

## CAPITOLO 4

# Formula di Cauchy globale, Singularità, Residui

### 4.1. La formula di Cauchy per funzioni di classe $C^1$

Dopo aver dimostrato che le funzioni olomorfe sono di classe  $C^1$ , anzi in effetti di classe  $C^\infty$ , possiamo approfittare in pieno della formula di Gauss-Green, che ricordiamo, nella notazione complessa presentata nel Teorema 3.1.7 ci assicura che per un aperto  $A \subset \mathbb{C}$  limitato tale che la frontiera  $\partial A$  di  $A$  è unione disgiunta finita di curve semplici chiuse  $C^1$  a tratti, se  $f \in C^1(\overline{A})$  è una funzione a valori complessi, allora

$$\int_{\partial A} f(z) dz = 2i \int_A f_{\bar{z}}(z) dx dy. \quad (4.1.1)$$

e quindi, di conseguenza, implica il Teorema di Cauchy 3.1.8 che asserisce che se  $f \in C^1(\overline{A})$  è olomorfa su  $A$ , allora

$$\int_{\partial A} f(z) dz = 0. \quad (4.1.2)$$

In particolare dal Teorema 3.1.7 si ottiene la seguente utilissima *formula integrale di Cauchy per funzioni  $C^1$* :

**TEOREMA 4.1.1:** *Sia  $A \subset \mathbb{C}$  un aperto limitato tale che la frontiera  $\partial A$  di  $A$  sia unione disgiunta finita di curve semplici chiuse  $C^1$  a tratti. Se  $f \in C^1(\overline{A})$ , allora, denotando  $\zeta = \xi + i\eta$ , per ogni  $z \in A$  si ha*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_A \frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta. \quad (4.1.3)$$

*Dimostrazione:* Sia  $z \in A$  fissato e sia  $r > 0$  tale che  $\mathbb{D}_r = \mathbb{D}(z, r) \subset \overline{\mathbb{D}(z, r)} \subset A$ . Se si definisce  $A_r = A \setminus \overline{\mathbb{D}_r}$  allora, come catene,  $\partial A_r = \partial A - \partial \mathbb{D}_r$ , dove nell'ultima eguaglianza si è tenuto conto dell'orientazione. Allora applicando la formula di Gauss-Green, si ottiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_{A_r} \frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta. \quad (4.1.4)$$

Si osservi che la funzione  $\frac{f_{\bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z}$  è continua su  $\overline{A_r}$  per ogni  $r > 0$ , che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{A_r} \frac{f_{\bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta = \frac{1}{\pi} \int_A \frac{f_{\bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \quad (4.1.5)$$

e che il limite è finito. Inoltre

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = f(z)$$

mentre

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} L(\partial \mathbb{D}_r) \max_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} = \max_{\partial \mathbb{D}_r} |f(\zeta) - f(z)|.$$

Dunque

$$f(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (4.1.6)$$

e quindi, da (4.1.4), (4.1.5), (4.1.6), si ottiene

$$f(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_A \frac{f_{\bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta.$$

□

Dal Teorema 4.1.1 segue immediatamente la *formula integrale di Cauchy per funzioni olomorfe*:

**TEOREMA 4.1.2:** *Sia  $A \subset \mathbb{C}$  un aperto limitato tale che la frontiera  $\partial A$  di  $A$  sia unione disgiunta finita di curve semplici chiuse  $C^1$  a tratti. Se  $f \in C^1(\overline{A})$  è una funzione olomorfa su  $A$ , allora per ogni  $z \in A$  e  $n \geq 0$  si ha*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (4.1.7)$$

Concludiamo il paragrafo con un'altra semplice conseguenza del Teorema 4.1.1 che è rivolta a possibili applicazioni per funzioni solo di classe  $C^1$ :

**COROLLARIO 4.1.3:** *Sia  $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione di classe  $C^1$  a supporto compatto ossia tale che  $\text{supp}(\phi) = \{z \in \mathbb{C} \mid \phi(z) \neq 0\}$  è un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{C}$ . Allora per ogni  $z \in \mathbb{C}$  si ha*

$$\phi(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\phi_{\bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta. \quad (4.1.8)$$

*Dimostrazione:* Per  $z \in \mathbb{C}$ , sia  $\mathbb{D}$  un disco aperto tale che  $\text{supp}(\phi) \cup \{z\} \subset \mathbb{D}$ . Dato che  $\phi = 0$  su  $\partial \mathbb{D}$  e  $\phi_{\bar{z}} = 0$  sul complemento di  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ , la conclusione è immediata da (4.1.3). □

## 4.2. Sviluppi di Laurent

Come, utilizzando la formula di Cauchy per i dischi abbiamo ottenuto lo sviluppo in serie potenze di una funzione olomorfa nel disco, in questo paragrafo, utilizzando la formula di Cauchy più generale nel caso di anelli, faremo vedere come sia possibile ottenere uno sviluppo in serie di potenze in presenza di una singolarità di una funzione olomorfa. L'idea chiave è di cercare uno sviluppo che coinvolga sia potenze con esponente positivo sia potenze con esponente negativo. Siano  $a \in \mathbb{C}$  e  $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ . Sia

$$A(a, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - a| < r_2\}$$

la corona circolare centrata in  $a$  con raggi  $r_1, r_2$ . Utilizzando la formula di Cauchy dimostreremo che una funzione olomorfa  $f$  su una corona circolare  $A(a, r_1, r_2)$  ammette uno sviluppo in serie di Laurent per  $z \in A(a, r_1, r_2)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Precisamente abbiamo il seguente

**TEOREMA 4.2.1:** *Siano  $a \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$  e  $f$  una funzione olomorfa sulla corona circolare  $A(a, r_1, r_2)$ . Allora per  $z \in A(a, r_1, r_2)$  si ha*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (4.2.1)$$

dove la serie (4.2.1) converge uniformemente sui compatti contenuti in  $A(a, r_1, r_2)$ . Inoltre i coefficienti  $c_n$  che compaiono in (4.2.1) sono unicamente determinati da

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad (4.2.2)$$

con  $r_1 < r < r_2$  arbitrario.

*Dimostrazione:* Per semplificare le notazioni, diamo la dimostrazione per  $a = 0$  e denotiamo  $A(r_1, r_2) = A(0, r_1, r_2)$ . Preliminarmente osserviamo che i coefficienti  $c_n$  definiti in (4.2.2) non dipendono da  $r$ . Infatti, dato che la funzione  $\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$  è olomorfa su  $A(r_1, r_2)$ , se  $r, r' \in (r_1, r_2)$  con  $r' < r$ , allora, per il Teorema di Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = 0.$$

Sia  $z \in A(r_1, r_2)$ . Allora esistono numeri  $\rho_1, \rho_2$  tali che  $r_1 < \rho_1 < |z| < \rho_2 < r_2$ . Allora, la formula integrale di Cauchy assicura che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Come nel caso degli sviluppi in serie di Taylor, cercheremo di sviluppare in serie gli integrali che appaiono nella formula di Cauchy.

Sia allora  $|\zeta| = \rho_2$ . Se  $|z| < \rho_2 < r_2$  allora  $\left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1$  e si ha:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

e la serie converge uniformemente sul compatto  $\{|\zeta| = \rho_2\}$ . Integrando la serie, possiamo allora concludere che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right] z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

dove la serie converge uniformemente in ogni compatto contenuto in  $|z| < \rho_2$  e quindi, dato che  $\rho_2 < r_2$  è arbitrario, in ogni compatto contenuto in  $|z| < r_2$ .

Supponiamo ora che  $|\zeta| = \rho_1$ . Allora, per  $r_1 < \rho_1 < |z|$ , si ha  $\left|\frac{\zeta}{z}\right| < 1$  e quindi:

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m}{z^{m+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

dove si è posto  $n = -m - 1$ . Si osservi che la serie converge uniformemente sul compatto  $\{|\zeta| = \rho_1\}$ . Integrando la serie, possiamo allora concludere che

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_1} \left[ \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n \right] d\zeta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right] z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n \end{aligned}$$

dove la serie converge uniformemente in ogni compatto contenuto  $|z| > \rho_1$  e quindi, dato che  $r_1 < \rho_1$  è arbitrario, in ogni compatto contenuto in  $|z| > r_1$ . Dunque possiamo concludere che per ogni  $z \in A(r_1, r_2)$  sia ha

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

dove i  $c_n$  sono dati dalla (4.2.2) e che la serie converge uniformemente sui compatti contenuti in  $A(r_1, r_2)$ .

Rimane da dimostrare che i coefficienti di una serie di Laurent sono unicamente determinati. Supponiamo che lo sviluppo in serie di Laurent di una funzione olomorfa  $f$  su  $A(r_1, r_2)$  sia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Dato che

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

se  $r_1 < r < r_2$ , per ogni  $m \in \mathbb{Z}$  abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{m+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi r^m} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-im\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r^m} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^n e^{i(n-m)\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{n-m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = a_m. \end{aligned}$$

□

### 4.3. Singolarità di funzioni olomorfe e funzioni meromorfe

In questo paragrafo ci occuperemo di funzioni olomorfe con singolarità isolate ossia olomorfe sul complemento di un sottoinsieme discreto di un aperto. Cominciamo definendo la nozione di funzione meromorfa:

**DEFINIZIONE 4.3.1:** Sia  $A \subset \mathbb{C}$  un aperto. Una *funzione meromorfa* su  $A$  è una funzione olomorfa  $f: A \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$ , dove  $E$  è un sottoinsieme discreto di  $A$ , tale che per ogni punto  $a \in A$  esistono un disco  $\mathbb{D}_a = \mathbb{D}(a, r)$  tale che  $\mathbb{D}_a \subset A$  e  $\mathbb{D}_a \cap E \subset \{a\}$  e due funzioni  $g, h$  olomorfe su  $\mathbb{D}_a$ , con  $h$  non identicamente nulla, tali che si abbia  $hf = g$  su  $\mathbb{D}_a \setminus \{a\}$ . Gli elementi dell'insieme  $E$  si dicono *poli* di  $f$ .

In parole povere, una funzione meromorfa è una funzione olomorfa sul complemento di un insieme discreto che localmente si può scrivere come quoziente di due funzioni olomorfe. È inoltre evidente dalla definizione che per verificare che una funzione è meromorfa si procede localmente. Infatti se  $A \subset \mathbb{C}$  un aperto e  $f$  è una funzione a valori complessi definita sul complemento in  $A$  di un insieme discreto, allora  $f$  è una funzione meromorfa se per ogni punto  $a \in A$  esiste un intorno aperto  $V$  tale che o  $f$  ha una estensione olomorfa su tutto  $V$  oppure  $f$  è meromorfa su  $V$ .

Ovviamente una funzione olomorfa è meromorfa: per insieme  $E$  dei poli si può scegliere un arbitrario insieme discreto e si prendono  $h \equiv 1$  e  $g \equiv f$ .

Un esempio più interessante è dato dalle funzioni razionali. Siano  $P, Q \in \mathbb{C}[z]$  due polinomi complessi, e supponiamo che  $Q(z) = b(z - b_1)^{m_1} \dots (z - b_k)^{m_k}$  dove  $b_1, \dots, b_k$  sono gli zeri di  $Q$  di molteplicità rispettivamente  $m_1, \dots, m_k$ . Allora la funzione  $f = \frac{P}{Q}$  è olomorfa sul complemento in  $\mathbb{C}$  dell'insieme discreto  $E = \{b_1, \dots, b_k\}$ . Ovviamente nell'intorno di ogni punto si ha  $Qf = P$  e quindi la funzione  $f$  è meromorfa su  $\mathbb{C}$  con poli esattamente gli zeri del polinomio  $Q$ . È inoltre semplice avere informazioni sullo sviluppo di Laurent della funzione  $f$  centrato in uno dei poli. Infatti, fissato uno dei suoi poli  $b_j$ , sia  $\mathbb{D}$  un disco centrato in  $b_j$  che non contiene altri poli di  $f$ . Allora per  $z \in \mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{b_j\}$  si ha

$$f(z) = \frac{1}{(z - b_j)^{m_j}} g(z)$$

dove  $g$  è una funzione olomorfa su  $\mathbb{D}$ . Allora, dato che  $g$  ha uno sviluppo in serie di Taylor centrato in  $b_j$  che converge uniformemente sui compatti contenuti in  $\mathbb{D}$ , si ha per  $z \in \mathbb{D}^*$ :

$$f(z) = \frac{1}{(z - b_j)^{m_j}} g(z) = \frac{1}{(z - b_j)^{m_j}} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{c}_k (z - b_j)^k = \sum_{n=-m_j}^{\infty} c_n (z - b_j)^n$$

dove si è posto  $c_n = \hat{c}_{n+m_j}$ . In particolare la serie di Laurent di una funzione razionale centrata in un polo ha solo un numero finito di termini con esponente negativo. Questa è una caratteristica precisa dei poli di una funzione meromorfa:

**TEOREMA 4.3.1:** Sia  $a \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{D}$  un disco centrato in  $a$  e  $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{a\}$ . Sia  $f$  una funzione olomorfa su  $\mathbb{D}^*$  e sia  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$  il suo sviluppo di Laurent centrato in  $a$ . Allora  $f$  è meromorfa su  $\mathbb{D}$  se e solo se esiste un intero positivo  $N \geq 0$  tale che  $c_n = 0$  per ogni  $n < -N$ .

*Dimostrazione:* Supponiamo che  $f$  sia meromorfa su  $\mathbb{D}$ . Allora esistono un disco  $U$  centrato in  $a$  e funzioni olomorfe  $g, h$  su  $U$  con  $h \not\equiv 0$ , tali che su  $U^* = U \setminus \{a\}$  si ha  $hf = g$ . Dato che  $h \not\equiv 0$ , per qualche intero  $N \geq 0$  si ha  $h(z) = (z - a)^N \phi(z)$  dove  $\phi$  è una funzione olomorfa che, a meno di prendere  $U$  con un raggio un po' più piccolo, non ha zeri in  $U$ . La funzione  $\frac{g}{\phi}$  è olomorfa su  $U$  e ha uno sviluppo in serie di Taylor uniformemente convergente sui compatti contenuti in  $U$ :

$$\frac{g(z)}{\phi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - a)^k.$$

Dunque, lo sviluppo in serie di Laurent di  $f$  su  $U^*$ , e quindi su  $\mathbb{D}^*$  è dato da

$$f(z) = (z - a)^{-N} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - a)^k = \sum_{n=-N}^{\infty} \tilde{a}_n (z - a)^n$$

dove si è posto  $\tilde{a}_n = a_{n+N}$  e quindi la prima implicazione è dimostrata.

Viceversa se, per  $z \in \mathbb{D}^*$  vale lo sviluppo  $f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z - a)^n$ , allora  $(z - a)^N f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-N} (z - a)^n$  è una funzione olomorfa su  $\mathbb{D}$  e quindi  $f$  è meromorfa su  $\mathbb{D}$ .  $\square$

Come immediata conseguenza, deduciamo la seguente caratterizzazione delle funzioni meromorfe:

**COROLLARIO 4.3.2:** *Siano  $A \subset \mathbb{C}$  un aperto e  $E \subset A$  un sottoinsieme discreto. Sia  $f: A \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa. Allora  $f$  è una funzione meromorfa se e solo se, per ogni  $a \in E$ , lo sviluppo in serie di Laurent centrato in  $a$  ha solo numero finito di termini con esponente negativo.*

**DEFINIZIONE 4.3.2:** Sia  $f$  una funzione meromorfa e sia  $a$  un suo polo. Sia  $f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z - a)^n$  il suo sviluppo di Laurent dove  $c_{-N} \neq 0$ . Il numero  $N = \text{ord}_a(f)$  si dice ordine del polo  $a$ .

**OSSERVAZIONE.** Se per un polo  $a$  di una funzione meromorfa  $f$  si ha  $\text{ord}_a(f) = 0$ , allora  $a$  è una singolarità removibile per  $f$ .

Una caratterizzazione delle funzioni meromorfe più esplicita, in termini di limiti di funzioni, si ottiene con un poco più di lavoro:

**TEOREMA 4.3.3:** *Siano  $A \subset \mathbb{C}$  un aperto e  $E \subset A$  un sottoinsieme discreto. Sia  $f: A \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa. Allora  $f$  è una funzione meromorfa se e solo se, per ogni  $a \in E$ , vale una delle due seguenti condizioni:*

- (i) *Esiste un intorno aperto  $U$  di  $a$  tale che  $f|_{U \setminus \{a\}}$  è una funzione limitata (e in questo caso esiste  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$  e  $f$  si estende olomorficamente su tutto  $U$ ).*
- (ii)  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$ .

*Dimostrazione:* Se si verifica (i) allora, per il Teorema di estensione di Riemann,  $f$  ha un'estensione olomorfa su  $a$  e quindi in particolare la serie di Laurent di  $f$  centrata in  $a$  non ha termini con potenze di esponente negativo. Se si verifica (ii) invece, allora esiste un intorno aperto  $V$  di  $a$  tale che, se  $z \in V \setminus \{a\}$ , allora  $|f(z)| > 1$ . Dunque la funzione  $g = 1/f$  è olomorfa e limitata su  $V \setminus \{a\}$  e quindi si estende a una funzione, che chiamiamo ancora  $g$ , olomorfa su tutto  $V$ . Ma allora  $f$  è meromorfa su  $V$  dato che per  $z \in V \setminus \{a\}$  si ha  $g(z)f(z) = 1$ .

Assumiamo viceversa che  $f$  sia meromorfa e sia  $E$  l'insieme dei poli di  $f$ . Se  $f \equiv 0$  non vi è nulla da dimostrare. Altrimenti sia  $a \in E$ ; esistono un intorno aperto  $U$  di  $a$  tale che  $U \cap E = \{a\}$  e due funzioni  $g, h$  olomorfe su  $U$ , con  $h \not\equiv 0$ , tali che si abbia  $hf = g$  su  $U^* = U \setminus \{a\}$ . Dato che  $h \not\equiv 0$  e  $f \not\equiv 0$  allora anche  $g \not\equiv 0$  e quindi per due interi  $h, k \geq 0$  e due funzioni  $\phi, \psi$  olomorfe su  $U$  e tali che  $\phi(a), \psi(a) \neq 0$ , si ha

$$h(z) = (z - a)^l \phi(z) \text{ e } g(z) = (z - a)^k \psi(z) \quad \forall z \in U.$$

Ma allora per  $z \neq a$  vicino ad  $a$  abbiamo

$$f(z) = (z - a)^{k-l} \frac{\psi(z)}{\phi(z)}$$

Se  $k - l \geq 0$ , allora  $f$  è limitata in un intorno di  $a$ , mentre, se  $k - l < 0$ , allora  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$ .  $\square$

Per come è stata costruita la topologia sulla sfera di Riemann, dal Teorema 4.3.3 segue immediatamente il seguente:

**TEOREMA 4.3.4:** *Siano  $A \subset \mathbb{C}$  un aperto e  $E \subset A$  un sottoinsieme discreto. Sia  $f: A \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa. Allora  $f$  è una funzione meromorfa se e solo se esiste una funzione continua  $\hat{f}: A \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  tale che  $\hat{f}|_{A \setminus E} \equiv f$*

Vogliamo ora investigare un ultimo tipo di singolarità isolata per una funzione olomorfa.

**DEFINIZIONE 4.3.3:** Siano  $A$  un aperto,  $a \in A$  un suo punto e  $f$  una funzione olomorfa su  $A \setminus \{a\}$ . Se  $f$  non è meromorfa su  $A$ , il punto  $a$  si dice *singolarità essenziale* di  $f$ .

È immediato riconoscere le singolarità essenziali dalla serie di Laurent: occorre che ci siano infiniti termini con potenze di esponente negativi. Questo fatto suggerisce anche come costruire esempi. Per costruire una funzione con singolarità essenziale nell'origine, basta prendere una funzione trascendente (ossia intera non polinomiale), che quindi ha sviluppo in serie di potenze centrata nell'origine con raggio di convergenza infinito e comporla con l'applicazione  $z \mapsto \frac{1}{z}$ . Per esempio la funzione  $e^{\frac{1}{z}}$  ha singolarità essenziale nell'origine. Infatti, per  $z \neq 0$ ,

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^n}{(-n)!}$$

dove l'ultima serie converge uniformemente sui compatti contenuti in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Abbiamo infatti il seguente



TEOREMA 4.3.5: (di Casorati-Weierstass) *Siano  $A$  un aperto,  $a \in A$  un suo punto e  $f$  una funzione olomorfa su  $A \setminus \{a\}$ . Se  $a$  è una singolarità essenziale di  $f$ , allora per ogni  $r > 0$  tale che  $\mathbb{D}(a, r) \subset A$ , se  $\mathbb{D}_r^* = \mathbb{D}(a, r) \setminus \{a\}$ , l'insieme  $f(\mathbb{D}_r^*)$  è denso in  $\mathbb{C}$ .*

*Dimostrazione:* Supponiamo che per qualche  $r > 0$  tale che  $\mathbb{D}(a, r) \subset A$  l'insieme  $f(\mathbb{D}_r^*)$  non sia denso in  $\mathbb{C}$ . Allora esiste  $c \in \mathbb{C}$  e  $\delta > 0$ , tale che  $|f(z) - c| \geq \delta$  per ogni  $z \in \mathbb{D}_r^*$ . Allora la funzione  $g$  definita da  $g(z) = \frac{1}{f(z) - c}$  è olomorfa su  $\mathbb{D}_r^*$  e limitata dato che, per  $z \in \mathbb{D}_r^*$ , si ha

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - c|} \leq \frac{1}{\delta}.$$

Allora per il Teorema di estensione di Riemann, la funzione  $g$  si estende olomorfa a tutto  $\mathbb{D}(a, r)$  e quindi, dato che su  $\mathbb{D}_r^*$ , si ha  $gf \equiv 1 + cg$ , segue, contro l'ipotesi, che  $f$  è meromorfa.  $\square$

Alla luce di quanto dimostrato, il comportamento di una funzione olomorfa in un intorno di una sua singolarità si può allora riassumere in questo modo:

TEOREMA 4.3.6: *Siano  $A$  un aperto,  $a \in A$  un suo punto e  $f$  una funzione olomorfa su  $A \setminus \{a\}$ . Ci sono tre possibilità mutualmente esclusive:*

- (i) *Esiste un intorno aperto  $U$  di  $a$  tale che  $f|_{U \setminus \{a\}}$  è una funzione limitata: in questo caso  $f$  si estende olomorficamente su tutto  $U$  e  $a$  è una singolarità eliminabile per  $f$ .*
- (ii)  *$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$ ,  $f$  è meromorfa e  $a$  è un polo di  $f$ .*
- (iii) *Non esiste  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)|$  e  $a$  è una singolarità essenziale per  $f$ .*

#### 4.4. Il Teorema dei Residui e alcune applicazioni.

In questa sezione diamo la versione più semplice del Teorema dei residui e alcune importanti applicazioni.

**Definizione.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un aperto e  $E \subset \Omega$  un insieme discreto. Sia  $f$  una funzione olomorfa su  $\Omega \setminus E$ . Sia  $z_0 \in E$  e  $r > 0$  tale che per  $0 < |z - z_0| < r$  la funzione  $f$  abbia lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (4.4.1)$$

Il numero  $Res_{z_0}(f) = c_{-1}$  si dice *residuo* di  $f$  in  $z_0$ .

Ricordando come si calcolano i coefficienti di una serie di Laurent, abbiamo immediatamente la seguente:

**PROPOSIZIONE 4.4.1:** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un aperto,  $E \subset \Omega$  un insieme discreto e  $f$  una funzione olomorfa su  $\Omega \setminus E$ . Sia  $z_0 \in E$  e  $\rho > 0$  tale che  $D(z_0, \rho) \subset \overline{D(z_0, \rho)} \subset \Omega$  e  $\overline{D(z_0, \rho)} \cap E = \{z_0\}$ . Allora*

$$Res_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz. \quad (4.4.2)$$

Per una funzione meromorfa il residuo in un polo si calcola in un modo semplice:

**PROPOSIZIONE 4.4.2:** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un aperto,  $f$  una funzione meromorfa su  $\Omega$  e sia  $z_0$  un polo di ordine  $N$  per  $f$ . Allora*

$$Res_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(N-1)!} \frac{\partial^{(N-1)}}{\partial z^{(N-1)}} [f(z)(z - z_0)^N]. \quad (4.4.3)$$

*Dimostrazione:* Se  $f$  ha un polo di ordine  $N$  in  $z_0$ ,  $f$  in un intorno di  $z_0$  ha uno sviluppo di Laurent del tipo

$$f(z) = c_{-N}(z - z_0)^{-N} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n \quad (4.4.4)$$

e quindi per il teorema di estensione di Riemann  $g(z) = (z - z_0)^N f(z)$  definisce una funzione olomorfa in un intorno di  $z_0$ . Allora, vicino a  $z_0$ , la  $g$  ha uno sviluppo di Taylor

$$g(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k \quad (4.4.5)$$

dove  $a_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} [g(z)]|_{z=z_0}$ . La (4.4.3) segue allora dal confronto di (4.4.4) e (4.4.5).  $\square$

In molti casi è utile anche la seguente immediata osservazione:

LEMMA 4.4.3: Siano  $g, h$  due funzioni olomorfe su un aperto  $A \subset \mathbb{C}$  e  $z_0 \in A$ . Se  $g(z_0) \neq 0$ ,  $h(z_0) = 0$  e  $h'(z_0) \neq 0$ , allora la funzione  $f = g/h$  ha un polo di ordine 1 in  $z_0$  e

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

*Dimostrazione:* Per  $z$  sufficientemente vicino  $z_0$ , si ha  $h(z) = h'(z_0)(z - z_0) + H(z)(z - z_0)^2$  per qualche funzione  $H$  olomorfa in un intorno di  $z_0$ . Dunque la funzione  $f = g/h$  ha un polo di ordine 1 in  $z_0$  e, usando (4.4.3), abbiamo

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_0}(f) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h'(z_0)(z - z_0) + H(z)(z - z_0)^2} \\ &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \end{aligned}$$

□

Come conseguenza quasi immediata della formula di Cauchy, possiamo ora dimostrare il Teorema dei Residui in una versione molto semplice ma comunque sufficiente per le applicazioni.

TEOREMA 4.4.4: (dei Residui) Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un aperto,  $E \subset \Omega$  un insieme discreto e  $f$  una funzione olomorfa su  $\Omega \setminus E$ . Sia  $D \subset \Omega$  un aperto limitato con  $\bar{D} \subset \Omega$  e con frontiera  $\Gamma = \partial D$  unione finita di curve  $C^1$  a tratti semplici chiuse disgiunte. Supponiamo che  $E \cap \Gamma = \emptyset$  e che  $D \cap E = \{z_1, \dots, z_N\}$ . Allora si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z_k}(f). \quad (4.4.6)$$

*Dimostrazione:* Siano  $\rho_1, \dots, \rho_N > 0$  tali che si abbia

$$\bar{\mathbb{D}}_k = \overline{\mathbb{D}(z_k, \rho_k)} \subset D$$

per ogni  $k = 1, \dots, N$ , e

$$\bar{\mathbb{D}}_k \cap \bar{\mathbb{D}}_l = \emptyset$$

per ogni  $k, l = 1, \dots, N$  con  $k \neq l$ . Dunque se  $D' = D \setminus \bigcup_{k=1}^N \bar{\mathbb{D}}_k$  e  $\Gamma_k = \partial \mathbb{D}_k$  (con l'orientazione positiva), il bordo orientato di  $D'$  è dato da  $\partial D' = \Gamma - \Gamma_1 - \dots - \Gamma_N$ . Dato che  $f$  è olomorfa su  $D'$ , si ha

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D'} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} f(z) dz$$

e quindi (4.4.6) segue da (4.4.2). □

Il teorema dei residui fornisce uno straordinario strumento per il calcolo di molti integrali reali. Senza alcuna pretesa di voler essere esaustivi, diamo alcuni esempi per indicare il tipo di procedimento.

**Esempio 1.** Si consideri l'integrale del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad (4.4.7)$$

dove  $P(x), Q(x)$  sono polinomi con coefficienti reali tali che  $Q$  non ha radici reali e  $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ . In particolare allora l'integrale (4.4.7) esiste finito. Sia  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  la funzione razionale che estende a  $\mathbb{C}$  la funzione  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  e siano  $b_1, \dots, b_N$  i poli di  $f(z)$  contenuti nel semipiano superiore  $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}z > 0\}$ . Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}_{b_k}(f). \quad (4.4.8)$$

Per dimostrare (4.4.8) si procede nel modo seguente. Siano  $\alpha_R: [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\beta_R: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  le curve definite da

$$\alpha_R(t) = t \quad \text{e} \quad \beta_R(t) = Re^{it}$$

e sia  $\gamma_R = \beta_R \alpha_R$  il cammino chiuso ottenuto componendoli. Esiste  $R_0$  tale che per  $R > R_0$  i punti  $b_1, \dots, b_N$  sono tutti contenuti nell'aperto che ha frontiera parametrizzata da  $\beta_R$ . Allora per il teorema dei residui, per  $R > R_0$ , si ha

$$\int_{\alpha_R} f(z) dz + \int_{\beta_R} f(z) dz = \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}_{b_k}(f).$$

D'altra parte

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\alpha_R} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Ci è utile la seguente semplice osservazione sul comportamento asintotico dei polinomi:

**LEMMA 4.4.5:** Sia  $p(z) = a_0 + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n$  un polinomio di grado  $n$ . Per ogni  $1 > \epsilon > 0$  esiste  $R_\epsilon \geq 1$  tale che se  $|z| \geq R_\epsilon$  si ha

$$(1 - \epsilon)|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq (1 + \epsilon)|a_n||z|^n. \quad (4.4.9)$$

*Dimostrazione:* Per  $n = 0$  la stima è ovvia. Se  $n \geq 1$ , sia  $q(z) = a_0 + \dots + a_{n-1}z^{n-1}$ , in modo che  $p(z) = q(z) + a_n z^n$ . Ovviamente si ha

$$|a_n||z|^n - |q(z)| \leq |p(z)| \leq |a_n||z|^n + |q(z)|.$$

D'altra parte, per  $|z| > 1$ , si ha

$$|q(z)| \leq |a_0| + \dots + |a_{n-1}||z|^{n-1} \leq (|a_0| + \dots + |a_{n-1}|)|z|^{n-1} = \frac{|a_0| + \dots + |a_{n-1}|}{|z|}|z|^n.$$

Per  $\epsilon \in (0, 1)$  si scelga  $R_\epsilon = \max \left\{ 1, \frac{|a_0| + \dots + |a_{n-1}|}{\epsilon|a_n|} \right\}$ . Allora, se  $|z| \geq R_\epsilon$ , si ha

$$|q(z)| \leq \frac{|a_0| + \dots + |a_{n-1}|}{|z|}|z|^n \leq \epsilon|a_n||z|^n$$

e quindi

$$(1 - \epsilon)|a_n||z|^n \leq |a_n||z|^n - |q(z)| \leq |p(z)| \leq |a_n||z|^n + |q(z)| \leq (1 + \epsilon)|a_n||z|^n.$$

□

Siano allora  $m = \deg(P)$  e  $n = \deg(Q)$ . Allora, per ipotesi,  $n \geq m + 2$ . Inoltre, per il Lemma 4.4.5 esiste  $R_1$  tale che, per opportune costanti  $C_1, C_2 > 0$ , se  $|z| > R_1$ , si ha

$$|P(z)| \leq C_1 |z|^m \quad \text{e} \quad |Q(z)| \geq C_2 |z|^n.$$

Dunque

$$0 \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\beta_R} f(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \max_{|z|=R} |f(z)| \pi R \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{C_1 \pi}{C_2 R} = 0$$

e quindi (4.4.8) segue.

**Esempio 2.** Siano  $P(x, y), Q(x, y)$  polinomi con coefficienti reali tali che  $Q(\cos t, \sin t) \neq 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e se  $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ . mediante il teorema dei residui si può calcolare

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt. \quad (4.4.10)$$

In effetti, se si pone  $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$ , allora  $z^{-1} = \bar{z} = e^{-it} = \cos t - i \sin t$  e quindi

$$\cos t = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) = \frac{z^2 + 1}{2z} \quad \text{e} \quad \sin t = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}) = \frac{z^2 - 1}{2iz}.$$

Dunque

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right) \frac{1}{iz} dz$$

Allora, se  $f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right)$  e  $a_1, \dots, a_N$  sono i poli della funzione  $f(z)$  contenuti nel disco unitario  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ , per il teorema dei residui si ha

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}_{a_k}(f). \quad (4.4.11)$$

**Esempio 3.** Molti altri integrali reali possono essere calcolati utilizzando il teorema dei residui con metodi simili a quelli applicati sopra. Ad esempio, se  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  è una funzione razionale con  $P(x), Q(x)$  sono polinomi con coefficienti reali tali che  $Q$  non ha radici reali e  $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ , Allora gli integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos x dx \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin x dx$$

sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ix} dx. \quad (4.4.12)$$

Sia  $f(z) = R(z) e^{iz}$  l'estensione dell'integrando in (4.4.12) a una funzione meromorfa su  $\mathbb{C}$  e siano  $b_1, \dots, b_N$  i poli di  $f(z)$  contenuti nel semipiano superiore  $\mathbb{H}^+$ . Allora, ripetendo parola per parola l'argomento dell'esempio 1, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}_{b_k}(f). \quad (4.4.13)$$

Anche in questo caso, dato che gli integrali si calcolano prendendo i limiti per  $R \rightarrow \infty$  dell'integrale  $\int_{-R}^R R(x)e^{ix} dx$  dunque facendo il limite su un intervallo simmetrico, è cruciale il fatto che, per l'ipotesi sulla funzione razionale, l'integrale è assolutamente convergente.

Argomenti simili ma applicati con molta più prudenza, si possono adoperare nel caso in cui  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  è una funzione razionale con  $P(x), Q(x)$  sono polinomi con coefficienti reali tali che  $Q$  non ha radici reali e  $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$ . In questi casi è utile avere un argomento generale che permette di stimare integrali lungo le semicirconferenze. Il seguente lemma è utile per calcolare altri integrali con il metodo illustrato sopra:

LEMMA 4.4.6: (di Jordan) Si denotino  $\overline{\mathbb{H}}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \geq 0\}$  e  $\delta_R = \{z = Re^{i\theta} \mid \theta \in [0, \pi]\}$ . Per ogni  $\alpha > 0$ , se  $h$  è una funzione olomorfa su un aperto contenente  $\overline{\mathbb{H}}_+$  tranne al più che per un numero finito di singolarità. Se

$$\lim_{\overline{\mathbb{H}}_+ \ni z \rightarrow \infty} h(z) = 0,$$

allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\delta_R} e^{i\alpha z} h(z) dz \right| = 0.$$

*Dimostrazione:* Si ha

$$I_R = \int_{\delta_R} e^{i\alpha z} h(z) dz = \int_0^\pi h(Re^{i\theta}) e^{i\alpha R(\cos \theta + i \sin \theta)} i Re^{i\theta} d\theta.$$

Se  $M_R = \max_{\delta_R} |h|$ , dall'ipotesi su  $h$ , segue che  $|M_R| \rightarrow 0$  per  $R \rightarrow \infty$ . Dunque ricordando che vale la stima  $\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin \theta \leq \theta$  se  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , si ha

$$\begin{aligned} |I_R| &\leq RM_R \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta = 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta \leq 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\alpha R 2\theta}{\pi}} d\theta \\ &= 2RM_R \frac{\pi}{2\alpha R} [1 - e^{-\alpha R}] = M_R \frac{\pi}{\alpha} [1 - e^{-\alpha R}] \leq M_R \frac{\pi}{\alpha} \end{aligned}$$

e quindi  $|I_R| \rightarrow 0$  per  $R \rightarrow \infty$ . □

Per esemplificare, esaminiamo un caso nel quale si verifica che l'integrale esiste come integrale di Riemann improprio. Consideriamo l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \tag{4.4.14}$$

Si osservi per cominciare che l'integrale (4.4.14) esiste finito. Infatti la funzione  $\frac{\sin x}{x}$  ha estensione continua su tutto  $\mathbb{R}$  e quindi è integrabile su qualunque intervallo limitato. D'altra parte

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\cos x}{x^2} dx$$

e, dato che  $|\frac{\cos x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ , l'integrale (4.4.14) esiste come integrale improprio su tutta la retta. Si osservi che è in questo caso non esiste l'integrale improprio del del modulo della funzione!

Consideriamo la funzione  $g(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ . La funzione  $g(z)$  è una funzione meromorfa su  $\mathbb{C}$  con unico polo nell'origine e tale che  $\frac{\sin x}{x} = \text{Im } g(z)$ . Consideriamo per ogni  $R > 0$  le curve

$$\alpha_R(t) = t \quad \text{per } t \in [-R, -\frac{1}{R}] \quad \beta_R(t) = \frac{e^{it}}{R} \quad \text{per } t \in [\pi, 2\pi]$$

$$\gamma_R(t) = t \quad \text{per } t \in [\frac{1}{R}, R] \quad \delta_R(t) = Re^{it} \quad \text{per } t \in [0, \pi]$$

e  $\phi_R = \delta_R \gamma_R \beta_R \alpha_R$ . L'integrale (4.4.14) esiste finito e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \text{Im} \left[ \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{\alpha_R} g(z) dz + \int_{\gamma_R} g(z) dz \right) \right].$$

D'altra parte

$$\int_{\alpha_R} g(z) dz + \int_{\beta_R} g(z) dz + \int_{\gamma_R} g(z) dz + \int_{\delta_R} g(z) dz = \int_{\phi_R} g(z) dz = 2\pi i \text{Res}_0(g) = 2\pi i$$

dato che  $\text{Res}_0(g) = 1$  come si vede subito dallo sviluppo di Laurent in 0 della funzione  $g(z)$ :

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^k}{k!} z^k = \frac{1}{z} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i)^{l+1}}{(l+1)!} z^l.$$

Per quanto riguarda l'integrale di  $g(z)$  lungo  $\delta_R$ , come diretta conseguenza del Lemma 4.4.6, segue che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\delta_R} g(z) dz \right| = 0.$$

Infine

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\beta_R} g(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{i \frac{e^{it}}{R}}}{\frac{e^{it}}{R}} i \frac{e^{it}}{R} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} i \int_{\pi}^{2\pi} e^{i \frac{e^{it}}{R}} dt = \pi i.$$

Ricapitolando, dunque:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \text{Im} \left[ \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{\alpha_R} g(z) dz + \int_{\gamma_R} g(z) dz \right) \right] \\ &= \text{Im} \left[ \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{\alpha_R} g(z) dz + \int_{\beta_R} g(z) dz + \int_{\gamma_R} g(z) dz + \int_{\delta_R} g(z) dz \right) - \pi i \right] \\ &= \text{Im} \left[ \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{\phi_R} g(z) dz \right) - \pi i \right] = \text{Im} \left[ \lim_{R \rightarrow +\infty} (2\pi i) - \pi i \right] = \pi. \end{aligned}$$

**Esempio 4.** Un'altra applicazione tipica del calcolo dei residui è la somma di serie numeriche. Illustriamo qui con un esempio il tipo di tecniche che si usano. Si consideri la funzione meromorfa  $\cot \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ . Dunque  $\cot \pi z$  ha poli esattamente dove  $\sin \pi z = 0$  e quindi per  $z = n$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ . Dato che  $(\sin \pi z)' = \cos \pi z$  non si annulla per  $z = n \in \mathbb{Z}$ , usando il Lemma 4.4.3 si ha immediatamente che ogni  $n \in \mathbb{Z}$  è un polo di ordine 1 per  $\cot \pi z$  e che

$$\text{Res}_n(\cot \pi z) = \left[ \frac{\cos \pi z}{\pi \cos \pi z} \right]_{z=n} = \frac{1}{\pi}. \quad (4.4.15)$$

La formula (4.4.15), vista nell'ottica del teorema dei residui, suggerisce un "metodo" per sommare serie numeriche del tipo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Sia infatti  $f(z)$  una funzione meromorfa tale che  $f(n) = a_n$ . Allora si vede subito che

$$\operatorname{Res}_n(f(z) \cot \pi z) = \frac{1}{\pi} a_n.$$

Vogliamo usare questo fatto e il teorema dei residui per calcolare  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$  per interi  $k \geq 1$ . È necessario un risultato preliminare. Per ogni intero  $N \geq 0$ ,

$$\mathcal{Q}_N = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \max(|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|) < N + \frac{1}{2} \right\} \quad (4.4.16)$$

è l'interno del quadrato rappresentato in Figura 4.1 di vertici  $(N + \frac{1}{2}) - i(N + \frac{1}{2})$ ,  $(N + \frac{1}{2}) + i(N + \frac{1}{2})$ ,  $-(N + \frac{1}{2}) + i(N + \frac{1}{2})$ ,  $-(N + \frac{1}{2}) - i(N + \frac{1}{2})$ .

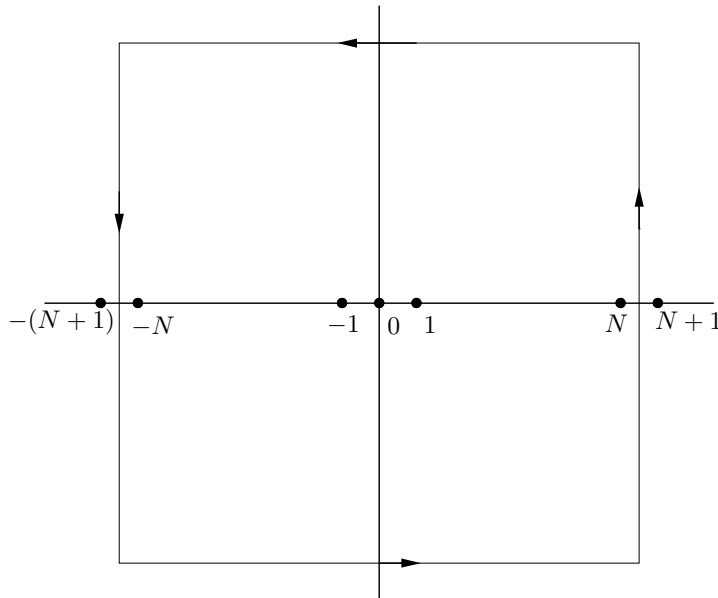


Fig. 4.1

LEMMA 4.4.7: *Esiste una costante  $M > 0$  tale che per ogni intero positivo  $N$  per  $z \in \partial\mathcal{Q}_N$  si ha  $|\cot \pi z| \leq M$ .*

*Dimostrazione:* Sia  $z = x + iy \in \partial\mathcal{Q}_N$  un punto che giace su uno dei lati del quadrato parallelo all'asse reale. Allora  $|y| = N + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ . Allora:

$$\begin{aligned} |\cot \pi z| &= \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \leq \left| \frac{|e^{i\pi z}| + |e^{-i\pi z}|}{|e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}|} \right| \\ &= \left| \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{-\pi y} - e^{\pi y}} \right| = \coth |\pi y| \leq \coth \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato  $|e^{i\pi z}| = |e^{i\pi x - \pi y}| = e^{-\pi y}$ ,  $|e^{-i\pi z}| = |e^{-i\pi x + \pi y}| = e^{\pi y}$  il fatto che  $\coth t$  è monotona decrescente per  $t > 0$ .



Se invece  $z = x + iy \in \partial Q_N$  è un punto che giace su uno dei lati del quadrato parallelo all'asse immaginario, allora  $|x| = N + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ . Ricordando che in questo caso  $e^{2i\pi x} = e^{i\pi} = -1$ , abbiamo

$$|\cot \pi z| = \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| = \left| \frac{e^{2i\pi z} + 1}{e^{2i\pi z} - 1} \right| = \left| \frac{-e^{-2\pi y} + 1}{-e^{-2\pi y} - 1} \right| = \frac{1 - e^{-2\pi y}}{e^{-2\pi y} + 1} \leq 1:$$

Dunque basta scegliere  $M = \max\{1, \coth \frac{\pi}{2}\} = \coth \frac{\pi}{2}$  e il Lemma è dimostrato.  $\square$

Consideriamo ora la funzione meromorfa definita da  $g(z) = \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z$ . Come già osservato per ogni intero  $n \neq 0$  si ha

$$\text{Res}_n(g) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n^{2k}}.$$

Sia

$$\cot \pi z = \sum_{n=-1}^{\infty} b_n z^n$$

lo sviluppo in serie di Laurent di  $\cot \pi z$  nell'origine. Dato che  $\cot \pi z$  è una funzione dispari, ossia tale che  $\cot \pi(-z) = -\cot \pi z$ , segue immediatamente che  $b_n = 0$  per ogni  $n$  pari e quindi

$$\cot \pi z = \sum_{m=-1}^{\infty} b_{2m-1} z^{2m-1}.$$

Inoltre lo sviluppo in serie di Laurent di  $g(z) = \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z$  in 0 è dato da

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z = \frac{1}{z^{2k}} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m-1} z^{2m-1} \\ &= b_{-1} z^{-2k-1} + b_1 z^{-2k+1} + \dots + b_{2k-1} z^{-1} + \sum_{m=k+1}^{\infty} b_{2m-1} z^{2m-2k-1} \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\text{Res}_0(g) = b_{2k-1}.$$

Siamo ora pronti a dimostrare la seguente

**PROPOSIZIONE 4.4.8:** Per ogni intero  $k \geq 1$ , se  $\cot \pi z = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m-1} z^{2m-1}$  è lo sviluppo di Laurent di  $\cot \pi z$  in 0, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{\pi}{2} b_{2k-1}$$

Dato che

$$\cot \pi z = \frac{1}{\pi z} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi^3}{45} - \frac{2\pi^5}{945} - \dots$$

in particolare si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

*Dimostrazione:* Si osservi che se  $\mathcal{Q}_N$  è il quadrato aperto definito in (4.4.16), per  $N \geq 1$ , allora la funzione  $g(z) = \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z$  ha poli in  $\mathcal{Q}_N$  nei punti  $-N, \dots, 0, \dots, N$ . Dunque, per il teorema dei residui

$$\int_{\partial \mathcal{Q}_N} \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z dz = \sum_{n=-N}^N \operatorname{Res}_n \left[ \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right].$$

D'altra parte, usando il Lemma 4.4.7, e osservando che il perimetro del quadrato  $\partial \mathcal{Q}_N$  è  $4(2N+1)$  e che, se  $z \in \partial \mathcal{Q}_N$ , allora  $\frac{1}{|z|^{2k}} \leq \frac{1}{N^{2k}}$ , dato che  $\mathbb{D}(0, N) \subset \mathcal{Q}_N$ , abbiamo

$$\left| \int_{\partial \mathcal{Q}_N} \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z dz \right| \leq \frac{M}{N^{2k}} 4(2N+1).$$

Dunque

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\partial \mathcal{Q}_N} \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \operatorname{Res}_n \left[ \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right] \quad (4.4.17)$$

e quindi

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-N}^N \operatorname{Res}_n \left[ \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right] \\ &= \sum_{n=-N}^{-1} \operatorname{Res}_n \left[ \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right] + \operatorname{Res}_0 \left[ \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right] + \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}_n \left[ \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right] \\ &= 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{\pi} \frac{1}{n^{2k}} + b_{2k-1}. \end{aligned}$$

Questo fatto insieme a (4.4.17) implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{\pi}{2} b_{2k-1}.$$

Il resto dell'enunciato si ottiene trovando i primi termini della serie di Laurent di  $\cot \pi z$  nell'origine. Ad esempio si può procedere nel modo seguente usando metodi

elementari, anche se un po' laboriosi. Se  $(\sin \pi z)^{-1} = \sum_{m=-1}^{\infty} c_{2m-1} z^{2m-1}$  è lo sviluppo

di Laurent nell'origine, ricordando lo sviluppo  $\sin \pi z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1}$ , i

primi coefficienti della serie di Laurent di  $(\sin \pi z)^{-1}$  si possono calcolare per iterazione moltiplicando e eguagliando i coefficienti dello stesso grado nella relazione:

$$\begin{aligned} 1 &= \sin \pi z (\sin \pi z)^{-1} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} \right) \left( \sum_{m=-1}^{\infty} c_{2m-1} z^{2m-1} \right) \\ &= \left( \pi z - \frac{\pi^3}{(3)!} z^3 + \frac{\pi^5}{(5)!} z^5 - \dots \right) (c_{-1} z^{-1} + c_1 z^1 + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots) \end{aligned}$$

ottenendo:  $c_{-1} = \frac{1}{\pi}$ ,  $c_1 = \frac{\pi}{6}$ ,  $c_3 = \frac{7\pi^3}{360}$ ,  $c_5 = \frac{31\pi^5}{15120}$ . Lo stesso metodo applicato a

$$\sum_{m=-1}^{\infty} b_{2m-1} z^{2m-1} = \cot \pi z = \cos \pi z ((\sin \pi z)^{-1})$$

$$= \left( 1 - \frac{\pi^2}{2!} z^2 + \frac{\pi^4}{4!} z^4 - \frac{\pi^6}{6!} z^6 + \dots \right) \left( \frac{1}{\pi} z^{-1} + \frac{\pi}{6} z^1 + \frac{7\pi^3}{360} z^3 + \frac{31\pi^5}{15120} z^5 + \dots \right)$$

permette di calcolare i coefficienti  $b_{-1}, b_1, b_3, b_5$  della serie di Laurent di  $\cot \pi z$ .  $\square$

**Osservazione.** I coefficienti  $b_{2k-1}$  della serie di Laurent di  $\cot \pi z$  nell'origine sono correlati alla successione  $B_n$  dei numeri di Bernoulli, molto importanti in molti contesti matematici, mediante la formula:

$$b_{2k-1} = \frac{2^{2k}}{(2k)!} \pi^{2k-1} B_{2k}.$$

## Esercizi

1. Verificare che

$$a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \frac{5}{6}\pi;$$

$$b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^5} = \frac{8!}{(4!)^2} \frac{\pi}{2^8};$$

$$c) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a^4 + x^4)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{\pi}{a^7} \quad \text{per } a > 0.$$

2. Verificare che

$$a) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{per } a > b > 0;$$

$$b) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{2 + \cos \theta} d\theta = 2\pi \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \right).$$

3. Calcolare

$$a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + 1} dx \quad b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^4 + 1} dx.$$

4. Verificare che, per  $a > 0$ , si ha  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} dx = \pi e^{-a}$

*Consiglio: Si consideri la funzione  $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}$  che per  $x \in \mathbb{R}$  ha parte immaginaria uguale all'integrando, ricordare il Lemma di Jordan e la tecnica usuale...*

5. Sia  $f$  una funzione olomorfa su  $\mathbb{C}$  con unici in  $z = 1$  di molteplicità 3 e in  $z = -1$  di molteplicità 1. Calcolare

$$\int_{\gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

dove  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  è la curva definita da  $\gamma(t) = \begin{cases} -1 + e^{2it} & \text{se } t \in [0, \pi] \\ 1 + e^{i(3\pi-2t)} & \text{se } t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$

### 4.5. Residui e formule per l'inversa di un biolomorfismo.

In questo paragrafo illustreremo come il Teorema dei Residui permetta di trovare formule e sviluppi per la funzione inversa di un biolomorfismo. Cominciamo con la seguente osservazione:

PROPOSIZIONE 4.5.1: *Siano  $A, A'$  aperti di  $\mathbb{C}$  e  $f: A \rightarrow A'$  un biolomorfismo. Se  $\mathbb{D}$  è un disco arbitrario tale che  $\overline{\mathbb{D}} \subset A$ , per ogni  $w \in f(\mathbb{D})$  vale la seguente rappresentazione integrale:*

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta. \quad (4.5.1)$$

*Dimostrazione:* Sia  $w \in f(\mathbb{D}) \subset A'$  e sia  $c = f^{-1}(w)$ . Dato che necessariamente  $f'(c) \neq 0$  e che  $f$  è iniettiva, allora  $c$  è un polo semplice della funzione  $g(z) = z \frac{f'(z)}{f(z) - w}$  ed è l'unico polo di  $g$  in  $\mathbb{D}$ . Dal Lemma 4.4.3 si ha immediatamente

$$Res_c(g) = c \frac{f'(c)}{f'(c)} = c.$$

Dunque possiamo concludere:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta = Res_c(g) = c = f^{-1}(w).$$

□

Ripetendo l'argomento utilizzato per dimostrare a partire dalla formula di Cauchy che una funzione olomorfa ammette uno sviluppo in serie di potenze in un intorno di un punto, si può utilizzare la formula (4.5.1) per ottenere uno sviluppo in serie dell'inversa:

PROPOSIZIONE 4.5.2: *Siano  $A, A'$  aperti di  $\mathbb{C}$ ,  $f: A \rightarrow A'$  un biolomorfismo e  $\mathbb{D}$  un disco arbitrario tale che  $\overline{\mathbb{D}} \subset A$ . Per ogni  $w_0 \in f(\mathbb{D})$ , se  $w$  è un punto di un disco  $\mathbb{D}(w_0, r)$  tale che  $\mathbb{D}(w_0, r) \subset \overline{\mathbb{D}} \subset f(\mathbb{D})$ , vale il seguente sviluppo in serie di potenze:*

$$f^{-1}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta) - w)^{n+1}} d\zeta \right] (w - w_0)^n \quad (4.5.2)$$

dove la serie converge uniformemente sui compatti di  $\mathbb{D}(w_0, r)$ .

*Dimostrazione:* Si cominci osservando che, fissato  $w_0 \in f(\mathbb{D})$ , per  $w \in \mathbb{D}(w_0, r) \subset f(\mathbb{D})$ , allora, se  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ , si ha  $|f(\zeta) - w_0| \geq r$  e

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(\zeta) - w} &= \frac{1}{f(\zeta) - w_0 - (w - w_0)} = \frac{1}{f(\zeta) - w_0} \frac{1}{1 - \frac{w - w_0}{f(\zeta) - w_0}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f(\zeta) - w_0} \left( \frac{w - w_0}{f(\zeta) - w_0} \right)^n. \end{aligned}$$

Dato che  $\left| \frac{w - w_0}{f(\zeta) - w_0} \right| \leq \left| \frac{w - w_0}{r} \right| < 1$  la serie converge uniformemente su  $\partial\mathbb{D}$  e quindi possiamo concludere usando (4.5.1):

$$\begin{aligned}
f^{-1}(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \zeta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w_0} \left( \frac{w - w_0}{f(\zeta) - w_0} \right)^n d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta) - w_0)^{n+1}} d\zeta \right] (w - w_0)^n
\end{aligned}$$

dove la convergenza è uniforme su ogni compatto di  $\mathbb{D}(w_0, r)$ .  $\square$

Dallo sviluppo (4.5.2) di  $f^{-1}$  si ricava usando il calcolo dei residui il seguente

**TEOREMA 4.5.3:** (Sviluppo di Lagrange dell'inversa) *Siano  $A, A'$  aperti di  $\mathbb{C}$ ,  $f: A \rightarrow A'$  un biolomorfismo e  $\mathbb{D}$  un disco arbitrario tale che  $\overline{\mathbb{D}} \subset A$ . Per ogni  $w_0 = f(z_0) \in f(\mathbb{D})$ , se  $w$  è un punto di un disco  $\mathbb{D}(w_0, r)$  centrato in  $w_0$  e contenuto in  $f(\mathbb{D})$  vale il seguente sviluppo in serie di potenze:*

$$f^{-1}(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial z^{(n-1)}} \left( \frac{z - z_0}{f(z) - w_0} \right)^n \right]_{z=z_0} (w - w_0)^n \quad (4.5.3)$$

dove la serie converge uniformemente sui compatti di  $\mathbb{D}(w_0, r)$ .

*Dimostrazione:* Per provare l'affermazione occorre calcolare gli integrali

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta) - w)^{n+1}} d\zeta$$

che compaiono in (4.5.2) per ogni  $n \geq 0$ . Per  $n = 0$  basta utilizzare (4.5.1):

$$z_0 = f^{-1}(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w_0} d\zeta.$$

Per  $n > 0$ , si osservi che

$$\left( \frac{\zeta}{(f(\zeta) - w_0)^n} \right)' = -n \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta) - w_0)^{n+1}} + \frac{1}{(f(\zeta) - w_0)^n}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta) - w)^{n+1}} d\zeta &= -\frac{1}{2n\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \left( \frac{\zeta}{(f(\zeta) - w_0)^n} \right)' d\zeta \\
&\quad + \frac{1}{2n\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{(f(\zeta) - w_0)^n} d\zeta \\
&= \frac{1}{2n\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{(f(\zeta) - w_0)^n} d\zeta.
\end{aligned}$$

Dato che la funzione  $\frac{1}{(f(\zeta)-w_0)^n}$  ha in  $\mathbb{D}$  un solo polo in  $z_0$  e questo è di ordine  $n$ , possiamo concludere:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta)-w)^{n+1}} d\zeta &= \frac{1}{2n\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{(f(\zeta)-w_0)^n} d\zeta \\ &= \frac{1}{n} \operatorname{Res}_{z_0} \left( \frac{1}{(f(\zeta)-w_0)^n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{(n-1)!} \left[ \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial z^{(n-1)}} \left( \frac{z-z_0}{f(z)-w_0} \right)^n \right]_{z=z_0} \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

e dunque la tesi.  $\square$

Diamo ora un'applicazione di questo circuito di idee alle equazioni algebriche. Come è ben noto, mentre ci sono formule che risolvono equazioni algebriche fino al quarto grado mediante radicali, non possono esistere per equazioni dal quinto grado in poi. Questo è un teorema di Abel (1823) e la questione è completamente chiarita dalla Teoria di Galois (1830-32). Prima del che Abel dimostrasse l'impossibilità di risolvere per radicale la quintica, la questione era molto studiata e, in sintonia con quanto fatto per equazioni di terzo e quarto grado, il primo passo che era ritenuto necessario era ridurre, mediante opportuni cambi di variabili, la ricerca delle radici di una quintica generale

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (4.5.5)$$

allo studio di quintica più semplice, possibilmente una per la quale fosse possibile calcolare per radicali una radice. In questo modo il problema sarebbe stato riducendosi per divisione a un'equazione di grado al più 4 per la quale era disponibile una formula. Ovviamente quest'idea non poteva avere successo ma alcuni progressi furono fatti. In particolare Bring nel 1786 dimostrò il seguente risultato successivamente riscoperto indipendentemente da Jerrard nel 1836:

PROPOSIZIONE 4.5.4: (Riduzione di Bring-Jerrard di una quintica) *L'equazione*

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (4.5.6)$$

*è equivalente a un'equazione*

$$y^5 + y + A = 0 \quad (4.5.7)$$

*dove A è esprimibile mediante radicali in funzione di a, b, c, d, e.*

Per una dimostrazione della Proposizione 4.5.4 si può vedere: J. Stillwell, *Eisenstein's Footnote*, The Mathematical Intelligencer, **17** (1995), 58-62. L'espressione (4.5.7) è stata oggetto di studio come applicazione elementare di diverse raffinate teorie. Seguendo un'idea di Eisenstein (1844), è possibile affrontare in modo elementare l'equazione 4.5.4 utilizzando le idee che abbiamo presentato in questo paragrafo. In realtà questo tipo di applicazioni, con metodi più o meno ortodossi, erano ben presenti a Lagrange e altri suoi contemporanei nel secolo XVIII.

L'idea per trovare radici di un'equazione del tipo (4.5.7) è quella di considerare la funzione  $f(z) = z^5 + z$  e per  $w \in \mathbb{C}$  trovare  $z$  tale che  $f(z) = w$ . Dato che  $f'(0) = 1 \neq 0$ , allora  $f$  è un biolomorfismo di un aperto  $A$  che contiene 0 con  $A' = f(A)$  un aperto che contiene  $0 = f(0)$ . Dunque per  $w \in A'$ , ossia sufficientemente vicino a 0, possiamo usare quanto fatto sopra per calcolare la radice  $z = f^{-1}(w)$  dell'equazione  $z^5 + z = w$ . Non sarà una risoluzione per "radicali", sarà una risoluzione per "serie". L'idea ovviamente è quella di utilizzare il Teorema 4.5.3 per calcolare  $f^{-1}$ . In effetti il calcolo dei coefficienti utilizzando la formula (4.5.3) presenta difficoltà combinatorie che si possono evitare utilizzando l'espressione dei coefficienti data in (4.5.4) calcolando direttamente i residui. Questa è l'idea che sembra risalire a Eisenstein. Abbiamo il seguente:

**PROPOSIZIONE 4.5.5:** (Risoluzione per serie di una quintica) *Per  $w \in \mathbb{D}(0, \frac{4}{5\sqrt[4]{5}})$  l'equazione  $f(z) = z^5 + z = w$  ha radice*

$$z = f^{-1}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1} \binom{5k}{k} w^{4k+1} \quad (4.5.8)$$

dove la serie converge uniformemente sui compatti di  $\mathbb{D}(0, \frac{4}{5\sqrt[4]{5}})$ .

*Dimostrazione:* Dato che  $f^{-1}(0) = 0$ , la funzione  $f^{-1}$  ha sviluppo  $f^{-1}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^n$  dove, usando (4.5.4), si calcolano i coefficienti mediante

$$c_n = \frac{1}{n} \operatorname{Res}_0 \left( \frac{1}{f(z)^n} \right) = \operatorname{Res}_0 \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{1}{z^5 + z} \right)^n \right].$$

Pertanto il coefficiente  $c_n$  è dato dal coefficiente  $a_{-1}$  del seguente sviluppo di Laurent:

$$\sum_{l=-n}^{\infty} a_l z^l = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{z^5 + z} \right)^n = \frac{1}{n} \frac{1}{z^n} (1 + z^4)^{-n}.$$

Ricordando la serie binomiale, che converge uniformemente sui compatti contenuti nel disco  $\mathbb{D}(0, 1)$ , abbiamo allora :

$$\sum_{l=-n}^{\infty} a_l z^l = \frac{1}{n} \frac{1}{z^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} z^{4k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} z^{4k-n}.$$

Confrontando i termini, si vede subito che ci sono due possibilità. Se  $n-1$  non è multiplo di 4, allora  $a_{-1}^{(n)} = 0$ . Se invece  $n-1 = 4k$  per qualche  $k$ , allora

$$\begin{aligned} c_n = a_{-1}^{(n)} &= \frac{1}{n} \binom{-n}{k} = \frac{1}{n} \frac{-n(-n-1)(-n-2)\dots(-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \frac{(4k+2)(4k+3)\dots(5k)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k}{4k+1} \binom{5k}{k}. \end{aligned}$$



Abbiamo dunque calcolato i coefficienti di (4.5.8). Per calcolare il raggio di convergenza della (4.5.8), occorre verificare che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4k+1} \binom{5k}{k} \right)^{\frac{1}{4k+1}} = \frac{5\sqrt[4]{5}}{4}. \quad (4.5.9)$$

Questo si dimostra utilizzando la formula di Stirling per  $n!$  o la stima più grossolana ma elementare

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq n \frac{n^n}{e^{n-1}} \quad (4.5.10)$$

per  $n \geq 1$ . Illustriamo qui come ottenere questa stima. Per  $t \in \mathbb{R}$  denotiamo con  $[t]$  e  $\{t\} = t - [t]$  rispettivamente la parte intera e la parte frazionaria di  $t$ :

$$\begin{aligned} \ln n! &= \sum_{k=1}^n \ln k = \sum_{k=1}^n k \ln k - \sum_{k=1}^n (k-1) \ln k = n \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} k [\ln(k+1) - \ln k] \\ &= n \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} k \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = n \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{[t]}{t} dt = n \ln n - \int_1^n \frac{[t]}{t} dt \\ &= n \ln n - \int_1^n dt + \int_1^n \frac{\{t\}}{t} dt = n \ln n - (n-1) + \int_1^n \frac{\{t\}}{t} dt \end{aligned}$$

da cui, dato che  $0 \leq \int_1^n \frac{\{t\}}{t} dt \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt = \ln n$  segue immediatamente che

$$n \ln n - (n-1) \leq \ln n! \leq n \ln n - (n-1) + \ln n$$

che è equivalente, esponenziando, alla (4.5.10). Per calcolare (4.5.9), basta osservare che, per (4.5.10), si ha

$$\frac{1}{e} \frac{(5k)^{5k}}{(4k)^{4k} k^k} \leq \frac{(5k)!}{(4k)! k!} \leq \frac{k}{e} \frac{(5k)^{5k}}{(4k)^{4k} k^k}$$

ossia

$$\frac{1}{e} \frac{5^{5k}}{4^{4k}} \leq \frac{(5k)!}{(4k)! k!} \leq \frac{n}{e} \frac{5^{5k}}{4^{4k}}$$

da cui è facile ottenere il limite desiderato. □