CAPITOLO 8

Principio dell'argomento e Biolomorfismi

8.1. Il Principio dell'argomento.

Una conseguenza molto importante del Teorema dei Residui è il seguente

Teorema 8.1.1: (Principio dell'argomento) $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un aperto e* f *una funzione meromorfa in* Ω*. Sia* $D \subset \Omega$ *un aperto limitato con* $\overline{D} \subset \Omega$ *e con frontiera* ∂D *unione finita di curve* C^1 *a tratti semplici chiuse disgiunte. Se* f *non ha zeri nè poli su* ∂D*, si ha*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P \tag{8.1.1}$$

dove N *è la somma delle molteplicità degli zeri di* f *in* D *e* P *è la somma degli ordini dei poli di* f *in* D*.*

Dimostrazione: In D la funzione f ha un numero finito di zeri $a_1, \dots, a_r$ di molteplicità $\mu_1, \dots, \mu_r$ rispettivamente e un numero finito di poli $b_1, \dots, b_s$ di ordine $\nu_1, \dots, \nu_s$ rispettivamente. Dunque esiste una funzione h olomorfa su un aperto contente $\overline{D}$ che non si annulla in alcun punto di D tale che per $z \in D$

$$f(z) = \frac{(z-a_1)^{\mu_1} \dots (z-a_r)^{\mu_r}}{(z-b_1)^{\nu_1} \dots (z-b_s)^{\nu_s}} h(z). \tag{8.1.2}$$

Dato che per funzioni olomorfe ϕ e ψ, ovunque abbia senso, si ha

$$\frac{(\phi\psi)'}{\phi\psi} = \frac{\phi'}{\phi} + \frac{\psi'}{\psi} \tag{8.1.3}$$

e, per $\nu \in \mathbb{Z}$, se $\alpha(z) = (z-c)^\nu$, si ha

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\nu}{(z-c)}. \tag{8.1.4}$$

Dunque, da (8.1.2), (8.1.3) e (8.1.4), segue

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\mu_k}{z-a_k} - \sum_{h=1}^{s} \frac{\nu_h}{z-a_h} + \frac{h'(z)}{h(z)}. \tag{8.1.5}$$

Da (8.1.5) segue che $\frac{f'}{f}$ è una funzione meromorfa con poli semplici esattamente dove f si annulla e dove f ha un polo. Un calcolo immediato dimostra che dove f ha uno zero $\frac{f'}{f}$ ha residuo pari alla molteplicità dello zero e dove f ha un polo $\frac{f'}{f}$ ha per residuo l'opposto dell'ordine del polo. Dunque (8.1.1) segue dal Teorema dei Residui.

$\square$

Una importante applicazione è il Teorema di Rouché che che afferma che il numero degli zeri di una funzione olomorfa su un aperto limitato non cambia se le si aggiunge una funzione olomorfa sul dominio che ha modulo sul bordo dominato dal modulo della prima.

Teorema 8.1.2: (di Rouché) *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato. Se $g, h \in C^0(\overline{\Omega})$ sono funzioni olomorfe in Ω tali che*

$$| g(z) |<| h(z) | \qquad \forall z \in \partial\Omega. \tag{8.1.6}$$

Allora le funzioni h e $f = g + h$ hanno lo stesso numero di zeri in Ω.

Dimostrazione: Dato che vale (8.1.6) e $g, h \in C^0(\overline{\Omega})$, esiste una aperto $A \supset \partial\Omega$ tale che su $A \cap \overline{\Omega}$ si ha $|g| < |h|$. Dunque

$$h(z) \neq 0 \quad \text{e} \quad f(z) = h(z) + g(z) \neq 0 \qquad \forall z \in A \cap \overline{\Omega}.$$

Infatti se esistesse $z_0 \in A \cap \overline{\Omega}$ con $h(z_0) = 0$ allora si avrebbe $0 = |h(z_0)| > |g(z_0)| \geq 0$ e se esistesse $z_1 \in A \cap \overline{\Omega}$ con $f(z_1) = 0$ allora si avrebbe $h(z_1) = -g(z_1)$ e quindi $|h(z_1)| = |g(z_1)| < |h(z_1)|$.

Sia $\Omega' = \Omega \setminus \overline{A}$. Allora Ω' è un aperto tale che $\overline{\Omega'}$ è un compatto che contiene tutti gli zeri di f e di h. Sia D un aperto con frontiera unione finita di curve C^1 a tratti semplici chiuse disgiunte tale che $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset D \subset \overline{D} \subset \Omega$. Dato che h e f sono olomorfe su D e non hanno zeri su ∂D, applicando il principio dell'argomento, basta dimostrare che

$$\int_{\partial D} \frac{f'}{f}\, dz = \int_{\partial D} \frac{h'}{h}\, dz. \tag{8.1.7}$$

A tal fine si definisca una funzione meromorfa q su Ω mediante $f = hq$ ossia ponendo

$$q(z) = 1 + \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Dunque q è meromorfa con singolarità (eventualmente eliminabili) dove h ha zeri. Allora

$$\frac{f'}{f} = \frac{h'}{h} + \frac{q'}{q}.$$

Dunque per dimostrare la (8.1.7) basterà provare che $\int_{\partial D} \frac{q'}{q}\, dz = 0$. Su $A \cap \overline{\Omega}$ si ha $|g| < |h|$ e quindi anche $|q(z) - 1| = |g(z)/h(z)| < 1$. Allora per $z \in A \cap \Omega$ si ha $|q(z)| < 2$ e quindi q è una funzione olomorfa su $A \cap \Omega$ con $q(A \cap \Omega) \subset D(1, 1) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Allora una funzione olomorfa è definita per $z \in A \cap \Omega$ da $Q(z) = Log(q(z))$, dove Log è il logaritmo principale definito su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Dato che $Q'(z) = q'(z)/q(z)$ su $A \cap \Omega$, si ha

$$\int_{\partial D} \frac{q'(z)}{q(z)}\, dz = \int_{\partial D} Q'(z)\, dz = 0.$$

$\square$

Il teorema di Rouché permette di dare un'altra semplice dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra:

Corollario 8.1.3: (Teorema fondamentale dell'algebra) *Un polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi ha esattamente n radici complesse contate con la loro molteplicità.*

Dimostrazione: Basta dimostrare che il risultato vale per $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ per $n \geq 1$. Dato che

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{p(z)}{z^n} = \lim_{|z|\to\infty} 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} = 1,$$

allora per qualche $R > 0$ se $|z| = R$ si deve avere

$$\left| \frac{p(z)}{z^n} - 1 \right| < 1$$

o, in altre parole, $|p(z) - z^n| < |z^n|$. Per il teorema di Rouché segue che $p(z) = (p(z) - z^n) + z^n$ ha esattamente n zeri nel disco di centro 0 e raggio R. □

Il teorema di Rouché può essere usato per stimare dove sono situati gli zeri di un polinomio.

Esempio. Si consideri il polinomio $p(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$. Si ponga

$$h(z) = -4z^5 \qquad \text{e} \qquad g(z) = z^8 + z^2 - 1.$$

Su $|z| = 1$ si ha $|h(z)| > |g(z)|$ visto che

$$|h(z)| = |4z^5| = 4 \qquad \text{e} \qquad |g(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leq |z^8| + |z^2| + |1| \leq 3.$$

Per il teorema di Rouché segue che $p(z) = h(z) + g(z)$ ha 5 radici nel disco $|z| < 1$. D'altro canto se si pone

$$l(z) = z^8 \qquad \text{e} \qquad m(z) = -4z^5 + z^2 - 1,$$

su $|z| = 2$ si ha $|l(z)| > |m(z)|$ visto che

$$|l(z)| = |z^8| = 256 \qquad \text{e} \qquad |m(z)| = |-4z^5 + z^2 - 1| \leq |4z^5| + |z^2| + |1| \leq 128 + 4 + 1 = 133.$$

Per il teorema di Rouché segue che $p(z) = l(z) + m(z)$ ha 8 radici nel disco $|z| < 2$ e quindi $p(z)$ ha 3 radici nella corona $1 \leq |z| < 2$.

Un'altra applicazione del Teorema di Rouché è il seguente:

Teorema 8.1.4: (Teorema di Hurwitz) *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe convergente uniformemente sui compatti di Ω a f. Siano $f \not\equiv 0$, $a \in \Omega$ e, per $r > 0$ opportuno, $\mathbb{D} = \mathbb{D}(a, r) \subset \overline{\mathbb{D}(a, r)} \subset \Omega$ in modo che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial\mathbb{D}$. Allora esiste N tale che se $n > N$ le funzioni f e f_n hanno lo stesso numero di zeri in $\mathbb{D}$. In particolare segue che se per ogni n le funzioni f_n non si annullano in alcun punto di Ω o f non si annulla in alcun punto di Ω o $f \equiv 0$.*

Dimostrazione: Se $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial\mathbb{D}$ sia

$$d = \min\{|f(z)| \mid z \in \partial\mathbb{D}\} > 0.$$

Dato che f_n converge uniformemente a f su $\partial\mathbb{D}$, esiste N tale che se $n > N$ per $z \in \partial\mathbb{D}$ si deve avere

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{1}{2}d < |f(z)|.$$

Il teorema di Rouché allora implica che $f_n(z) = f_n(z) - f(z) + f(z)$ ha lo stesso numero di zeri di f su $\mathbb{D}$. □

Il seguente è un utile corollario del Teorema di Hurwitz:

Corollario 8.1.5: *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe iniettive su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ uniformemente convergente sui compatti di Ω a f. Allora f è olomorfa e o è iniettiva o è costante.*

Dimostrazione: Sia dunque f_n una successione uniformemente convergente sui compatti di Ω a f. Per il teorema di Weierstrass f è olomorfa. Sia $z_1 \in \Omega$ arbitrario e si definiscano

$$\zeta = f(z_1) \quad \text{e} \quad \zeta_n = f_n(z_1) \quad \forall \quad n.$$

Per $z_2 \in \Omega \setminus \{z_1\}$, sia $K = \overline{\mathbb{D}(z_2, r)} \subset \Omega \setminus \{z_1\}$. Si osservi che, dato che f_n è iniettiva per ogni n, si ha per ogni $z \in K$

$$f_n(z) - \zeta_n = f_n(z) - f_n(z_1) \neq 0. \tag{8.1.8}$$

Dato che f_n converge uniformemente sui compatti di Ω a f, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che se $n > N$ si ha

$$\sup_K \mid f_n - f \mid < \epsilon/2 \quad \text{e} \quad \mid f_n(z_1) - f(z_1) \mid < \epsilon/2$$

e quindi per $z \in K$ e $n > N$

$$\begin{aligned}\mid (f_n(z) - \zeta_n) - (f(z) - \zeta) \mid &= \mid (f_n(z) - f_n(z_1)) - (f(z) - f(z_1)) \mid \\ &\leq \mid f_n(z) - f(z) \mid + \mid f_n(z_1) - f(z_1) \mid < \epsilon.\end{aligned}$$

Dunque $f_n - \zeta_n$ converge uniformemente a $f - \zeta$ su K. Da (8.1.8) e dal Teorema di Hurwitz segue che o $f(z) - \zeta \neq 0$ per ogni $z \in K$ o $f \equiv \zeta$. Se $f \equiv \zeta$ su K allora f è costante per il teorema del prolungamento analitico. Se invece $f(z) - \zeta \neq 0$ per ogni $z \in K$ allora, in particolare $f(z_1) \neq f(z_2)$. Ripetendo l'argomento per ogni $z_2 \neq z_1$, si ha che in questo caso f è iniettiva. □

APPENDICE: Il Teorema delle Funzioni Implicite.

Diamo ora una dimostrazione della versione olomorfa del Teorema delle Funzioni Implicite in due variabili complesse che utilizza le nozioni e le idee introdotte in questo paragrafo:

Teorema 8.1.6: *Sia $B \subset \mathbb{C}^2$ un aperto e $F: B \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1. Supponiamo che per ogni $(z_0, w_0) \in B$ esistano aperti $A_{z_0} \subset \mathbb{C}$ contenente z e $A_{w_0} \subset \mathbb{C}$ contente w_0 tali che $A_{z_0} \times A_{w_0} \subset B$ e che*

$$F(\cdot, w): A_{z_0} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto F(z,w) \qquad\qquad F(z, \cdot): A_{w_0} \to \mathbb{C} \quad w \mapsto F(z,w)$$

sono funzioni olomorfe rispettivamente per ogni $w \in A_{w_0}$ e $z \in A_{z_0}$. Allora:

(i) Se per $(z_0, w_0) \in Z_F$ la funzione $F_w = \frac{\partial F(z,\cdot)}{\partial w}$ non si annulla in (z_0, w_0), allora esistono un disco $\mathbb{D}_{z_0}$ centrato in z_0, un disco $\mathbb{D}_{w_0}$ centrato in w_0 e una funzione olomorfa $\phi: \mathbb{D}_{z_0} \to \mathbb{D}_{w_0}$ tale che $\phi(z_0) = w_0$ e

$$Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0}) = \{(z, \phi(z)) \mid z \in \mathbb{D}_{z_0}\}.$$

(ii) Se per $(z_0, w_0) \in Z_F$ la funzione $F_z = \frac{\partial F(\cdot,w)}{\partial z}$ non si annulla in (z_0, w_0), allora esistono un disco $\mathbb{D}_{z_0}$ centrato in z_0, un disco $\mathbb{D}_{w_0}$ centrato in w_0 e una funzione olomorfa $\psi: \mathbb{D}_{w_0} \to \mathbb{D}_{z_0}$ tale che $\psi(w_0) = z_0$ e

$$Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0}) = \{(\psi(w), w) \mid w \in \mathbb{D}_{w_0}\}.$$

Dimostrazione: Naturalmente basterà dimostrare la parte (i) dell'enunciato, l'altra è completamente equivalente. Sia f_z la funzione olomorfa definita su A_{w_0} ponendo $f_z(z) = F(z, w)$. Dato che per ipotesi $\frac{\partial F(z,\cdot)}{\partial w}$ non si annulla in (z_0, w_0), allora $f'_{z_0}(w_0) \neq 0$. Dunque esiste un disco $\mathbb{D}_{w_0}$ centrato in w_0 tale che w_0 sia l'unico zero di f_{z_0} su $\overline{\mathbb{D}}_{w_0}$. Dunque per qualche $d > 0$ si ha $|f_{z_0}(w)| > 2d$ per ogni $w \in \partial\mathbb{D}_{w_0}$. Esiste allora, per continuità, un disco $\mathbb{D}_{z_0}$ centrato in z_0 tale che se $z \in \mathbb{D}_{z_0}$ allora $|f_z(w)| > d$ per ogni $w \in \partial\mathbb{D}_{w_0}$. Allora, per il Principio dell'Argomento, il numero n di radici dell'equazione $f_z(w) = 0$ è dato da

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_{w_0}} \frac{f'_z(\omega)}{f_z(\omega)} d\omega.$$

Dato che per $z = z_0$, si $n = 1$, per continuità si ha $n = 1$ per ogni $z \in \mathbb{D}_{z_0}$. Sia $\phi(z) \in \mathbb{D}_{w_0}$ l'unica radice in $\mathbb{D}_{z_0}$ dell'equazione $f_z(w) = 0$. Con un argomento simile a quello suggerito nell'Esercizio **3** al termine del Paragrafo **1** di questo capitolo, si dimostra che deve essere:

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_{w_0}} \omega \frac{f'_z(\omega)}{f_z(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_{w_0}} \omega \frac{1}{F(z,\omega)} \frac{\partial F}{\partial z}(z,\omega) d\omega$$

da cui segue che ϕ è olomorfa dato che l'integrando è olomorfo nella variabile z. $\square$

8.2. Biolomorfismi.

Concludiamo il capitolo con una importante proprietà delle funzioni olomorfe che si ottiene come elegante corollario dei risultati ottenuti. Dimostreremo in particolare che l'inversa di una funzione olomorfa è necessariamente olomorfa e che quindi una applicazione olomorfa biettiva è necessariamente un biolomorfismo. Sarà necessario il seguente risultato di cui ripetiamo la dimostrazione per comodità del lettore.

TEOREMA 8.2.1: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, f una funzione olomorfa su Ω e $z_0 \in \Omega$. Se $f'(z_0) \neq 0$ esiste un aperto U con $z_0 \in U \subset \Omega$ tale che la restrizione $f_{|U}: U \to f(U) = V$ è biettiva e l'inversa $f^{-1}: V \to U$ è olomorfa.*

Dimostrazione: Siano u e v la parte reale e immaginaria della funzione f: $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$. Allora, dato che f è olomorfa, si ha $f' = f_x$, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ e quindi

$$det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = (u_x + iv_x)(u_x - iv_x) = f'\overline{f'} = |f'|^2.$$

Se $f'(z_0) \neq 0$, la funzione f, per il teorema dell'applicazione inversa per applicazioni di classe C^1 su aperti di $\mathbb{R}^2$ ammette una inversa $f^{-1}: V \to U$ di classe C^1. Dato che $f'(z_0) \neq 0$, restringendo eventualmente U, si può supporre che $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in U$. Dunque derivando l'eguaglianza $z = f^{-1}(f(z))$, posto $w = f(z)$ si ha

$$0 = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} z = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f^{-1}(f(z))) = \frac{\partial f^{-1}}{\partial \overline{z}}(w)\,\overline{f'(z)}$$

e quindi $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f^{-1}) \equiv 0$ su U.

□

Persino per funzioni di classe C^ω l'invertibilità non garantisce che l'inversa conservi le proprietà di regolarità. L'esempio della funzione $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $u(x) = x^3$ chiarisce bene la situazione: u è un omeomorfismo ma u^{-1} non è derivabile in 0 dato che $u'(0) = 0$. Per funzioni olomorfe invece l'invertibilità locale garantisce che la derivata non si annulli mai e quindi che l'inversa sia olomorfa.

PROPOSIZIONE 8.2.2: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, f una funzione olomorfa su Ω e $z_0 \in \Omega$. Allora $f'(z_0) \neq 0 \iff$ esiste un aperto U con $z_0 \in U \subset \Omega$ tale che la restrizione $f_{|U}$ di f a U è iniettiva.*

Dimostrazione: In una direzione il risultato è immediata conseguenza del Teorema 8.2.1. Supponiamo che per $z_0 \in \Omega$ e per $r_1 > 0$ tale che $\mathbb{D} = \mathbb{D}(z_0, r_1) \subset \Omega$ si abbia che f è iniettiva su $\mathbb{D}$. Per assurdo supponiamo che $f'(z_0) = 0$. Dato che gli zeri di funzioni olomorfe sono isolati, per qualche r con $0 < r < r_1$, si ha $f'(z) \neq 0$ per ogni z tale che $0 < |z - z_0| < r$. D'altro canto per $|z - z_0| < r$, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2 + O(|z - z_0|^3) \\ &= f(z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2 + O(|z - z_0|^3) \end{aligned}$$

e quindi

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2 + O(|z - z_0|^3).$$

Allora la funzione $f - f(z_0)$, per l'iniettività di f su $\mathbb{D}$, ha in $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$ un unico zero in z_0 di molteplicità $\mu \geq 2$. Di conseguenza, per il principio dell'argomento, posto $\Gamma_r = \{z \mid |z - z_0| = r\}$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} \, dz = \mu \geq 2.$$

Sia $\delta = \min\{|f(z) - f(z_0)| \mid z \in \Gamma_r\} > 0$ e si consideri la funzione $\Phi\colon \mathbb{D}(f(z_0), \delta) \to \mathbb{Z}$ definita da

$$\Phi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z) - w} \, dz.$$

Dunque $\Phi(w)$, per il principio dell'argomento, è uguale alla somma delle molteplicità degli zeri della funzione $f - w$ nel disco $|z - z_0| < r$ e quindi assume solo valori interi. Inoltre è semplice verificare che Φ è continua. Infatti se $w_n \to w_0$ allora, passando al limite sotto il segno d'integrale si vede subito che $\Phi(w_n) \to \Phi(w_0)$. Dunque la Φ è costante:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z) - w} \, dz = \Phi(w) = \Phi(f(z_0)) = \mu \geq 2 \tag{8.2.1}$$

per ogni $w \in \mathbb{D}(f(z_0), \delta)$. Per il principio dell'argomento (8.2.1) implica che il numero degli zeri, contati con la loro molteplicità, della funzione $f(z) - w$ sul disco $\mathbb{D}(z_0, r)$ è maggiore o uguale a 2. D'altro canto, dato che $f'(z) \neq 0$ per ogni z tale che $0 < |z - z_0| < r$, se $w \in \mathbb{D}(f(z_0), \delta) \setminus \{f(z_0)\}$, la funzione $f(z) - w$ può avere solo zeri semplici sul disco $\mathbb{D}(z_0, r)$. Dunque per ogni $w \in \mathbb{D}(f(z_0), \delta) \setminus \{f(z_0)\}$ esisterebbero almeno due punti $z_1, z_2 \in \mathbb{D}(z_0, r)$ tali che

$$f(z_1) = w = f(z_2).$$

Questo contraddice il fatto che f sia iniettiva su $\mathbb{D} = \mathbb{D}(z_0, r_1)$. $\square$

I risultati precedenti danno immediatamente il seguente

TEOREMA 8.2.3: *Siano Ω e Ω' due aperti di $\hat{\mathbb{C}}$ e $f\colon \Omega \to \Omega'$ una applicazione olomorfa. Allora f è un biolomorfismo $\iff$ f è biettiva.*

Dimostrazione: Per definizione, se f è un biolomorfismo è una funzione biettiva. Supponiamo che f sia olomorfa e biettiva. Sia $z \in \Omega$ arbitrario e $w = f(z) \in \Omega'$. Basterà dimostrare che f^{-1} è olomorfa in un intorno di w. Se $z, w \in \mathbb{C}$, allora allora la Proposizione 8.2.2 implica che f' non si annulla in un intorno aperto di z. In questo caso Teorema 8.2.1 garantisce che f^{-1} è olomorfa in un intorno di w. Se $z \in \mathbb{C}$ e $w = \infty$ o $z = \infty$ e $w \in \mathbb{C}$ o Se $z = w = \infty$, si usa lo stesso argomento rispettivamente alle funzioni $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$, $z \mapsto f(\frac{1}{z})$, $z \mapsto \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$. $\square$

8.3. ll Teorema di rappresentazione di Riemann.

Scopo di questo paragrafo è di dimostrare il teorema di rappresentazione di Riemann: un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ connesso, semplicemente connesso con $\Omega \neq \mathbb{C}$ è biolomorfo al disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Vedremo poi come da questo risultato segua che tutte le proprietà elencate nel Teorema 5.4.5 siano tutte equivalenti al fatto che un aperto di $\mathbb{C}$ sia semplicemnte connesso.

Il Teorema di Riemann sarà immediata conseguenza del seguente seguente lemma che usa in modo cruciale il fatto che una funzione olomorfa su un aperto semplicemente connesso che non ha zeri ammette una radice quadrata olomorfa:

Lemma 8.3.1: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ con $\Omega \neq \mathbb{C}$ un aperto tale che ogni funzione olomorfa su Ω che non si annulla ammette una radice quadrata olomorfa. Sia $z_0 \in \Omega$. Esiste una funzione olomorfa F su Ω tale che*

(i) $F(z_0) = 0$ *e* $F'(z_0) > 0$*;*
(ii) F *è iniettiva;*
(iii) $F(\Omega) = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Dimostrazione: Denotiamo con $Hol(\Omega)$ l'insieme di tutte le funzioni olomorfe definite su Ω e sia

$$\Lambda = \{f \in Hol(\Omega) \mid f \,\text{è iniettiva}, f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0 \,\text{e}\, f(\Omega) \subset \mathbb{D}\}.$$

Dunque se $f \in \Lambda$ si ha $\sup\{|f(z)| \mid z \in \Omega\} < 1$ e quindi, per il teorema di Montel, se è non vuota, Λ è una famiglia normale ossia ogni successione contenuta in Λ ammette una sottosuccessione uniformemente convergente sui compatti. In particolare allora la chiusura $\overline{\Lambda}$ è un compatto nella topologia della convergenza uniforme sui compatti.

Per cominciare, dimostriamo che $\Lambda \neq \emptyset$.

Dato che $\Omega \neq \mathbb{C}$, esiste $b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Sia $g \in Hol(\Omega)$ tale che $g^2(z) = z - b$ per ogni $z \in \Omega$. E' chiaro allora che g è iniettiva visto che se $g(z_1) = g(z_2)$ si deve avere $z_1 - b = z_2 - b$. Inoltre, essendo non costante, g è aperta e quindi, per qualche $r > 0$ si deve avere $\mathbb{D}(g(z_0), r) \subset g(\Omega)$. Si ha

$$\mathbb{D}(-g(z_0), r) \cap g(\Omega) = \emptyset. \tag{8.3.1}$$

Infatti se esistesse $z \in \Omega$ con $g(z) \in \mathbb{D}(-g(z_0), r)$ allora

$$\mid -g(z) - g(z_0) \mid = \mid g(z) + g(z_0) \mid < r.$$

Dunque si avrebbe $-g(z) \in \mathbb{D}(g(z_0), r) \subset g(\Omega)$ e quindi $-g(z) = g(w)$ per qualche $w \in \Omega$. Ma allora si avrebbe anche $z - b = (g(z))^2 = (g(w))^2 = w - b$ ossia $z = w$. Pertanto seguirebbe che $g(z) = -g(z)$. Ma questo è possibile solo se $g(z) = 0$ che implica che $b = z \in \Omega$ contro l'ipotesi che $b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Se $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ denota la sfera di Riemann, da (8.3.1) si ha che

$$g(\Omega) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}(-g(z_0), r).$$

Sia T una trasformazione di Möbius tale che $T(\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}(-g(z_0), r)) = \mathbb{D}$ e si definisca $g_1 = T \circ g$. Se $g_1(z_0) = c \in \mathbb{D}$, sia ϕ_c un automorfismo di $\mathbb{D}$ tale che $\phi_c(c) = 0$. Si consideri $g_2 = \phi_c \circ g_1 = \phi_c \circ T \circ g$. Evidentemente g_2 è olomorfa su Ω con $g(\Omega) \subset \mathbb{D}$ e

$g_2(z_0) = 0$. Dato che g è iniettiva e $\phi_c \circ T$ è un biolomorfismo, g_2 è iniettiva. Infine, usando la Proposizione 7.3.2, si ha che $g_2'(z_0) = \rho e^{i\theta} \neq 0$. Allora $g_3 = e^{-i\theta} g_2 \in \Lambda$ e quindi $\Lambda \neq \emptyset$.

Studiamo ora la chiusura di Λ. Dimostreremo che $\overline{\Lambda} = \Lambda \cup \{0\}$.

La topologia sullo spazio delle funzioni olomorfe è quella della convergenza uniforme sui compatti e quindi basterà dimostrare che se f_n è una successione in Λ uniformemente convergente sui compatti di Ω a f, allora o $f \in \Lambda$ o $f \equiv 0$. Sia dunque f_n una successione in Λ uniformemente convergente sui compatti di Ω a f. Allora, per il Corollario 8.1.5 o f è olomorfa e iniettiva oppure f è costante. Dato che $f_n \in \Lambda$, per ogni n si ha

$$f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z_0) \geq 0.$$

Dunque, se f è costante, da $f(z_0) = 0$ segue che $f \equiv 0$. Se invece f è iniettiva , allora $f'(z_0) \neq 0$ per la Proposizione 8.2.2 e quindi, visto che $f'(z_0) \geq 0$, deve essere $f'(z_0) > 0$. Infine, dato che per ogni n si ha $f_n(\Omega) \subset \mathbb{D}$, segue che $f(\Omega) \subset \overline{\mathbb{D}}$. D'altra parte $f(\Omega) \cap \partial\mathbb{D} = \emptyset$ perché altrimenti, per il principio del massimo modulo, f dovrebbe essere costante. Pertanto $f(\Omega)$ è un aperto contenuto in $\mathbb{D}$ e quindi $f \in \Lambda$.

Possiamo dunque concludere la dimostrazione. Sia $\Phi\colon Hol(\Omega) \to \mathbb{C}$ l'applicazione definita da $\Phi(f) = f'(z_0)$. Evidentemente la funzione Φ è continua nella topologia della convergenza uniforme sui compatti. Inoltre Φ assume su $\overline{\Lambda}$ solo valori reali. Dato che è una famiglia normale ed è un chiuso, allora $\overline{\Lambda}$ è compatto nella topologia della convergenza uniforme sui compatti. Dunque Φ assume massimo su $\overline{\Lambda}$: esiste $F \in \overline{\Lambda}$ tale che

$$F'(z_0) = \Phi(F) \geq \Phi(g) = g'(z_0) \qquad \forall g \in \overline{\Lambda}. \tag{8.3.2}$$

Dato che $\Lambda \neq \emptyset$, segue che non può essere $F \equiv 0$ e quindi si deve avere che F è iniettiva, con $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) > 0$ e $F(\Omega) \subset \mathbb{D}$. Grazie al Teorema 8.2.3 basterà dimostrare che $F(\Omega) = \mathbb{D}$.

Supponiamo per assurdo che esista $w \in \mathbb{D} \setminus F(\Omega)$. Ovviamente $w \neq 0$. Allora

$$h(z) = \frac{F(z) - w}{1 - \overline{w}F(z)}$$

definisce una funzione olomorfa su Ω con $h(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$. Sia H una radice quadrata olomorfa di h. Dato che $F(\Omega) \subset \mathbb{D}$ e che h è ottenuta da F mediante composizione con un automorfismo di $\mathbb{D}$ si ha $h(\Omega) \subset \mathbb{D}$ e che h è iniettiva. Quindi anche $H(\Omega) \subset \mathbb{D}$ e H è iniettiva. Inoltre da $H^2 = h$ otteniamo

$$2H(z_0)H'(z_0) = (1- \mid w \mid^2)F'(z_0) > 0 \tag{8.3.3}$$

e quindi, in particolare, che $H(z_0) \neq 0$ e $H'(z_0) \neq 0$. Sia $G \in Hol(\Omega)$ la funzione definita da

$$G(z) = \frac{\mid H'(z_0) \mid}{H'(z_0)} \frac{H(z) - H(z_0)}{1 - \overline{H(z_0)}H(z)}.$$

Allora $G(z_0) = 0$ e, dato che G è ottenuta componendo H con un automorfismo di $\mathbb{D}$, si ha che G è iniettiva e $G(\Omega) \subset \mathbb{D}$. Dato che da (8.3.3) segue che

$$H'(z_0) = \frac{(1- \mid w \mid^2)F'(z_0)}{2H(z_0)}$$

e che $| H(z_0) |^2 = | h(z_0) | = | w |$, abbiamo

$$\begin{aligned} G'(z_0) &= \frac{| H'(z_0) |}{1- | H(z_0) |^2} = \frac{(1- | w |^2)F'(z_0)}{2\sqrt{| w |}} \frac{1}{1- | w |} = \frac{1+ | w |}{2\sqrt{| w |}} F'(z_0) \\ &= (1 + \frac{(1 - \sqrt{| w |})^2}{2\sqrt{| w |}}) F'(z_0) > F'(z_0). \end{aligned}$$

Ma allora $G \in \Lambda$ e $\Phi(G) > \Phi(F)$ contro l'ipotesi che F è un massimo su $\overline{\Lambda}$ per Φ. □

Possiamo ora enunciare

TEOREMA 8.3.2: (di rappresentazione di Riemann) *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso semplicemente connesso con $\Omega \neq \mathbb{C}$. Per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste una unica applicazione biolomorfa $F\colon \Omega \to \mathbb{D}$ tale che $F(z_0) = 0$ e $F'(z_0) > 0$.*

Dimostrazione: Dato che ogni funzione olomorfa su un dominio semplicemente connesso ha radice quadrata olomorfa, l'esistenza della funzione F è conseguenza del Lemma 8.3.1. Rimane dunque da dimostrare solo l'unicità. Questa è una semplice conseguenza del Lemma di Schwartz. Infatti siano $f, g\colon \Omega \to \mathbb{D}$ applicazioni biolomorfe con $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $f'(z_0), g'(z_0) > 0$, allora $f \circ g^{-1}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ è una automorfismo di $\mathbb{D}$ con $f \circ g^{-1}(0) = 0$. Dunque $f \circ g^{-1}(z) = cz$ con c numero complesso con $| c | = 1$. D'altro canto deve essere $(f \circ g^{-1})'(0) > 0$ e quindi $c = 1$ da cui segue che $f = g$. □

Infine si ricava immediatamente la seguente classificazione:

TEOREMA 8.3.3: *Sia $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ un aperto connesso semplicemente connesso. Allora vale una delle seguenti mutualmente esclusive affermazioni:*
(i) $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$;
(ii) Ω *è biolomorfo a* $\mathbb{C}$;
(iii) Ω *è biolomorfo al disco unitario.*

Dimostrazione: Il fatto che $(i), (ii), (iii)$ siano mutualmente esclusivi è ovvio dato che $\hat{\mathbb{C}}$ è compatto e che $\mathbb{C}$, per il teorema di Liouville, non può essere biolomorfo al disco unitario.

Se $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$ allora vale (i). Supponiamo che $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega = \{a\}$. Se $a = \infty$ allora $\Omega = \mathbb{C}$. Se $a \neq \infty$, si consideri la trasformazione di Möbius T definita da $T(z) = \frac{1}{z-a}$. Allora $T(\Omega) = \mathbb{C}$ e quindi vale (ii). Infine supponiamo che $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ contenga almeno due punti distinti a, b. Se uno di essi è ∞, allora $\Omega \subset \mathbb{C}$ è un aperto semplicemente connesso con $\Omega \neq \mathbb{C}$ e quindi vale (iii). Se $a \neq \infty$ e $b \neq \infty$, si consideri la trasformazione di Möbius S definita da $S(z) = \frac{1}{z-b}$. Allora $\hat{\mathbb{C}} \setminus S(\Omega)$ contiene almeno due punti e uno di questi è ∞ e pertanto $S(\Omega)$ e quindi Ω sono biolomorfi al disco unitario. Anche in questo caso vale (iii). □

Per concludere riassumiamo le conseguenze topologiche di quello che abbiamo dimostrato riguardo gli aperti semplicemente connessi in $\mathbb{C}$:

Teorema 8.3.4: *$\Omega \subset \mathbb{C}$, un aperto connesso. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) Ω *è semplicemente connesso;*
(ii) $\mathbb{C} \setminus \Omega$ *non ha componenti connesse compatte;*
(iii) $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ *è connesso;*
(iv) *per ogni catena* Γ *di curve chiuse* C^1 *a tratti di* Ω *e per ogni* $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ *si ha* $n(z, \Gamma) = 0$*;*
(v) *per ogni curva chiusa* C^1 *a tratti di* Ω *e per ogni funzione olomorfa* f *su* Ω *sia ha* $\int_\gamma f(z)dz = 0$*;*
(vi) *ogni funzione olomorfa su* Ω *ha una primitiva olomorfa su* Ω*;*
(vii) *ogni funzione olomorfa mai nulla su* A *ha una logaritmo olomorfo su* Ω*;*
(viii) *per ogni intero positivo* n*, ogni funzione olomorfa mai nulla su* Ω *ha una radice* n*-esima olomorfa su* Ω*;*
(ix) *ogni* $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ *con* $f(z) \neq 0$ *per ogni* $z \in \Omega$ *ha una radice quadrata olomorfa;*
(x) Ω *è omeomorfo al disco unitario.*

Dimostrazione: A questo punto rimane poco da dimostrare. L'equivalenza delle proprietà da (ii) a $(viii)$ sono contenute nel Teoerema 5.4.5. Evidentemente $(viii) \Rightarrow (ix)$. Inoltre $(ix) \Rightarrow (x)$ segue $\Omega \neq \mathbb{C}$ dal Lemma 8.3.1 se $\Omega \neq \mathbb{C}$. Se invece $\Omega = \mathbb{C}$, allora ad esempio l'applicazione $\phi(z) = \frac{z}{1+|z|}$ è un omeomorfismo (ovviamente non olomorfo!). Infine il fatto che $(x) \Rightarrow (i)$ è immediato. $\square$

8.4. Comportamento al bordo di biolomorfismi.

In questo paragrafo daremo condizioni di regolarità del bordo di un aperto che assicurano l'estensione dell'applicazione definita dal Teorema di Rappresentazione di Riemann a un un omeomorfismo delle chiusure. Prima di tutto diamo qualche definizione. Per cominciare in questo paragrafo, per brevità, un aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{C}$ si dirà un *dominio* di $\mathbb{C}$.

Definizione. Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}$. Un punto $p \in \partial\Omega$ si dice *facilmente accessibile* se esistono $r(p) > 0$ e funzioni continue $\theta_1, \theta_2 \colon (0, r(p)) \to \mathbb{R}$ tali che per $r \in (0, r(p))$ si ha $\theta_1(r) \neq \theta_2(r)$ e

$$\Omega \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - p| = r\} = \{z = p + re^{i\theta} \mid \theta \in (\theta_1(r), \theta_2(r))\}$$

ossia se $\Omega \cap \partial\mathbb{D}(p, r(p))$ è un arco di circonferenza per ogni $r \in (0, r(p))$ con estremi che dipendono con continuità da r.

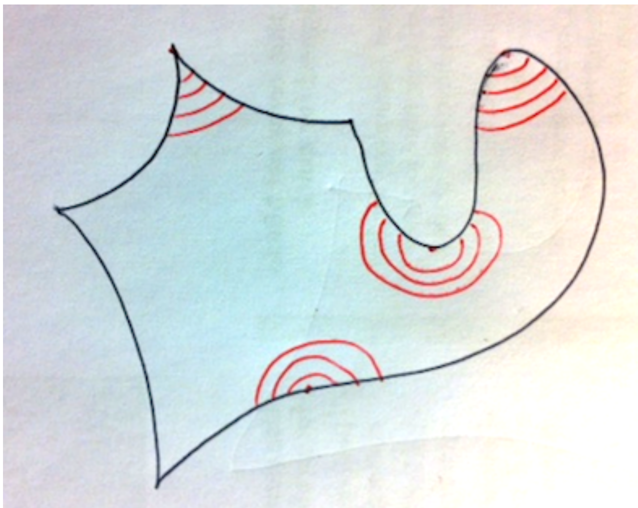

Fig. 8.1

Dunque si vede immediatamente ad esempio che per un poligono (Fig. 8.2),

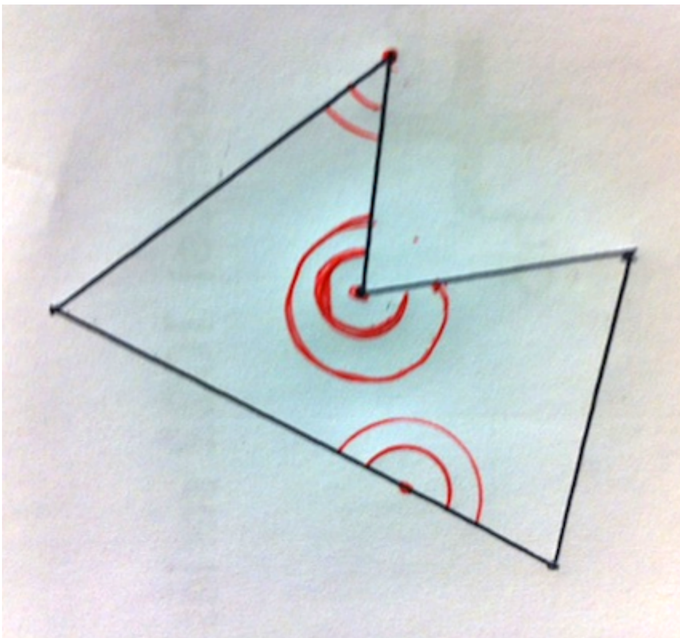

Fig. 8.2

che è un dominio che per ha per frontiera una curva lineare a tratti, tutti i punti della frontiera sono facilmente accessibili. Infatti in questo caso si possono scegliere le funzioni $\theta_1(r)$ e $\theta_2(r)$ costanti con $\theta_2(r) - \theta_1(r) = \pi$ se si prende un punto su un lato del poligono, che non sia un vertice, mentre se si prende un vertice la differenza $\theta_2(r) - \theta_1(r)$ sarà uguale all'angolo in quel vertice.

Si può dimostrare che lo stesso è vero per domini con frontiera C^1 a tratti. Ci limitiamo a dimostrarlo per *domini regolari* che ora definiamo:

Definizione. Un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ si dice *regolare* in $p \in \partial\Omega$ se esiste un intorno aperto $U \ni p$ e una *funzione definente* $\rho\colon U \to \mathbb{R}$ per $\partial\Omega$ in p ossia tale che

$$U \cap \Omega = \{z \in U \mid \rho(z) < 0\}, \quad U \cap \partial\Omega = \{z \in U \mid \rho(z) = 0\} \text{ e } d\rho(p) \neq 0.$$

Il dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ si dice *regolare* se è regolare in ogni $p \in \partial\Omega$.

Si vede subito che tutti i punti della frontiera di un dominio regolare sono facilmente accessibili:

Proposizione 8.4.1: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio regolare. Allora:*
(i) per ogni punto $p \in \partial\Omega$ esiste un intorno aperto $U \ni p = (x_0 + iy_0)$ tale che $U \cap \partial\Omega$ o è il grafico di una funzione $y = \phi(x)$ di classe C^1 definita in un intervallo contenente x_0 oppure è il grafico di una funzione $x = \psi(y)$ di classe C^1 definita in un intervallo contenente y_0;
(ii) ogni punto $p \in \partial\Omega$ è facilmente accessibile.

Dimostrazione: Il punto (i) è una semplice applicazione del teorema delle funzioni implicite. Infatti se $\rho\colon U \to \mathbb{R}$ è una funzione definente per $\partial\Omega$ in p, allora

$$0 \neq \rho(p) = d\rho_x(x_0, y_0)dx + \rho_y(x_0, y_0)dy.$$

Dunque almeno uno fra $\rho_x(x_0, y_0)$ e $\rho_y(x_0, y_0)$ deve essere diverso da zero. Se $\rho_y(x_0, y_0) \neq 0$ allora il teorema delle funzioni implicite garantisce che esiste una funzione $\phi\colon I \to J$ di classe C^1 fra intervalli aperti $I \ni x_0$ e $J \ni y_0$ tale che $y_0 = \phi(x_0)$ e $\rho_y(x, \phi(x)) = 0$ per $x \in I$ in modo che

$$(I \times J) \cap \partial\Omega = \{z = x + iy \mid y = \phi(x) \text{ per } x \in I\}. \tag{8.4.1}$$

Analogamente, se $\rho_x(x_0, y_0) \neq 0$, si ha che $\partial\Omega$, in un intorno di p, è grafico di una funzione della variabile y. Sia $p \in \partial\Omega$ un punto per il quale $\partial\Omega$, in un intorno di p, sia grafico di una funzione della variabile x ossia valga (8.4.1). Allora esiste un $r(p) > 0$ tale che $\mathbb{D}(p, r(p)) \subset I \times J$. Per ogni $r \in (0, r(p))$ siano $x_1(r) < x_2(r) \in I$ tali che $z_1(r) = x_1(r) + i\phi(x_1(r))$ e $z_2(r) = x_2(r) + i\phi(x_2(r))$ siano le due intersezioni (distinte) di $\partial\mathbb{D}(p, r(p))$ con $\partial\Omega$. I punti $z_1(r)$ e $z_2(r)$ sono funzioni di classe C^1 di r e quindi, per un'opportuna scelta della funzione argomento, anche le funzioni $\theta_1(r) = Arg(z_1(r) - p)$ e $\theta_2(r) = Arg(z_2(r) - p)$. Dunque per ogni $r \in (0, r(p))$

$$\Omega \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - p| = r\} = \{z = p + re^{i\theta} \mid \theta \in (\theta_1(r), \theta_2(r))\}$$

ossia $\Omega \cap \partial\mathbb{D}(p, r(p))$ è un arco di circonferenza per ogni $r \in (0, r(p))$. $\square$

Useremo il seguente risultato tecnico:

LEMMA 8.4.2: *Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}$ e $p \in \partial\Omega$ un punto facilmente accessibile. Sia $\{z_n\} \subset \Omega$ una successione convergente a p. Allora esiste una curva continua $\alpha : [0,1) \to \Omega$, una successione $\{t_n\} \subset [0,1)$ con $\lim_{n\to\infty} t_n = 1$ e $N > 0$ tali che se $n > N$ si ha $z_n = \alpha(t_n)$.*

Dimostrazione: Dato che p è facilmente accessibile, esistono $r(p) > 0$ e funzioni continue $\theta_1, \theta_2 \colon (0, r(p)) \to \mathbb{R}$ tali che per $r \in (0, r(p))$ si ha $\theta_1(r) \neq \theta_2(r)$ e

$$\Omega \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - p| = r\} = \{z = p + re^{i\theta} \mid \theta \in (\theta_1(r), \theta_2(r))\}.$$

Sia $N > 0$ intero tale che se $n \geq N$ si ha $r_n = |z_n - p| < r(p)$. Per n intero positivo, si ponga:

$$z_n = p + r_n e^{i\phi_n}, \qquad t_n = \frac{n-1}{n}, \qquad t'_n = t_n + \frac{1}{3n(n+1)}, \qquad t''_n = t_n + \frac{2}{3n(n+1)}$$

$$\Phi_n(t) = [1 - 3n(n+1)(t - t_n)]\phi_n + 3n(n+1)(t - t_n)\frac{\theta_1(r_n) + \theta_2(r_n)}{2}.$$

$$R(t) = [1 - 3n(n+1)(t - t'_n)]r_n + 3n(n+1)(t - t'_n)r_{n+1},$$

$$\Psi_n(t) = [1 - 3n(n+1)](t - t''_n)\frac{\theta_1(r_n) + \theta_2(r_n)}{2} + 3n(n+1)(t - t''_n)\phi_{n+1}.$$

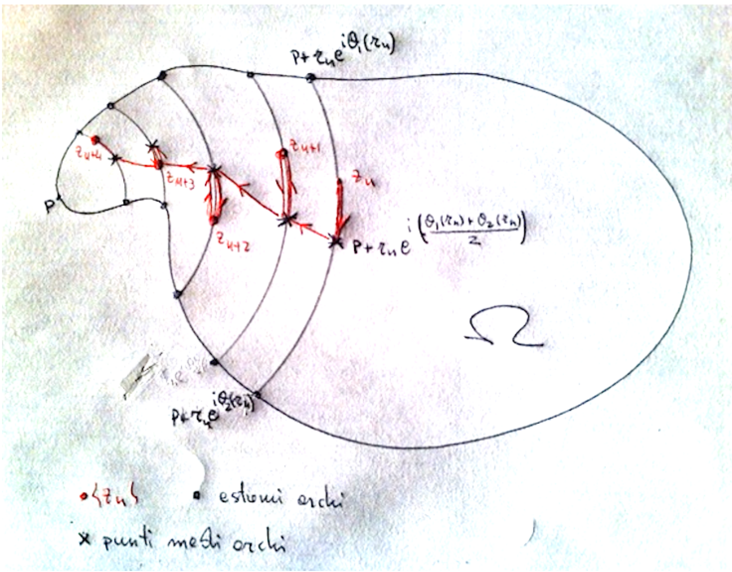

Fig. 8.3

Definiamo $\alpha : [0,1) \to \Omega$ ponendo $\alpha(t) = z_N$ se $t \in [0, t_N]$ e per $n \geq N$ (vedi Fig. 8.3)

$$\alpha(t) = \begin{cases} p + r_n e^{\Phi_n(t)} & \text{se } t \in [t_n, t'_n] \\ p + R(t) e^{i\frac{\theta_1(r_n)+\theta_2(r_n)}{2}} & \text{se } t \in [t'_n, t''_n] \\ p + r_n e^{\Psi_n(t)} & \text{se } t \in [t''_n, t_{n+1}]. \end{cases}$$

La curva α è quella richiesta. $\square$

Il risultato di estensione che vogliamo provare è il seguente

Teorema 8.4.3: *Sia Ω un dominio limitato semplicemente connesso tale che ogni punto di $\partial\Omega$ sia facilmente accessibile. Allora un biolomorfismo $F\colon\Omega \to \mathbb{D}$ da Ω al disco unitario $\mathbb{D}$ si estende a un omeomorfismo $\overline{F}\colon\overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}$.*

Dimostrazione: Sia $F\colon\Omega \to \mathbb{D}$ un biolomorfismo. Per $p \in \partial\Omega$ vogliamo definire $\overline{F}(p) \in \partial\mathbb{D}$ dimostrando che esiste

$$\lim_{\Omega\ni z\to p} F(p) = w := \overline{F}(p) \in \partial\mathbb{D}.$$

Cominciamo osservando che se $\{z_n\}$ è una successione convergente a $p \in \partial\Omega$ tale che $\lim_{n\to\infty} F(z_n) = w$ allora necessariamente $w \in \partial\mathbb{D}$. Necessariamente deve essere $w \in \overline{\mathbb{D}}$. Si può escludere che $w \in \mathbb{D}$ con il seguente argomento. Si consideri la successione di funzioni $g_n(z) = F(z)-F(z_n)$. È immediato verificare che g_n converge uniformemente sui compatti di Ω alla funzione $g = F - w$. Allora $w \in \mathbb{D}$ se e solo se esiste $z \in \Omega$ tale che $F(z) = w$ ossia se la funzione g ha uno zero in Ω. Sia $\{\Omega_k\}$ una successione di aperti tali che per ogni k si abbia $\Omega_k \subset \overline{\Omega_k} \subset \Omega_{k+1}$ e con $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$. Supponiamo che esista uno zero z per la funzione $g = F - w$. Allora esiste k_0 tale che $z \in \Omega_{k_0}$. Dato che z_n converge a $p \in \partial\Omega$, esiste N tale che se $n > N$ si deve avere $z_n \notin \overline{\Omega_{k_0}}$. Ma allora la successione $\{g_n\}_{n>N}$ converge uniformemente sui compatti di Ω_{k_0} alla funzione (non costante!) $g = F - w$. Ma g_n, per ogni $n > N$, non ha zeri in Ω_{k_0} mentre g ne avrebbe uno: questo, per il teorema di Hurwitz non è possibile.

Supponiamo ora che $\{z_n\}$, $\{\zeta_n\}$ siano successioni in Ω convergenti a $p \in \partial\Omega$ e tali che

$$\lim_{n\to\infty} F(z_n) = w_1 \in \partial\mathbb{D} \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} F(\zeta_n) = w_2 \in \partial\mathbb{D}$$

Dimostriamo ora che $w_1 = w_2$.

Siano $\alpha\colon[0,1) \to \Omega$ e $\beta\colon[0,1) \to \Omega$ curve continue tali che, se $t_n = \frac{n}{n+1}$ per n grande abbastanza, si abbia $\alpha(t_n) = z_n$ e $\beta(t_n) = \zeta_n$.

Per ogni $r \in (0, r(p))$ si denoti:

$$z(r) = \partial\mathbb{D}(p,r) \cap Im(\alpha) \qquad \text{e} \qquad \zeta(r) = \partial\mathbb{D}(p,r) \cap Im(\beta).$$

Se $C_r = \Omega \cap \partial\mathbb{D}(p,r)$ e $C'_r \subset C_r$ è la porzione di arco con estremi $z(r) = p + re^{iA(r)}$ e $\zeta(r) = p + re^{iB(r)}$(in questo ordine), allora

$$F(\zeta(r)) - F(z(r)) = \int_{C'(r)} F'(z)dz.$$

Dunque:

$$|F(\zeta(r)) - F(z(r))| = \left|\int_{C'(r)} F'(z)dz\right| \le \int_{A(r)}^{B(r)} \left|F'(re^{i\theta})\right| rd\theta \le \int_{\theta_1(r)}^{\theta_1(r)} \left|F'(re^{i\theta})\right| rd\theta,$$

e quindi, usando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz per integrali:

$$|F(\zeta(r)) - F(z(r))|^2 \le \left(\int_{\theta_1(r)}^{\theta_1(r)} \left|F'(re^{i\theta})\right| rd\theta\right)^2$$

$$\le \left(\int_{\theta_1(r)}^{\theta_1(r)} \left|F'(re^{i\theta})\right|^2 d\theta\right)\left(\int_{\theta_1(r)}^{\theta_1(r)} r^2 d\theta\right)$$

$$\le 2\pi r \int_{\theta_1(r)}^{\theta_1(r)} \left|F'(re^{i\theta})\right|^2 rd\theta.$$

Ma allora, dividendo per r e integrando otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_0^{r(p)} \frac{|F(\zeta(r)) - F(z(r))|^2}{r} dr &\leq 2\pi \int_0^{r(p)} \int_{\theta_1(r)}^{\theta_1(r)} \left|F'(re^{i\theta})\right|^2 r d\theta dr \\ &\leq 2\pi \int_\Omega |F'(z)|^2 dxdy = 2\pi Area(\mathbb{D})\end{aligned} \tag{8.4.2}$$

dove l'ultima eguaglianza segue dal fatto che $|F'(z)|^2$ è il determinante del diffeomorfismo $z \mapsto F(z)$ e dalla formula del cambiamento di coordinate per integrali multipli. D'altra parte, affinché il primo integrale che compare in (8.4.2) sia finito, è necessario che

$$0 = \lim_{r \to 0} F(\zeta(r)) - F(z(r)) = \lim_{n \to \infty} F(\zeta_{(r)n}) - F(z_n).$$

Se z_n è una successione che converge a $p \in \partial\Omega$, allora necessariamente $F(z_n)$ ha limite per $n \to \infty$ e il limite è un punto $w \in \partial\Omega$. Infatti $\overline{\{F(z_n)\}}$ consiste dei punti della successione $\{F(z_n)\}$ e dei limiti delle sue sottosuccessioni convergenti. Ma abbiamo appena dimostrato che queste sottosuccessioni convergono a un unico punto $w \in \partial\Omega$ e quindi, necessariamente, $\lim_{n\to\infty} F(z_n) = w$. Poniamo come annunciato, per definizione $w = \overline{F}(p)$. In questo modo si definisce un'estensione $\overline{F}: \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}$ di F che è continua per costruzione. Dato che ogni punto di $\partial\mathbb{D}$ è facilmente accessibile, con lo stesso argomento, si definisce un'estensione continua $\overline{F^{-1}}: \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega}$ di F^{-1}. Dato che $F^{-1} \circ F = Id_\Omega$ e $F^{-1} \circ F^{-1} = Id_\mathbb{D}$, per continuità deve essere $\overline{F^{-1}} \circ \overline{F} = Id_{\overline{\Omega}}$ e $\overline{F^{-1}} \circ \overline{F^{-1}} = Id_{\overline{\mathbb{D}}}$ e la dimostrazione è completa. □

Come corollario immediato, abbiamo il seguente:

Teorema 8.4.4: *Siano Ω_1, Ω_2 domini limitati semplicemente connessi tale che ogni punto di $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$ sia facilmente accessibile. Allora un biolomorfismo $F: \Omega_1 \to \Omega_2$ si estende a un omeomorfismo $\overline{F}: \overline{\Omega_1} \to \overline{\Omega_2}$.*

Dimostrazione: Siano $z_0 \in \Omega_1$, $w_0 = F(z_0 \in \Omega_2$ e $G_1: \Omega_1 \to \mathbb{D}$ e $G_2: \Omega_2 \to \mathbb{D}$ gli unici bilomorfismi tali che $G_1(z_0) = 0, G_1'(z_0) > 0$ e $G_2(w_0) = 0, G_2'(z_0) > 0$. Si considerino:

$$g_1(z) = \frac{|F'(z_0)|}{F'(z_0)} G_2(F(z)) \quad \text{e} \quad g_2(w) = \frac{|(F^{-1})'(w_0)|}{(F^{-1})'(w_0)} G_1((F^{-1})(w)).$$

Allora $g_1: \Omega_1 \to \mathbb{D}$ e $2_2: \Omega_2 \to \mathbb{D}$ sono bilomorfismi tali che $g_1(z_0) = 0, g_1'(z_0) > 0$ e $g_2(w_0) = 0, g_2'(z_0) > 0$. Allora, per l'unicità dell'applicazione di Riemann, deve essere: $g_1 = G_1$ e $g_2 = G_2$. Per il teorema 8.4.3 le applicazioni $g_1 = G_1$ e $g_2 = G_2$ si estendono a omeomorfismi delle chiusure e quindi segue (i dettagli sono lasciati per esercizio) che F e F^{-1} si estendono continue sulle chiusure e la tesi segue. □