CAPITOLO 5

Topologia e teoria di Cauchy

5.1. La versione omotopica della formula di Cauchy.

Cominciamo ricordando la nozione di omotopia di cammini. Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e siano $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to A$ due cammini (ossia due applicazioni continue) tali che

(i) γ_0, γ_1 hanno gli stessi estremi ossia $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ e $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$
oppure

(ii) γ_0, γ_1 sono cammini chiusi ossia $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$ e $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$.

I cammini γ_0, γ_1 si dicono *omotopi (in A)* se esiste una *omotopia da γ_0 a γ_1* ossia un'applicazione continua $H \colon [0,1] \times [a,b] \to A$ tale che nel caso (i) sia una *omotopia con estremi fissati*

$$\begin{cases} H(0,t) = \gamma_0(t) \quad \text{e} \quad H(1,t) = \gamma_1(t) \quad \text{per} \quad t \in [a,b] \\ \\ H(s,a) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a) \quad \text{e} \quad H(s,b) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b) \quad \text{per} \quad s \in [0,1] \end{cases} \tag{5.1.1}$$

e nel caso (ii) sia una *omotopia di cammini chiusi*

$$\begin{cases} H(0,t) = \gamma_0(t) \quad \text{e} \quad H(1,t) = \gamma_1(t) \quad \text{per} \quad t \in [a,b] \\ \\ H(s,a) = H(s,b) \quad \text{per} \quad s \in [0,1]. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Diremo che un cammino $\gamma \colon [a,b] \to A$ è *omotopo a costante* se per qualche punto $z \in A$ il cammino $\gamma \colon [a,b] \to A$ è omotopo al cammino costante $\gamma_z \colon [a,b] \to A$ definito da $\gamma_z(t) = z$. Lasciamo per esercizio la (facile) dimostrazione della seguente

Proposizione 5.1.1: *L'omotopia è una relazione d'equivalenza.*

La seguente definizione è fondamentale:

Definizione 5.1.1: Una aperto connesso $A \subset \mathbb{C}$ si dice *semplicemente connesso* se ogni cammino chiuso $\gamma \colon [a,b] \to A$ è omotopo a costante in A.

Non è facile dare in modo rigoroso una caratterizzazione geometrica degli aperti semplicemente connessi. Intuitivamente il fatto che ogni cammino chiuso sia omotopo a costante suggerisce che il suo sostegno sia deformabile con continuità a un punto. A sua volta questo suggerisce che l'aperto A "non può avere buchi" ossia che il suo complemento $\mathbb{C} \setminus A$ non ha componenti connesse limitate. Questo fatto si può infatti dimostrare utilizzando la teoria delle funzioni olomorfe che stiamo presentando. Per il momento ci accontentiamo di osservare che ogni aperto convesso $A \subset \mathbb{C}$ è semplicemente connesso. Questo si vede facilmente nel modo seguente. Siano $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to A$ due cammini di un aperto $A \subset \mathbb{C}$ chiusi tali che per ogni $t \in [a,b]$ il segmento $[\gamma_0(t)\gamma_1(t)]$ sia contenuto in A. Allora γ_0 e γ_1 sono omotopi mediante *l'omotopia lineare* $H \colon [0,1] \times [a,b] \to A$ definita da

$$H(s,t) = \gamma_0(t) + s(\gamma_1(t) - \gamma_0(t)).$$

Se dunque A è convesso ogni cammino chiuso è omotopo a costante mediante un'omotopia lineare.

In questa sezione vogliamo studiare a meno della relazione di omotopia l'integrale di funzioni olomorfe lungo le curve. Una difficoltà che si incontra subito nel confrontare integrali lungo curve C^1 a tratti omotope è che l'omotopia è una nozione "continua" e quindi la nostra definizione di integrale lungo una curva non sembra essere adeguata. Uno dei modi per risolvere questo problema si basa su un risultato di interpolazione. Prima di tutto una definizione. Diciamo che un cammino (continuo) $\alpha \colon [a,b] \to A$ è *lineare a tratti* se esiste una partizione $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$ dell'intervallo $[a,b]$ tale che per ogni $j = 0, \ldots, n-1$ la restrizione $\alpha_{|[t_j, t_{j+1}]}$ è la restrizione di una funzione affine ossia $\alpha_{|[t_j, t_{j+1}]}(t) = tz_j + w_j$ per opportuni z_j e w_j. È immediato osservare che un cammino lineare a tratti è una curva C^1 a tratti.

TEOREMA 5.1.2: *Siano $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to A$ due cammini omotopi. Allora esiste un numero finito di cammini $\alpha_0, \ldots, \alpha_N \colon [a,b] \to A$ tali che*

(i) $\alpha_0 = \gamma_0$ *e* $\alpha_N = \gamma_1$;

(ii) α_j *è lineare a tratti per ogni* $j = 1, \ldots, N-1$;

(iii) α_j *è linearmente omotopa a* α_{j+1} *per ogni* $j = 0, \ldots, N-1$.

Dimostrazione: Sia $H \colon [0,1] \times [a,b] \to A$ un'omotopia fra i cammini γ_0 e γ_1. Dato che $[0,1] \times [a,b]$ è compatto allora H è uniformemente continua e $H([0,1] \times [a,b])$ è un compatto contenuto in A. Allora

$$r = \frac{1}{2} dist(H([0,1] \times [a,b]), \mathbb{C} \setminus \overline{A}) = \frac{1}{2} \min\{dist(H(s,t), \mathbb{C} \setminus \overline{A}) \mid (s,t) \in [0,1] \times [a,b]\} > 0$$

e esiste un intero positivo n tale che, per $(s,t), (s',t') \in [0,1] \times [a,b]$ con $|s - s'| < \frac{1}{n}$ e $|t - t'| < \frac{1}{n}$, risulti

$$|H(s,t) - H(s',t')| < r.$$

Siano $s_0 = 0 < s_1 < \ldots, s_N = 1$ e $t_0 = a < t_1 < \ldots, t_N = b$ partizioni rispettivamente di $[0,1]$ e $[a,b]$ tali che $|s_j - s_{j+1}| < \frac{1}{n}$ e $|t_j - t_{j+1}| < \frac{1}{n}$ per ogni $j = 0, \ldots, N-1$. Infine per $0 \leq j,k \leq N$ si definiscano $z_{j,k} = H(s_j, t_k)$ e per $0 \leq j,k \leq N-1$ siano $Q_{j,k} = [s_j, s_{j+1}] \times [t_k, t_{k+1}]$. Allora

$$H(Q_{j,k}) \subset \mathbb{D}(z_{j,k}, r) \subset A.$$

Per ogni $0 < j < N$ sia $\alpha_j \colon [a,b] \to A$ il cammino a lineare a tratti ottenuto componendo successivamente i segmenti $[z_{j,k}, z_{j,k+1}]$ per $k = 0, \ldots, N-1$. Inoltre poniamo $\alpha_0 = \gamma_0$ e $\alpha_N = \gamma_1$.

Per ogni $j,k = 0, \ldots, N-1$ i quattro punti $a_j(t_k) = z_{j,k}$, $a_j(t_{k+1}) = z_{j,k+1}$, $a_{j+1}(t_k) = z_{j+1,k}$, $a_{j+1}(t_{k+1}) = z_{j+1,k+1}$ sono tutti nel disco $D(z_{j,k}, r)$ che è convesso.

Dunque per ogni $j, k = 0, \ldots, N-1$ se $t \in [t_k, t_{k+1}]$ il segmento che congiunge $a_j(t)$ a $a_{j+1}(t)$ è tutto contenuto nel disco $\mathbb{D}(z_{j,k}, r)$ e quindi in A. Dunque per ogni $t \in [a, b]$ il segmento che congiunge $a_j(t)$ a $a_{j+1}(t)$ è tutto contenuto in A. Come già osservato allora i cammini α_j e a_{j+1} sono omotopi mediante un'omotopia lineare.

□

Utilizziamo ora questo processo di interpolazione lineare dell'omotopia per dimostrare il risultato principale di questo paragrafo.

TEOREMA 5.1.3: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a, b] \to A$ due cammini C^1 a tratti omotopi (come cammini chiusi o con estremi fissati). Allora se $f \colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa, si ha*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz. \tag{5.1.3}$$

Dimostrazione: Grazie al Teorema 5.1.2 possiamo ridurci al caso in cui che esista un'omotopia lineare fra γ_0 e γ_1. In fatti se il risultato è vero in questo caso, siano $\alpha_0 = \gamma_0, \ldots, \alpha_N = \gamma_1$ i cammini a due a due linearmente omotopi trovati grazie al Teorema 5.1.2; allora

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\alpha_0} f(z)dz = \int_{\alpha_1} f(z)dz = \ldots = \int_{\alpha_N} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Assumiamo dunque γ_0 e γ_1 siano omotopi mediante l'omotopia lineare H definita, per $(s, t) \in [0, 1] \times [a, b]$, da

$$H(s, t) = \gamma_0(t) + s(\gamma_1(t) - \gamma_0(t)).$$

Posto $\gamma_s(t) = H(s, t) = \gamma_0(t) + s(\gamma_1(t) - \gamma_0(t))$, allora $\gamma_s \colon [a, b] \to A$ è una curva C^1 a tratti per ogni $s \in [0, 1]$. Per semplicità denotiamo $\delta(t) = \gamma_1(t) - \gamma_0(t)$ e quindi avremo $\gamma_s(t) = H(s, t) = \gamma_0(t) + s\delta(t)$. Se definiamo per $s \in [0, 1]$

$$\phi(s) = \int_{\gamma_s} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma_s(t))\gamma_0'(t)dt + s\int_a^b f(\gamma_s(t))\delta'(t)dt,$$

dimostriamo ora che ϕ è costante da cui ovviamente segue il risultato. La funzione ϕ è continua su $[0, 1]$ e derivabile su $(0, 1)$ e la derivata si calcola differenziando sotto il segno di integrale e osservando che $\frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t) = \delta(t)$:

$$\begin{aligned}
\phi'(s) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}[f(\gamma_s(t))\gamma_0'(t)]dt + \int_a^b f(\gamma_s(t))\delta'(t)dt + s\int_a^b \frac{\partial}{\partial s}[f(\gamma_s(t))\delta'(t))]dt \\
&= \int_a^b f'(\gamma_s(t))\delta(t)\gamma_0'(t)dt + \int_a^b f(\gamma_s(t))\delta'(t)dt + s\int_a^b f'(\gamma_s(t))\delta(t)\delta'(t)dt \\
&= \int_a^b \delta(t)f'(\gamma_s(t))\gamma_s'(t)dt + \int_a^b f(\gamma_s(t))\delta'(t)dt \\
&= \int_a^b [\delta(t)\frac{d}{dt}f(\gamma_s(t)) + f(\gamma_s(t))\delta'(t)]dt = \int_a^b \frac{d}{dt}[\delta(t)f(\gamma_s(t))]dt \\
&= \delta(b)f(\gamma_s(b)) - \delta(a)f(\gamma_s(a)).
\end{aligned}$$

Se γ_0 e γ_1 sono due curve con estremi coincidenti allora

$$\delta(a) = \gamma_1(a) - \gamma_0(a) = 0 \quad \text{e} \quad \delta(b) = \gamma_1(b) - \gamma_0(b) = 0.$$

Se γ_0 e γ_1 sono due curve chiuse allora H è un'omotopia tra tra curve chiuse. Allora posto $z_s = H(s,a) = H(s,b)$ per ogni $s \in [0,1]$ si ha

$$\delta(b)f(\gamma_s(b)) - \delta(a)f(\gamma_s(a)) = (z_1 - z_0)f(z_s) - (z_1 - z_0)f(z_s) = 0.$$

In tutti i casi concludiamo $\phi'(s) = 0$ e quindi che ϕ è costante. □

Come corollario si ottiene immediatamente la versione omotopica del Teorema di Cauchy:

Teorema 5.1.4: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $\gamma\colon [a,b] \to A$ un cammino chiuso C^1 a tratti omotopo a costante. Allora se $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa, si ha*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0. \tag{5.1.4}$$

In particolare allora la (5.1.4) vale per ogni cammino chiuso γ se A è semplicemente connesso.

Per aperti convessi, dal Teorema di Goursat e dalla Proposizione 3.2.4, segue che una funzione olomorfa ammette primitiva olomorfa globale. Usando il Teorema 5.1.4 si dimostra che in effetti questa è una proprietà che vale per aperti semplicemente connessi:

Teorema 5.1.5: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso e sia f una funzione olomorfa su A. Allora f ha una primitiva olomorfa su A ossia esiste F olomorfa su A tale che $F' = f$. La funzione F è unica a meno di costanti. In altre parole per ogni* *funzione f una funzione olomorfa su un aperto semplicemente connesso A, la forma fdz è esatta.*

Dimostrazione: È una conseguenza immediata della Proposizione 3.2.2 e del Teorema di Cauchy 5.1.4. Dato che due funzioni olomorfe su un aperto connesso con derivata coincidente differiscono per una costante, è immediato ossevare che la primitiva è unica a meno di costanti. □

Come abbiamo già osservato, l'intuizione suggerisce che un dominio in $A \subset \mathbb{C}$ è semplicemente connesso se e solo se il suo complemento $\mathbb{C} \setminus A$ non ha componenti connesse limitate. Questo si può effettivamente dimostrare e lo faremo più tardi.

5.2. Il numero d'avvolgimento.

Definizione 5.2.1: Siano $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva chiusa C^1 a tratti e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ un punto non appartenente al sostegno di γ. Il *numero d'avvolgimento* (o *indice*) di γ rispetto a z_0 è definito da

$$n(z_0, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta. \tag{5.2.1}$$

Se $\Gamma = \sum_{j=1}^{n} m_j \gamma_j$ è una catena e z_0 è nel complemento di ogni curva γ_j, si definisce il *numero d'avvolgimento* (o *indice*) di Γ rispetto a z_0 il numero

$$n(z_0, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = \sum_{i=1}^{n} m_j n(z_0, \gamma_j). \tag{5.2.2}$$

Il numero di avvolgimento ha un importante significato geometrico. Conta, tenendo conto del verso di percorrenza, il numero di volte che si "gira attorno" z_0 mentre si percorre la curva γ. Per convicersi di questo si può procedere nel modo seguente. Per ζ che varia lungo il sostegno della curva γ si ponga

$$\zeta = z_0 + \rho(\zeta) e^{i\theta(\zeta)} = z_0 + \rho e^{i\theta}$$

dove evidentemente

$$\rho = \rho(\zeta) = |\zeta - z_0| \quad \text{e} \quad e^{i\theta} = e^{i\theta(\zeta)} = \frac{\zeta - z_0}{|\zeta - z_0|}.$$

Dunque differenziando

$$d\zeta = e^{i\theta} d\rho + i\rho e^{i\theta} d\theta = \frac{\zeta - z_0}{|\zeta - z_0|} d(|\zeta - z_0|) + i(\zeta - z_0) d\theta$$

e quindi
$$\frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} d\log(|\zeta - z_0|) + \frac{1}{2\pi} d\theta.$$
Integrando, allora,

$$n(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma d\log(|\zeta - z_0|) + \frac{1}{2\pi}\int_\gamma d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma d\theta$$

e l'ultimo integrale in effetti misura l'angolo totale spazzato dal segmento che congiunge z_0 al punto che varia lungo tutto il percorso della curva γ.

L'argomento che abbiamo presentato, pur intuitivamente corretto, non è però rigoroso. Infatti abbiamo utilizzato la funzione argomento θ con grande disinvoltura senza preoccuparci del fatto che non è ben definita su un qualunque aperto. In realtà la forma differenziale $d\theta$ si può definire anche quando la funzione θ non è ben definita e questo fatto rende ragionevole quello che abbiamo fatto. Piuttosto che seguire questa direzione di lavoro, dimostreremo le proprietà del numero di avvolgimento in modo diverso e più semplice. Prima di tutto osserviamo che è un intero:

Teorema 5.2.1: *Sia $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un cammino chiuso C^1 a tratti e sia $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$. Allora*
$$n(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre la funzione $n(\bullet,\gamma)\colon \mathbb{C}\setminus\gamma([a,b]) \to \mathbb{Z}$ è continua ed è quindi costante su ogni componente connessa di $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$. In particolare $n(\bullet,\gamma)$ è identicamente nulla sulla componente connessa illimitata di $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$. Infine se $\gamma_1,\gamma_2\colon [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ sono cammini chiusi C^1 a tratti omotopi (in $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$) allora $n(z_0,\gamma_1) = n(z_0,\gamma_2)$.

Dimostrazione: Si definisca per $x \in [a,b]$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt. \tag{5.2.3}$$

Dato che

$$n(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt,$$

dobbiamo dimostrare che $F(b) \in \mathbb{Z}$. La funzione F definita da (5.2.3) è continua su $[a,b]$ e ha derivata (nei punti dove γ è di classe C^1):

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\gamma'(x)}{\gamma(x) - z_0}.$$

Allora la funzione G definita su $[a,b]$ da

$$G(x) = e^{-2\pi i F(x)}(\gamma(x) - z_0)$$

è continua e, nel complemento in $[a,b]$ del numero finito di punti dove γ non è di classe C^1 ha derivata data da:

$$G'(x) = -2\pi i F'(x) e^{-2\pi i F(x)}(\gamma(x) - z_0) + e^{-2\pi i F(x)}\gamma'(x) = 0.$$

Allora G è continua e costante a tratti e quindi è costante. In particolare possiamo concludere che

$$e^{-2\pi i F(b)}(\gamma(b) - z_0) = G(b) = G(a) = e^{-2\pi i F(a)}(\gamma(a) - z_0) = \gamma(a) - z_0.$$

Dato che $\gamma(a) = \gamma(b) \neq z_0$, allora segue che $e^{2\pi i F(b)} = 1$ da cui segue la tesi.

La funzione $n(\bullet, \gamma)$ è continua dato che l'integrando $\frac{1}{\zeta - z}$ è continuo in z per $z \notin \gamma([a, b])$. Inoltre la funzione continua $n(\bullet, \gamma)$ a valori in $\mathbb{Z}$ necessariamente è costante sulle componenti connesse del suo dominio di definizione. Infine si osservi che, dato che $\gamma([a, b])$ è un compatto, esiste un disco $\mathbb{D}(0, R)$ tale che $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{D}(0, R)$. Dunque la componente connessa U di $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ che contiene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(0, R)$ è l'unica illimitata. Sia allora $z \in U$ con $|z| > R$. Allora per $\zeta \in \gamma([a, b])$ si deve avere

$$|\zeta - z| \geq |z| - R$$

e quindi

$$|n(z, \gamma)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{L(\gamma)}{|z| - R}$$

da cui segue che $|n(z, \gamma)| \to 0$ per $|z| \to \infty$. Questo può succedere solo se $n(z, \gamma) = 0$ per ogni $z \in U$. Infine il Teorema 5.1.3 implica immediatamente che $n(z_0, \gamma_1) = n(z_0, \gamma_2)$ se $\gamma_1, \gamma_2 \colon [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ sono cammini chiusi C^1 a tratti omotopi in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. $\square$

Per le frontiere di aperti limitati il numero di avvolgimento ha la seguente semplice interpretazione:

Teorema 5.2.2: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato con frontiera ∂A unione finita di curve semplici chiuse C^1 a tratti a due a due disgiunte. Allora, inteso che si integra lungo la frontiera orientata ∂A di A,*

$$n(z, \partial A) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{A} \\ 1 & \text{se } z \in A. \end{cases}$$

Dimostrazione: Si osservi che il risultato è immediato nel caso in cui $A = \mathbb{D}$ sia un disco. Sia A arbitrario e sia $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{A}$. Allora esiste un aperto U con $A \subset U$ e con $z \notin U$. Allora la funzione $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ è olomorfa su U e quindi dal Teorema di Cauchy 3.1.8 segue che:

$$n(z, \partial A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

Supponiamo che $z \in A$. Allora sia $r > 0$ tale che $\mathbb{D} = \mathbb{D}(z, r) \subset \overline{\mathbb{D}(z, r)} \subset A$ e si definisca $A' = A \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Allora $z \notin A'$ e $\partial A' = \partial A - \partial \mathbb{D}$ e quindi possiamo concludere

$$0 = n(z, \partial A') = n(z, \partial A) - n(z, \partial \mathbb{D}) = n(z, \partial A) - 1$$

e quindi la tesi segue. $\square$

Come conseguenza del Teorema di Cauchy 5.1.4, si dimostra la seguente versione della formula di Cauchy:

TEOREMA 5.2.3: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $\gamma\colon [a,b] \to A$ un cammino chiuso C^1 a tratti omotopo a costante in A. Allora se $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa, per ogni $z \in A \setminus \gamma([a,b])$ si ha*

$$n(z,\gamma)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta. \tag{5.2.4}$$

Dimostrazione: Si fissi $z \in A \setminus \gamma([a,b])$ e si definisca una funzione F su A mediante

$$F(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{se } w \neq z \\ \\ f'(z) & \text{se } w = z. \end{cases}$$

Allora, per costruzione, F è continua e olomorfa per $w \neq z$. Segue allora che F è olomorfa su A e, per il Teorema di Cauchy, si ha

$$0 = \int_\gamma F(\zeta)d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - f(z)\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}d\zeta,$$

da cui segue la tesi. □

5.3. Logaritmi e radici

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso. Una funzione $f \in C^0(\Omega)$ si dice *ramo di logaritmo* (o semplicemente un *logaritmo*) in Ω se si ha

$$e^{f(z)} = z \qquad \forall z \in \Omega. \tag{5.3.1}$$

Evidentemente, dato che $e^{f(z)} \neq 0$, è necessario supporre che $0 \notin \Omega$. Vedremo che questa condizione necessaria non è affatto sufficiente, ma intanto alcune osservazioni preliminari indispensabili. E' evidente, per cominciare, che a causa della periodicità della fuzione esponenziale, non si ha "unicità" del logaritmo. Infatti se vale (5.3.1) per $f \in C^0(\Omega)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ la funzione $f + 2k\pi i$ è un logaritmo. D'altra parte questa è l'unica possibile indeterminatezza se Ω è connesso. Infatti se $f, g \in C^0(\Omega)$ sono due logaritmi allora

$$e^{f(z)-g(z)} = \frac{e^{f(z)}}{e^{g(z)}} = 1$$

per ogni $z \in \Omega$ e quindi

$$\frac{1}{2\pi i}(f(z) - g(z)) \in \mathbb{Z}.$$

Dunque $\frac{1}{2\pi i}(f - g)$ è una funzione continua su un connesso a valori in $\mathbb{Z}$ e pertanto costante. In conclusione deve essere $g = f + 2k\pi i$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

Cerchiamo ora di definire un logaritmo su una parte di $\mathbb{C}$ che sia più estesa possibile.

Definizione. L'*argomento principale* di $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è l'unico numero $Arg(z) = \theta \in (-\pi, \pi]$ tale che $z = |z|e^{i\theta}$.

Si vede subito che la funzione Arg non è continua su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma è di classe C^∞ su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Se per $r \in (0, +\infty)$ denotiamo con $\log r$ l'usuale logaritmo naturale, è immediato verificare che la funzione definita da

$$Log\, z = \log|z| + iArg(z) \tag{5.3.2}$$

è un ramo di logaritmo su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Ci riferiremo alla funzione *Log* definita in (5.3.2) come *logaritmo principale*. Si osservi che il logaritmo principale è di classe C^∞. Evidentemente allo stesso modo si può definire un ramo di logaritmo sul complemento di ogni semiretta uscente dall'origine. A tal fine basta definire l'argomento in modo che assuma valori compresi in $(\alpha - 2\pi, \alpha]$, dove α è l'angolo fra l'asse reale e la semiretta in questione. Procedendo come prima si ottiene un altro ramo di logaritmo. In generale abbiamo la seguente:

PROPOSIZIONE 5.3.1: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un aperto connesso e $f \in C^0(\Omega)$ un logaritmo. Allora f è una funzione olomorfa con derivata $f'(z) = \frac{1}{z}$. Fissato $a \in \Omega \setminus (-\infty, 0]$, esiste una costante $k \in \mathbb{Z}$ tale che per ogni $z \in \Omega$, si ha*

$$f(z) = Log\, a + \int_{\gamma_z} \frac{dz}{z} + 2k\pi i \tag{5.3.3}$$

dove Log è il logaritmo principale e γ_z è una qualunque curva C^1 a tratti con primo estremo in a e secondo in z.

Dimostrazione: Per definizione la funzione $f\colon \Omega \to f(\Omega)$ è biettiva con inversa la funzione esponenziale. Siano $z, z_0 \in \Omega$ e $w = f(z), w_0 = f(z_0)$. Allora per $z \neq z_0$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{w \to w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}.$$

Per concludere la dimostrazione basta osservare che per qualche intero k si deve avere $f(a) = Log\, a + 2k\pi i$ e che, dato che f è una primitiva olomorfa di $\frac{1}{z}$, allora $f(z) = f(a) + \int_{\gamma_z} \frac{dz}{z}$. $\square$

Il seguente risultato caratterizza gli aperti sui quali è definito un ramo di logaritmo:

TEOREMA 5.3.2: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un aperto connesso, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) Esiste un ramo di logaritmo su Ω.
(ii) La funzione $\frac{1}{z}$ ha una primitiva olomorfa su Ω.
(iii) per ogni curva chiusa C^1 a tratti γ con sostegno in Ω si ha $n(\gamma, 0) = 0$.

In particolare, se Ω è semplicemente connesso, allora esiste un ramo di logaritmo su Ω.

Dimostrazione: In Proposizione 5.3.1 è dimostrato che (i) $\Rightarrow$ (ii). Dimostriamo che che (ii) $\Rightarrow$ (i): Se g è una primitiva olomorfa di $\frac{1}{z}$ su Ω, allora

$$(ze^{-g(z)})' = e^{-g(z)} - zg'(z)e^{-g(z)} = 0$$

e quindi, dato che $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ è connesso, $ze^{-g(z)}$ è una funzione costante non nulla. Allora per qualche c su Ω si ha $ze^{-g(z)} = e^c$ da cui segue che $f(z) = g(z) + c$ è un ramo di logaritmo.

Se vale la (iii) ovviamente $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$ per ogni curva chiusa C^1 a tratti γ con sostegno in Ω. Quest'ultimo fatto sappiamo che implica l'esistenza di una primitiva olomorfa di $\frac{1}{z}$ su Ω ossia a (ii).

Infine se Ω è semplicemente connesso allora ogni curva chiusa C^1 a tratti γ con sostegno in Ω è omotopa a costante in Ω e quindi si ha $n(\gamma, 0) = 0$. □

Più in generale su un aperto semplicemente connesso esiste sempre un logaritmo olomorfo di una funzione olomorfa che non si annulla:

TEOREMA 5.3.3: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso e sia $f\colon \Omega \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una funzione olomorfa. Allora esiste una funzione olomorfa $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ tale che $e^g = f$*

Dimostrazione: Se f non si annulla mai, allora la funzione olomorfa $h = f'/f$ ha una primitiva olomorfa F su Ω per il Teorema 5.1.5. Dato che Ω è connesso e che $(fe^{-F})' = 0$ si ha che $fe^{-F} = k \neq 0$ per qualche costante k. Se $k = e^c$ allora $f = e^{c+F}$ e quindi $g = c + F$. □

Si osservi che, nel caso in cui sull'immagine $f(\Omega)$ della funzione f sia definito un ramo di logaritmo $Log\, z$, allora come logaritmo olomorfo della funzione f si può scegliere semplicemente $g = Log \circ f$. D'altro canto il Teorema 5.3.3 si può applicare a situazioni più generali. Ad esempio alla funzione $f(z) = z^2$ definita sul complemento dell'asse reale negativo $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ si applica il Teorema 5.3.3 mentre su $\mathbb{C}^* = f(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ non è definito alcun ramo di logaritmo.

Esattamente come si procede per definire le potenze reali di esponente arbitrario, una volta in possesso di una buona nozione di logaritmo, si può provare a definire potenze con esponente complesso arbitrario.

Siano $a \in \mathbb{C}^*$, e $b \in \mathbb{C}$. Se $Log\, a$ è un qualsiasi valore del logaritmo di a, definiamo *un valore della potenza b-esima di a* il numero complesso

$$a^b = e^{bLog\, a}. \tag{5.3.4}$$

Naturalmente, dato che $Log\, a$ è determinato a meno di multipli interi di $2\pi i$, il numero a^b definito da (5.3.4) è determinato a meno di un fattore del tipo $e^{2kb\pi i}$ per qualche intero k. A causa di questo fatto occorre essere prudenti nell'utilizzare la definizione (5.3.4). Ad esempio se $b \in \mathbb{Z}$ è un intero, allora vi è un solo valore per a^b e questo è l'usuale potenza b-esima di a. Nel caso in cui $b \in \mathbb{Q}$ è razionale, allora vi sono un numero finito di valori per a^b. Per convincersene basta considerare il caso $b = \frac{1}{n}$ per n intero positivo. In questo caso si ha

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} = e^{\frac{2l\pi i}{n}} \iff k - l = 0 \pmod n$$

e $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ può assumere esattamente n valori distinti, le radici n-esime dell'unità:

$$\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \zeta_n^2 = e^{\frac{4k\pi i}{n}}, \ldots, \zeta_n^{n-1} = e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}, \zeta_n^n = 1$$

Pertanto $a^{\frac{1}{n}}$ assume n valori:

$$e^{\frac{Log\, a}{n}}, \zeta_n e^{\frac{log\, a}{n}}, \ldots, \zeta_n^{n-1} e^{\frac{Log\, a}{n}}$$

dove $Log\, a$ è un qualunque valore del logaritmo di a. In questo caso allora, come ci si poteva aspettare la potenza con esponente $\frac{1}{n}$ è esattamente la radice n-esima di un numero complesso. Se invece $b \notin \mathbb{Q}$ non è un numero razionale, allora, al variare di $k \in \mathbb{Z}$ l'esponenziale $e^{2kb\pi i}$ assume infiniti valori e quindi, in questo caso vi sono infiniti valori per a^b.

Ricordiamo infine che per un intero positivo $b = 1, 2, \ldots$ si ha $0^b = 0$ e che si pone $0^0 = 1$. Chiariti questi preliminari è possibile considerare funzioni definite per mezzo di potenze. Per ogni fissato logaritmo Log su un aperto contenente a, la *funzione esponenziale* $z \mapsto a^z$ *con base* $a \in \mathbb{C}^*$ è definita su tutto $\mathbb{C}$ ed è olomorfa con derivata data da $(a^z)' = Log\, a\, a^z$. Si osservi che, dalle proprietà dell'esponenziale, segue immediatamente che $a^{z+w} = a^z a^w$. Evidentemente per diverse scelte del valore del logaritmo di a si ottengono esponenziali diversi che differiscono l'uno dall'altro per un fattore del tipo $e^{2k\pi i z}$ per un opportuno $k \in \mathbb{Z}$.

Per definire in modo appropriato la funzione potenza b-esima, dato che in generale si tratta di invertire una funzione non iniettiva, si incontrano le stesse difficoltà incontrate per il logaritmo. In effetti per superare il problema ci riconduciamo alla la costruzione fatta per i logaritmi. Sia $b \in \mathbb{C}$ fissato e sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto su cui è definito un ramo di logaritmo $Log\, z$. La funzione definita f su A da $f(z) = e^{bLog\, z}$ si dice *ramo della potenza b-esima*. Se non ci sono ambiguità scriveremo semplicemente $f(z) = z^b$ per un ramo di potenza b-esima. Qualunque ramo di potenza è una funzione olomorfa e per la derivata si ha:

$$(z^b)' = \frac{b}{z} e^{bLog\, z} = be^{(b-1)Log\, z} = bz^{b-1}$$

dove evidentemente z^{b-1} è il ramo della potenza $(b-1)$-esima definito su A dallo stesso ramo di logaritmo che definisce z^b. Si osservi che l'usuale relazione $(zw)^b = z^b w^b$ non vale per tutti i rami di potenza b-esima ma solo se per il ramo di logaritmo utilizzato nella definizione si ha $Log(zw) = Log\, z + Log\, w$.

Naturalmente in generale bisogna aspettarsi molti rami per la stessa potenza, il più delle volte infiniti. Per un esponente intero, dalla discussione fatta, segue che c'è un solo ramo di potenza che è esattamente la funzione $z \mapsto z^n$ usuale. È utile sottolineare il caso delle radici ossia delle potenze $\frac{1}{n}$-esime per n intero positivo. Se come prima denotiamo $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, fissato su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ un ramo $Logz$ di logaritmo, allora

$$e^{\frac{Log\, z}{n}}, \zeta_n e^{\frac{Log\, z}{n}}, \ldots, \zeta_n^{n-1} e^{\frac{Log\, z}{n}} \tag{5.3.5}$$

definiscono n rami della potenza $z^{\frac{1}{n}}$

Proposizione 5.3.4: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso sul quale è definito un ramo di logaritmo $Log\, z$. Se $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua tale che $(f(z))^n = z$ per ogni $z \in A$, allora f è una delle funzioni definite in (5.3.5).*

Dimostrazione: Sia $r_0(z) = e^{\frac{Log\, z}{n}}$. Allora per ogni $z \in A$ si ha $\left(\frac{f(z)}{r_0(z)}\right)^n = 1$. Dunque per qualche $j = 0, \ldots, n-1$ si ha $\frac{f(z)}{r_0(z)} = \zeta_n^j$. In altre parole la fuzione continua $\frac{f(z)}{r_0(z)}$ definita su un aperto connesso à valori nello spazio discreto $\{1, \zeta_n, \ldots, \zeta_n^{n-1}\}$. Dunque $\frac{f(z)}{r_0(z)}$ è costante e quindi f è una delle funzioni definite in (5.3.5). □

Questa osservazione è spesso molto utile:

PROPOSIZIONE 5.3.5: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto tale che per ogni funzione olomorfa che non si annulla ammette un logaritmo olomorfo. Allora ogni funzione olomorfa su Ω che non si annulla ammette una radice n-esima olomorfa ossia per ogni funzione olomorfa g su Ω con $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$, esiste h olomorfa su Ω con $h^n = g$. L'ipotesi vale se Ω è semplicemente connesso.*

Dimostrazione: Se g non si annulla mai, sia f la funzione olomorfa su Ω con $g = e^f$. Allora $h = e^{f/n}$ è la radice n-esima olomorfa cercata. □

La funzione $f(z) = z^2$ ha ovviamente una radice quadrata olomorfa anche su $\mathbb{C}^*$ che non è semplicemente connesso. Vedremo più tardi che se invece su un aperto ogni funzione olomorfa che non si annulla ammette radice n-esima olomorfa per ogni n, allora ogni funzione olomorfa che non si annulla ammette logaritmo olomorfo e l'aperto è necessariamente semplicemente connesso.

Chiudiamo il paragrafo con un'applicazione della Proposizione 5.3.5 allo studio locale delle funzioni olomorfe.

TEOREMA 5.3.6: *Sia f una funzione olomorfa su un aperto A. Siano $z_0 \in A$ e $w_0 = f(z_0)$. Se $n \geq 1$ è la molteplicità dello zero della funzione $f(z) - w_0$ in z_0, allora esistono un aperto $U \ni z_0$, un disco V centrato nell'origine 0 e un biolomorfismo $H\colon V \to U$ tali che per ogni $\zeta \in V$ si ha:*

$$f \circ H(\zeta) = f(H(\zeta)) = \zeta^n + w_0. \tag{5.3.6}$$

Dimostrazione: Esiste un disco aperto $\mathbb{D} \subset A$ centrato in z_0 tale che su $\mathbb{D}$ si ha $f(z) - w_0 = (z - z_0)^n g(z)$ con g olomorfa con $g(z_0) \neq 0$ e quindi, se $\mathbb{D}$ ha raggio sufficientemente piccolo, con $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. Per la Proposizione 5.3.5, esiste una funzione olomorfa h su $\mathbb{D}$ tale che $h^n = g$. Segue allora che, per $z \in \mathbb{D}$ si ha $f(z) - w_0 = [(z - z_0)h(z)]^n$. Si definisca $G(z) = (z - z_0)h(z)$. Allora G è olomorfa su $\mathbb{D}$, $G(z_0) = 0$ e $G'(z_0) = h(z_0) \neq 0$. Dunque, per il teorema dell'applicazione inversa, esistono aperti $U \ni z_0$, $V \ni 0$ tali che $G_{|U}\colon U \to V$ è un biolomorfismo. Evidentemente si può sempre scegliere V come un disco centrato nell'origine. L'inverso $H = \left(G_{|U}\right)^{-1}$ è il biolomorfismo richiesto. Infatti per $\zeta \in V$ si ha:

$$f(H(\zeta)) = [(G(H(\zeta))]^n + w_0 = \zeta^n + w_0.$$

□

Il teorema Teorema 5.3.6 ci permette di trarre alcune importanti conclusioni sul comportamento locale di funzioni olomorfe intese come trasformazioni di sottoinsiemi di $\mathbb{C}$. Alla prima parte del seguente risultato ci si riferisce in letteratura come il *Teorema dell'applicazione aperta*. Ne daremo ulteriore dimostrazione più tardi in un contesto differente.

Teorema 5.3.7: *Sia f una funzione olomorfa non costante su un aperto connesso A. Allora $f(A)$ è un aperto di $\mathbb{C}$. Inoltre per ogni $z_0 \in A$, se $w_0 = f(z_0)$ la molteplicità dello zero della funzione $f(z) - w_0$ in z_0 è $n \geq 1$ e esistono aperti $U \subset A$ contente z_0, $W \subset f(A)$ contente $w_0 = f(z_0)$ tali che:*
(i) il valore w_0 non è assunto da f in altri punti di V oltre z_0;
(ii) ogni altro valore $w \neq w_0$ di W è assunto esattamente in n punti distinti $z_1, \ldots, z_n$ di V e la molteplicità degli zeri di $f(z) - f(z_j)$ è 1 per ogni $j = 1, \ldots, n$.

Dimostrazione: Si osservi preliminarmente che l'applicazione $p_n(\zeta) = \zeta^n$ per $n \geq 1$ trasforma dischi centrati nell'origine in dischi centrati nell'origine. Dato che f è non costante e A è connesso, allora per ogni $z_0 \in A$ la molteplicità dello zero di $f(z) - f(z_0)$ è $n \geq 1$. Siano dunque l'aperto $U \ni z_0$, il disco V centrato nell'origine 0 e il biolomorfismo $H: V \to U$ trovati nel Teorema 5.3.6 tali che per ogni $\zeta \in V$ si abbia:

$$f(H(\zeta)) = \zeta^n + w_0.$$

Se $W = f(U)$, allora $W = \{w = \zeta^n + w_0 \mid \zeta \in V\}$ è un disco centrato in w_0 contenuto in $f(A)$. Per l'arbitrarietà di $z_0 \in A$, abbiamo allora che $f(A)$ è un aperto. Inoltre, dato che H è biettiva allora (i) e (ii) seguono immediatamente dal fatto che l'unica radice n-esima di 0 è 0 (con molteplicità n) e mentre ogni altro numero complesso ha n radici n-esime ciascuna di molteplicità 1. $\square$

Esercizi

1. Dimostrare che l'argomento principale non ha estensione continua su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma è di classe C^∞ su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

2. Dimostrare che, per $|z| < 1$, vale il seguente sviluppo di Taylor:

$$Log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k.$$

3. Siano f, g funzioni intere (ossia olomorfe su $\mathbb{C}$). Dimostrare che $f^2 + g^2 \equiv 1$ su $\mathbb{C}$ se e solo se esiste una funzione intera h tale che $f = \cos h$ e $g = \sin h$. *Consiglio: se $1 \equiv f^2 + g^2 = (f + ig)(f - ig)$ allora la funzione $f + ig$ è olomorfa e mai nulla su $\mathbb{C}$ che è semplicemente connesso....*

5.4. Proprietà topologiche di aperti semplicemente connessi.

In questo paragrafo studiamo l'equivalenza di proprietà geometriche e proprietà analitiche che valgono per aperti semplicemente connessi. Ci occorre, per cominciare, il seguente risultato sul quale torneremo in seguito:

Teorema 5.4.1: (di Liouville) *Una funzione intera limitata è costante.*

Dimostrazione: . Sia $f(z)$ una funzione intera (ossia olomorfa su tutto $\mathbb{C}$) limitata e sia $M > 0$ tale che $|f(z)| < M$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Dunque per ogni $z \in \mathbb{C}$ vale lo viluppo di Taylor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

D'altra parte, se $R > 0$, per ogni $k \geq 1$, utilizzando la formula di Cauchy per le derivate di f, abbiamo

$$0 \leq \left| f^{(k)}(0) \right| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{R^{k+1}} 2\pi R = k! \frac{M}{R^k}.$$

Dato che $R > 0$ è arbitrario, necessariamente deve essere $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \geq 0$ e quindi f è costante. $\square$

Possiamo ora generalizzare il Teorema 5.2.3:

Teorema 5.4.2: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $\gamma: [a,b] \to A$ un cammino chiuso C^1 a tratti tale che $n(z,\gamma) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus A$. Allora se $f: A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa,*

$$\int\limits_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0 \tag{5.4.1}$$

e per ogni $z \in A \setminus \gamma([a,b])$ si ha

$$n(z,\gamma) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{5.4.2}$$

Dimostrazione: Siano $\gamma: [a,b] \to A$ un cammino chiuso C^1 a tratti tale che $n(z,\gamma) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus A$ e f una funzione olomorfa su A. Definiamo:

$$B = \{z \in \mathbb{C} \setminus Im(\gamma) \mid n(z,\gamma) = 0\}.$$

Dato che per ipotesi se $z \in \mathbb{C} \setminus A$ si ha $n(z,\gamma) = 0$, si osservi che si ha $\mathbb{C} \setminus A \subset B$ e quindi $\mathbb{C} = A \cup B$. Inoltre B è un aperto. Infatti siano $z_0 \in B$ e $z_1 \neq z_0$. Allora

$$\begin{aligned}
|n(z_0,\gamma) - n(z_1,\gamma)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0)} d\zeta - \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_1} d\zeta \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \left[\frac{1}{\zeta - z_0} - \frac{1}{\zeta - z_1} \right] d\zeta \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{z_0 - z_1}{(\zeta - z_0)(\zeta - z_1)} d\zeta \right| \\
&\leq |z_0 - z_1| \frac{L(\gamma)}{2\pi} \max_\gamma \frac{1}{|(\zeta - z_0)(\zeta - z_1)|}.
\end{aligned}$$

Se

$$R < \left[\frac{L(\gamma)}{2\pi} \max_{\gamma} \frac{1}{|(\zeta - z_0)(\zeta - z_1)|}\right]^{-1},$$

allora per ogni $z \in \mathbb{D}(z_0, R)$ si ha $|n(z_0, \gamma) - n(z_1, \gamma)| < 1$. Dato che il numero di avvolgimento è sempre un intero, deve essere $n(z_1, \gamma) = 0$ e quindi $\mathbb{D}(z_0, R) \subset B$. Per l'arbitrarietà di $z_0 \in B$ segue che B è aperto.

Definiamo una funzione $g\colon A \times A \to \mathbb{C}$ mediante:

$$g(\zeta, z) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \text{se } \zeta \neq z \\ \\ f'(z) & \text{se } \zeta = z. \end{cases}$$

Allora si si vede subito che g è continua su $A \times A$ e che, per ogni fissato $\zeta \in A$, la funzione $z \mapsto g(\zeta, z)$ è olomorfa su A.

Se $z \in A \cap B$ e $\zeta \in Im(\gamma)$, allora necessariamente $\zeta \neq z$ e quindi $g(\zeta, z) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$ e

$$\int_\gamma g(\zeta, z) d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - (2\pi i) n(z, \gamma) f(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{5.4.3}$$

È allora ben definita e olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ la funzione $h(z)$ data da

$$h(z) = \begin{cases} \int_\gamma g(\zeta, z) d\zeta & \text{se } z \in A \\ \\ \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta & \text{se } z \in B. \end{cases}$$

Se $|z|$ è sufficientemente grande, deve essere $n(z, \gamma) = 0$. Quindi $z \in B$ e $h(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. Dato che per qualche $r > 0$ si deve avere $Im(\gamma) \subset \mathbb{D}(0, r)$ e

$$\left|\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right| \leq L(\gamma) \frac{\max_\gamma |f|}{|z| - r},$$

da cui segue che $\lim_{z \to \infty} |h(z)| = 0$ e quindi che h è limitata. Ma allora, per il Teorema di Liouville, h è costante e, di nuovo dato che $\lim_{z \to \infty} |h(z)| = 0$, deve essere $h \equiv 0$. Se $z \in A \setminus Im(\gamma)$, come in (5.4.3), calcoliamo:

$$0 = h(z) = \int_\gamma g(\zeta, z) d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - (2\pi i) n(z, \gamma) f(z)$$

e quindi (5.4.2) è provata. La (5.4.1) segue scegliendo un qualunque $z \in A \setminus Im(\gamma)$ e applicando (5.4.2) alla funzione definita per $w \in A$ da $\phi(w) = (w - z) f(w)$:

$$0 = n(z, \gamma)\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) d\zeta.$$

□

Si osservi che il Teorema 5.4.2 è più generale di Teorema 5.2.3. In effetti mentre se una curva chiusa è γ omotopa a costante in A si ha $n(z, \gamma) = 0$ per $z \notin A$, non è vero il viceversa. Si può dimostrare che la curva γ in $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ in Figura 5.1 non è omotopa a costante in $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ ma $n(0,\gamma) = n(1,\gamma) = 0$.

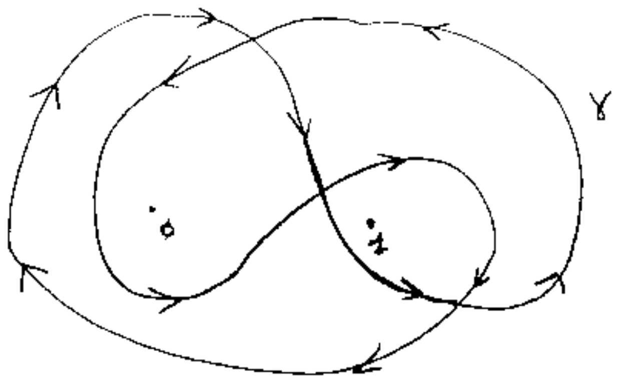

Fig. 5.1

D'altra parte dimostreremo più avanti che un aperto A tale che si abbia $n(z,\gamma) = 0$ per $z \notin A$ per ogni curva chiusa C^1 a tratti γ in A è semplicemente connesso e quindi ogni tale γ è omotopa a costante.

Ricordando che denotiamo la sfera di Riemann con $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, abbiamo il seguente:

Teorema 5.4.3: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Allora $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ è connesso se e solo se per ogni catena Γ di curve chiuse C^1 a tratti di A e per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus A$ si ha $n(z,\Gamma) = 0$.*

Dimostrazione: Se $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ è connesso e $z \in \mathbb{C} \setminus A$, allora z è nella componente connessa illimitata del complemento (in $\mathbb{C}$) di A e abbiamo già dimostrato che $n(z,\gamma) = 0$ per ogni curva chiusa C^1 a tratti γ di A. Supponiamo, viceversa che $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ non sia connesso. Dobbiamo dimostrare che esiste una catena Γ di curve chiuse C^1 a tratti di A tale che si abbia $n(z,\Gamma) \neq 0$ per qualche $z \in \mathbb{C} \setminus A$. Se $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ non è connesso esistono chiusi disgiunti $K, L \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus A$ tali che $K \cup L = \hat{\mathbb{C}} \setminus A$. Allora K e L sono compatti dato che $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ è chiuso in $\hat{\mathbb{C}}$ e quindi compatto. Uno fra K e L contiene il punto $\{\infty\}$: supponiamo $\{\infty\} \in L$. Dunque K è un compatto contenuto in $\mathbb{C}$ e quindi chiuso e limitato. Dato che $A' = A \cup K = \hat{\mathbb{C}} \setminus L = \mathbb{C} \setminus L$ è un aperto di $\hat{\mathbb{C}}$ che non contiene ∞, $A' = A \cup K$ è un aperto di $\mathbb{C}$ che contiene il compatto K. Allora, grazie al Lemma 2.4.1, esiste un aperto D tale che $K \subset D \subset \overline{D} \subset A'$ con $\overline{D}$ compatto e ∂D lineare a tratti costituita da poligoni ottenuti come unione finita di segmenti paralleli o all'asse reale o all'asse immaginario.

Sia $z \in K \subset D$. Allora per il Teorema 5.2.2 abbiamo che $n(z,\partial D) = 1$.

$\square$

Per la dimostrazione del Teorema 5.4.3 è comodo utilizzare la sfera di Riemann ma è utile riformulare il fatto che $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ sia connesso per un aperto A di

$\hat{\mathbb{C}}$ senza fare riferimento a $\mathbb{C}$. Infatti il complemento in $\mathbb{C}$ di un aperto semplicemente connesso può essere sconnesso. Si consideri ad esempio il caso di una "striscia" $S = \{z \in \mathbb{C} \mid a < Rez < b\}$ per $a < b$. Quello che si può provare è che i complementi degli aperti semplicemente connessi in $\mathbb{C}$ non possono avere "isole" ossia componenti connesse compatte. Questo fatto, molto intuitivo, richiede una dimostrazione non completamente immediata:

Proposizione 5.4.4: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Allora $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ è connesso se e solo $\mathbb{C} \setminus A$ non ha componenti connesse compatte.*

Dimostrazione: Supponiamo che $\mathbb{C} \setminus A$ non abbia componenti connesse compatte. Se $\{C_j\}_{j\in J}$ è l'insieme delle componenti connesse illimitate di $\mathbb{C} \setminus A$, definiamo

$$L_\infty = \{\infty\} \cup (\cup_{j\in J} C_j)\,.$$

Dunque

$$\mathbb{C} \setminus A = \bigcup_{j\in J} C_j \qquad \text{e} \qquad \hat{\mathbb{C}} \setminus A = \{\infty\} \cup \mathbb{C} \setminus A = L_\infty$$

dove le unioni sono tutte unioni disgiunte. Per dimostrare che $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ è connesso basterà provare che L_∞ è connesso.

Supponiamo che esistano aperti disgiunti U_1, U_2 di $\hat{\mathbb{C}}$ tali che

$$L_\infty = (U_1 \cap L_\infty) \cup (U_2 \cap L_\infty)$$

e che $\infty \in U_1$. In questo caso $\infty \notin U_2$ e quindi U_2 è un aperto di $\mathbb{C}$. Inoltre, dato che U_1 è un aperto di $\hat{\mathbb{C}}$ che contiene ∞, esiste $R > 0$ tale che $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}(0,R)} \subset U_1$. Abbiamo allora che $U_2 \cap L_\infty \subset \mathbb{D}(0,R)$ e quindi che $U_2 \cap L_\infty$ è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{C}$. Ma allora ogni per ogni componente illimitata C_j di $\mathbb{C} \setminus A$ si ha $C_j \subset U_1 \cap L_\infty$ e quindi $U_2 \cap L_\infty = \emptyset$ e L_∞ è connesso.

Supponiamo ora che $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ sia connesso e che esista una componente connessa compatta K di $\mathbb{C} \setminus A$. Per il Lemma 5.4.6 che dimostreremo al termine del paragrafo, esiste un intorno N di K in $\mathbb{C} \setminus A$ che è sia aperto che chiuso in $\mathbb{C} \setminus A$ e limitato in $\mathbb{C}$. Dato che N è chiuso in $\mathbb{C} \setminus A$, è chiuso anche in $\mathbb{C}$ e quindi compatto e chiuso in $\hat{\mathbb{C}}$. D'altra parte N è aperto in $\mathbb{C} \setminus A$ che è aperto in $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$. Dunque N è anche aperto in $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$. Dato che N è aperto e chiuso in $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ e che, essendo limitato in $\mathbb{C}$ non contiene ∞, segue che N è unione di componenti connesse di $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ che non contengono ∞. Ma allora $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ non sarebbe connesso, contro l'ipotesi.

□

Possiamo ora dimostrare il seguente:

Teorema 5.4.5: *Per un aperto $A \subset \mathbb{C}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) *$\mathbb{C} \setminus A$ non ha componenti connesse compatte;*
(ii) *$\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ è connesso;*
(iii) *per ogni catena Γ di curve chiuse C^1 a tratti di A e per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus A$ si ha $n(z,\Gamma) = 0$;*
(iv) *per ogni curva chiusa C^1 a tratti di A e per ogni funzione olomorfa f su A sia ha $\int_\gamma f(z)dz = 0$;*

(v) *ogni funzione olomorfa su A ha una primitiva olomorfa su A;*
(vi) *ogni funzione olomorfa mai nulla su A ha una logaritmo olomorfo su A;*
(vii) *per ogni intero positivo n, ogni funzione olomorfa mai nulla su A ha una radice n-esima olomorfa su A.*

Tutte queste condizioni sono soddisfatte quando A è semplicemente connesso.

Dimostrazione: Abbiamo dimostrato in Proposizione 5.4.4 che (i) e (ii) sono equivalenti e in Teorema 5.4.3 che (ii) equivale a (iii). Dal Teorema 5.4.2 segue che (iii) implica (iv). Dai risultati del Capitolo 3 segue che (iv) implica (v). Ripetendo parola per parola la dimostrazione del Teorema 5.3.3, abbiamo che (v) implica (vi) e con la dimostrazione di Proposizione 5.3.4 si ha che (vi) implica (vii).

Supponiamo che valga (vii). Sia f una funzione olomorfa mai nulla su A. Per ogni intero positivo n sia g_n una funzione olomorfa tale che $(g_n)^n = f$. Allora per ogni n

$$\frac{g_n'(z)}{g_n(z)} = \frac{1}{n}\frac{f'(z)}{f(z)}$$

e di conseguenza, se γ è una curva chiusa C^1 a tratti e $\gamma_n = g_n \circ \gamma$ è la curva ottenuta componendo γ con g_n, abbiamo:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(0,\gamma_n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{d\zeta}{\zeta} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_n'(z)}{g_n(z)}dz \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0\end{aligned}.$$

D'altra parte $n(0,\gamma_n) \in \mathbb{Z}$ per ogni n e quindi, necessariamente, per n grande abbastanza si deve avere $n(0,\gamma_n) = 0$ da cui segue $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n(0,\gamma_n) = 0$. Dato che γ è una curva chiusa C^1 a tratti arbitaria di A, allora la funzione $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ha una primitiva olomorfa F. Allora, procedendo come nel Teorema 5.3.3, si trova una costante $c \in \mathbb{C}$ in modo che $c + F$ sia un logaritmo olomorfo di f e quindi (vi) vale.

Per concludere che le affermazioni sono tutte equivalenti, basta dimostrare che (vi) implica (iii). Sia $z_0 \in \mathbb{C}\setminus A$ e si consideri la funzione $f(z) = z - z_0$. Allora f è olomorfa e non nulla su A. Dunque f ha un logaritmo olomorfo F su A tale che $F'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_0}$. Dunque se γ è una curva chiusa C^1 a tratti arbitaria di A, abbiamo:

$$n(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F'(z)dz = 0.$$

Infine se A è semplicemente connesso si ha che la (iii) vale dato che ogni curva chiusa C^1 a tratti di A è omotopa a costante in A. □

Osservazione. Dimostreremo che se per A vale (vii) allora A è semplicemente connesso. In effetti è sufficiente che valga (vii) per $n = 2$.

Rimane da provare il seguente Lemma utilizzato nella dimostrazione della Proposizione 5.4.4:

LEMMA 5.4.6: *Sia A un aperto in $\mathbb{C}$ e K una componente connessa compatta di $\mathbb{C}\setminus A$. Esiste un intorno N di K in $\mathbb{C}\setminus A$ che è sia aperto sia chiuso in $\mathbb{C}\setminus A$ e limitato in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione: Ci si può limitare a dimostrare il lemma nel caso nel quale $\mathbb{C} \setminus A$ sia compatto. Infatti ci si può sempre ridurre a tale situazione nel modo seguente. Sia $R > 0$ tale che $K \subset \mathbb{D}(0,R) \subset \overline{\mathbb{D}(0,R)}$ e sia $A^R = A \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$. Allora $B = \overline{\mathbb{D}(0,R)} \cap \mathbb{C} \setminus A = \mathbb{C} \setminus A^R$ è un compatto complemento di un aperto di $\mathbb{C}$. Inoltre $K \subset B$ è una componente connessa di B dato che qualunque connesso contente K e contenuto in B sarebbe contenuto anche in $\mathbb{C} \setminus A$ e quindi coinciderebbe con K. Supponiamo che la proposizione valga per le componenti connesse compatte di $B = \overline{\mathbb{D}(0,R)} \cap \mathbb{C} \setminus A = \mathbb{C} \setminus A^R$. Siano U, V aperti di $\mathbb{C} \setminus A$ tali che $K \subset V \subset U \cap B$. Si osservi che in questo caso d V è anche un aperto di B che contiene K. Dunque, se la Proposizione vale per K in B, esiste un insieme $N \subset B$ aperto e chiuso in B con $K \subset N \subset V$. Evidentemente N è limitato. Dato che B è chiuso in $\mathbb{C} \setminus A$ e N è chiuso in B, allora N è un chiuso di $\mathbb{C} \setminus A$. D'altra parte N è aperto in B e $N = N \cap V$ è aperto in V che a sua volta è aperto in $\mathbb{C} \setminus A$. Pertanto N è aperto anche in $\mathbb{C} \setminus A$.

Dimostriamo allora la Proposizione sotto l'ipotesi che $\mathbb{C} \setminus A$ sia compatto. Sia

$$\mathcal{S} = \{N \subset \mathbb{C} \setminus A \mid N \,\text{aperto e chiuso in}\, \mathbb{C} \setminus A\}.$$

Evidentemente $\mathbb{C} \setminus A \in \mathcal{S} \neq \emptyset$. Definiamo $L = \bigcap_{N \in \mathcal{S}} N$. Allora $K \subset L$ e, dato che ciascun $N \in \mathcal{S}$ è chiuso, L è chiuso nel compatto $\mathbb{C} \setminus A$ e quindi a sua volta compatto. Dimostriamo ora che per ogni aperto W di $\mathbb{C} \setminus A$ che contiene L esiste un intorno N_0 di L aperto e chiuso tale che $L \subset N_0 \subset W$. Sia W aperto di $\mathbb{C} \setminus A$ che contiene L. Allora $N \cap ((\mathbb{C} \setminus A) \setminus W)$ per ogni $N \in \mathcal{S}$ e

$$\bigcap_{N \in \mathcal{S}} [N \cap ((\mathbb{C} \setminus A) \setminus W)] = L \cap ((\mathbb{C} \setminus A) \setminus W) = \emptyset.$$

Dato che $(\mathbb{C} \setminus A) \setminus W$ è compatto perché chiuso in un compatto, allora esistono $N_1, \ldots, N_r \in \mathcal{S}$ tali che

$$\bigcap_{j=1}^{r} [N_j \cap ((\mathbb{C} \setminus A) \setminus W)] = \emptyset.$$

Se $N_0 = N_1 \cap \ldots \cap N_r$ allora è sia aperto sia chiuso in $\mathbb{C} \setminus A$ e $L \subset N_0 \subset W$.

La dimostrazione sarà completa se dimostriamo che $K = L$. Per fare questo basta dimostrare che L è connesso dato che contiene K che è una componente connessa di $\mathbb{C} \setminus A$. Siano allora F, G chiusi tali che

$$L = F \cup G \qquad \text{e} \qquad F \cap G = \emptyset.$$

Dato che $K \subset L$ è connesso, deve essere contenuto in uno solo fra F e G: supponiamo $K \subset F$. Dato che $\mathbb{C} \setminus A$ è compatto e F, G sono chiusi, esistono aperti U, V con

$$F \subset U, \quad G \subset V \quad \text{e} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Per quanto provato sopra, esiste N_0 tale che $L \subset N_0 \subset U \cup V$. Dato che N_0 e U sono aperti in $\mathbb{C} \setminus A$ allora $N_0 \cap U$ è aperto in $\mathbb{C} \setminus A$. D'altra parte $N_0 \cap U = N_0 \cap ((\mathbb{C} \setminus A) \setminus V)$ e quindi è chiuso in $\mathbb{C} \setminus A$ perché intersezione di chiusi.

Si ha allora che $K \subset L \subset N_0$ e $K \subset F \subset U$ e quindi $K \subset N_0 \cap U$. Dunque $N_0 \cap U$ è un aperto e chiuso di $\mathbb{C} \setminus A$ che contiene K ossia $N_0 \cap U \in \mathcal{S}$ e di conseguenza $L \subset N_0 \cap U$. Allora $L \cap V = \emptyset$ e pertanto deve essere $G \subset L \cap V = \emptyset$ da cui segue che L è connesso.

□