subset A$ che contine z_0 tale che la funzione $g = 1/f$ si estende olomorfa su U. Dato che f è iniettiva, allora la funzione $g\colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}^*$ è iniettiva e quindi è iniettiva anche $g\colon U \to \mathbb{C}$. Dimostreremo che necessariamente deve essere allora $g'(z_0) \neq 0$ e quindi segue che z_0 è uno zero semplice di g. Dunque necessariamente f ha un polo di ordine 1 in z_0.

Possiamo usare la Proposizione 7.2.3 per dimostrare che per molti aperti in $\mathbb{C}$ il gruppo di automorfismi è un sottogruppo del gruppo $\mathcal{M}$ delle trasformazioni di Möbius.

PROPOSIZIONE 7.2.4: $\phi \in Aut(\mathbb{C}^*)$ *se e solo se per qualche* $a \in \mathbb{C}^*$ *si ha* $\phi(z) = az$ *per ogni* $z \in \mathbb{C}^*$ *oppure* $\phi(z) = az^{-1}$ *per ogni* $z \in \mathbb{C}^*$. *In particolare, segue che* $\mathbb{C}^*$ *è omogeneo.*

Dimostrazione: Grazie alla Proposizione 7.2.3 possiamo concludere che o l'origine è una singolarità rimovibile oppure l'origine è un polo di ϕ. Nel primo caso l'estensione di $\hat{\phi}$ è iniettiva e necessariamente $\hat{\phi}(0) = 0$. Dunque ϕ è la restrizione a $\mathbb{C}^*$ di un automorfismo di $\mathbb{C}$ e quindi $\phi(z) = az$ per qualche $a \in \mathbb{C}^*$. Se invece 0 è un polo di ϕ, allora $\psi = \frac{1}{\phi}$ è un automorfismo di $\mathbb{C}^*$ che ha una singolarità rimovibile in 0: usando la prima parte della dimostrazione segue che $\phi(z) = az^{-1}$ per qualche $a \in \mathbb{C}^*$. Il fatto che $Aut(\mathbb{C}^*)$ sia transitivo su $\mathbb{C}^*$ è evidente. □

Per una superficie di Riemann M, se $E \subset M$ si definisca:

$$Aut_E(M) = \{\phi \in Aut(M) \mid \phi(E) = E\}$$

il sottogruppo degli automorfismi di M che trasformano E in sé. Nel caso $E = \{p\}$ si riduca a un punto, $Aut_E(M) = Aut_p(M)$ si dice sottogruppo di *isotropia* di p. È evidente che ogni $\phi \in Aut_E(M)$, ristretto a $M \setminus E$, definisce un automorfismo di $M \setminus E$. L'applicazione restrizione $\rho\colon Aut_E(M) \to Aut(M \setminus E)$ definita $\rho(\phi) = \phi_{M \setminus E}$ è evidentemente un omomorfismo di gruppi. Se $M \setminus E$ è un aperto connesso, si vede subito che ρ è iniettivo. Infatti se $\rho(\phi) = Id_{M \setminus E}$ allora, in questo caso per prolungamento analitico, $\phi = Id_M$. Abbiamo allora immediatamente il seguente:

LEMMA 7.2.5: *Se* $M \setminus E$ *è un aperto connesso, che* $\rho\colon Aut_E(M) \to Aut(M \setminus E)$ *è un isomorfismo di* $Aut_E(M)$ *con un sottogruppo di* $Aut(M \setminus E)$

Da questo punto in poi, se $M \setminus E$ è un aperto connesso, identificheremo $Aut_E(M)$ con la sua immagine $\rho(Aut_E(M)) \subset Aut(M \setminus E)$ e ogni $\phi \in Aut_E(M)$ con la sua restrizione $\rho(\phi) = \phi_{M\setminus E}$. Ad esempio $M \setminus E$ è un aperto connesso se E è un sottoinsieme chiuso e discreto. In questo caso abbiamo il seguente:

Teorema 7.2.6: *Se $A \subset \mathbb{C}$ è un aperto limitato tale che la frontiera ∂A non ha punti isolati e $E \subset A$ è un sottoinsieme chiuso (in A) e discreto, allora* $\mathrm{Aut}_E(A) = Aut(A\setminus E)$.

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che per $\psi \in Aut(A \setminus E)$ esiste $\Psi \in \mathrm{Aut}_E(A)$ tale che $\Psi_{A\setminus E} = \psi$. Dato che $A \setminus E$ è limitato, ψ e ψ^{-1}, per il Teorema di Estensione di Riemann, si estendono rispettivamente a funzioni olomorfe Ψ e Φ definite su A. Per il punto (ii) della Proposizione 7.2.3, abbiamo che Ψ e Φ sono funzioni iniettive. Dimostriamo ora che $\Psi(A) \subset A$ e $\Phi(A) \subset A$. Dato che Ψ è continua, necessariamente $\Psi(A) \subset \overline{A}$. Supponiamo ci sia un punto $a \in A$ tale che $\Psi(a) \in \partial A$. In questo caso necessariamente deve essere $a \in E$. Sia U un disco centrato in a tale che $U \setminus \{a\} \subset A \setminus E$. Tale disco esiste dato che E è discreto. Per il teorema dell'applicazione aperta, $\Psi(U)$ è un aperto contenente $\Psi(a)$. Dato che Ψ è iniettiva allora $\Psi(U) \setminus \{\Psi(a)\} = \Psi(U \setminus \{(a)\}) \subset A$. Ma allora $\Psi(a)$ sarebbe un punto isolato di ∂A che, per ipotesi, non ne ha. Dunque necessariamente $\Psi(A) \subset A$. Lo stesso argomento prova che $\Phi(A) \subset A$. Dunque, in particolare le funzioni $\Psi \circ \Phi$ e $\Phi \circ \Psi$ sono definite e olomorfe su A. Inoltre ambedue coincidono con l'identità su un sottoinsieme denso di A. Dunque Ψ è un automorfismo di A tale che, dato che $\Psi(A \setminus E) = \psi(A \setminus E) = A \setminus E$, necessariamente $\Psi(E) = E$ e quindi $\Psi \in \mathrm{Aut}_E(A)$ □

Come conseguenza immediata:

Corollario 7.2.7: *Se $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ è il disco unitario con il centro rimosso, allora*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}^*) = \mathrm{Aut}_0(\mathbb{D}) = \{R_c(z) = cz \mid c \in \partial\mathbb{D} = S^1\}.$$

Il Teorema 7.2.6 suggerisce, e il Corollario 7.2.7 lo conferma, che "togliendo" punti a un dominio limitato il gruppo degli automorfismi diventa più piccolo perché togliere punti corrisponde ad "aggiungere" condizioni per l'esistenza degli automorfismi.

Concludiamo il paragrafo mostrando che con facilità si ottengono domini *rigidi* ossia per i quali l'unico automorfismo è l'identità. In effetti la maggior parte delle superfici di Riemann o hanno gruppo di automorfismi finito o addirittura sono rigide. la seguente è un'utile osservazione che lasciamo per esercizio:

Proposizione 7.2.8: *Se ϕ è un automorfismo del disco unitario $\mathbb{D}$ che ha due punti fissi distinti, ossia esistono $z, w \in \mathbb{D}$, $z \neq w$ con $\phi(z) = z$ e $\phi(w) = w$, allora $\phi \equiv Id_{\mathbb{D}}$*

Il fatto cruciale per studiare il gruppo di automorfismi del complemento di un numero finito di punti del disco unitario, è il seguente:

Teorema 7.2.9: *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ costituito da $n > 0$ punti distinti. Allora $Aut(\mathbb{D}^* \setminus E)$ è un gruppo isomorfo a un sottogruppo del gruppo delle permutazioni di $E \cup \{0\}$ ossia, a meno di identificazioni, è un sottogruppo del gruppo delle permutazioni S_{n+1} di $n+1$ lettere.*

Dimostrazione: Dal Teorema 7.2.6 segue che $Aut(\mathbb{D}^* \setminus E) = Aut(\mathbb{D} \setminus (E \cup \{0\})) = Aut_{E\cup\{0\}}(\mathbb{D})$. Dunque ogni $\phi \in Aut(\mathbb{D}^* \setminus E)$ è un automorfismo di $\mathbb{D}$ che trasforma $E \cup \{0\}$ in sé ossia induce una permutazione $\Sigma(\phi)$ di $E \cup \{0\}$. Si vede subito che $\Sigma\colon Aut(\mathbb{D}^* \setminus E) \to Perm(E \cup \{0\})$ è un omomorfismo di gruppi. Dato che $E \cup \{0\}$ ha almeno due punti, se $\Sigma(\phi) = Id_{E\cup\{0\}}$ allora ϕ è un automorfismo di $\mathbb{D}$ con due punti fissi e quindi, per la Proposizione 7.2.8, $\phi \equiv Id_{\mathbb{D}}$ e quindi Σ è iniettivo. $\square$

I seguenti corollari illustrano, come desiderato, il fenomeno di "irrigidimento" togliendo punti a un disco:

Corollario 7.2.10: *Sia $a \in \mathbb{D}^*$. Allora $Aut(\mathbb{D}^* \setminus \{a\})$ è isomorfo a S_2 e il suo unico automorfismo diverso dall'identità è definito da $\phi(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$.*

Dimostrazione: Dal Teorema 7.2.9 segue che $Aut(\mathbb{D}^* \setminus \{a\})$ è isomorfo a un sottogruppo di S_2. D'altra parte si vede subito che $\phi(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ definisce un automorfismo di $\mathbb{D}^* \setminus \{a\}$ diverso dall'identità. $\square$

Corollario 7.2.11: *Siano $s, t \in (0, 1)$ con $s \neq t$. Allora $Aut(\mathbb{D} \setminus \{0, s, t\}) \neq \{Id\}$ se e solo se $2t = (t^2 + 1)s$ oppure $2s = (s^2 + 1)t$*

Dimostrazione: Dal Teorema 7.2.6 segue che $Aut(\mathbb{D}\setminus\{0, s, t\}) = Aut_{\{0,s,t\}}(\mathbb{D})$. Dunque se $\phi \in Aut(\mathbb{D} \setminus \{0, s, t\}))$ allora per qualche $c \in \partial D$ e $a \in \mathbb{D}$ si ha

$$\phi(z) = c\frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

D'altra parte dal Teorema 7.2.9 segue che ϕ induce una permutazione dei tre punti $0, s, t$. Si vede subito che se 0 è un punto fisso di ϕ, allora ϕ è una rotazione che fissa due punti dell'asse reale positivo e quindi, necessariamente ϕ è l'identità. Se $\phi(s) = 0$, allora $a = s$ e quindi $\phi(z) = c\frac{z-s}{1-sz}$.

Ci sono due possibilità:

$$(i) \quad \phi(0) = s \ \text{ e } \ \phi(t) = t \qquad \text{oppure} \qquad (ii) \quad \phi(0) = t \ \text{ e } \ \phi(t) = s.$$

Il caso (ii) non può verificarsi dato che, da $\phi(0) = t$ si avrebbe che $t = \phi(0) = -cs$ che non è possibile perchè altrimenti $1 = |c| = t/s \neq 1$ Se vale (i) da $\phi(0) = s$ si avrebbe che $c = -1$ e quindi necessariamente $t = \phi(t) = -\frac{t-s}{1-st}$ ossia $2t = (t^2 + 1)s$.

Dunque se $\phi(s) = 0$ e $2t = (t^2 + 1)s$, si ha $Aut(\mathbb{D} \setminus \{0, s, t\}) = \{Id, \phi\}$ con ϕ definita da

$$\phi(z) = -\frac{z-s}{1-sz}$$

dato che si verifica immediatamente che $\phi = \phi^{-1}$. Se invece $\phi(s) = 0$ ma $2t \neq (t^2+1)s$, si ha necessariamente $Aut(\mathbb{D} \setminus \{0, s, t\})\{Id\}$. Se invece è $\phi(t) = 0$, scambiando i ruoli di s e t, l'argomento di sopra prova che, se $2s = (s^2 + 1)t$, si ha $Aut(\mathbb{D} \setminus \{0, s, t\}) = \{Id, \phi\}$ con ϕ definita da

$$\phi(z) = -\frac{z-t}{1-tz},$$

mentre, se invece $\phi(s) = 0$ ma $2t \neq (t^2 + 1)s$, si ha necessariamente $Aut(\mathbb{D} \setminus \{0, s, t\}) = \{Id\}$. $\square$

Esercizi.

1. Dare i dettagli della dimostrazione del Corollario 7.2.7

2. Dimostrare che dati due punti distinti z, w di $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$, esiste un automorfismo α di $\mathbb{D}$ tale che $\alpha(z) = 0$ e $\alpha(w) = t$ con $t \in (0,1)$. Usare questo fatto per dimostrare la Proposizione 7.2.8.

3. Trovare $T \in \mathcal{M}$ che trasforma il disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ nel semipiano superiore $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} | Imz > 0\}$.

4. Utilizzando l'esistenza del biolomorfismo $T \in \mathcal{M}$ trovato nell'esercizio 3, determinare il gruppo $Aut(\mathbb{H}^+)$ degli automorfismi del semipiano superiore. *Consiglio:* $\phi \in Aut(\mathbb{H}^+)$ *se e solo se* $T^{-1} \circ \phi \circ T \in Aut(\Delta)$ *e quindi....*

5. Siano M e N due superfici Riemann e sia $F: M \to N$ un biolomorfismo, ossia un'applicazione olomorfa invertibile con inversa olomorfa. Dimostrare che $Aut(M)$ e $Aut(N)$ sono gruppi isomorfi.