CAPITOLO 6

Diseguaglianze di Cauchy: convergenza e geometria di funzioni olomorfe

6.1. Diseguaglianze di Cauchy e convergenza di successioni di funzioni olomorfe.

Una proprietà caratteristica delle funzioni olomorfe – diretta conseguenza delle formule integrali di Cauchy per una funzione olomorfa e per le sue derivate – consiste nella possibilità di stimare le derivate in termini della funzione stessa. Il prossimo risultato fornisce la versione base delle fondamentali *diseguaglianze di Cauchy*:

TEOREMA 6.1.1: *Sia f una funzione olomorfa in un intorno del disco chiuso $\overline{D(z_0, r)}$. Se $0 < \delta < r$, allora per ogni $z \in \overline{D(z_0, r - \delta)}$ si ha*

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq r \frac{n!}{\delta^{n+1}} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|. \tag{6.1.1}$$

Inoltre

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|. \tag{6.1.2}$$

Dimostrazione: Ricordiamo che vale la seguente formula di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa (3.2.3):

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Dunque se per $0 < \delta < r$ si prende $z \in \overline{D(z_0, r - \delta)}$, si deve avere $|\zeta - z| \geq \delta$ per $\zeta \in \partial D(z_0, r)$ e quindi

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n!}{2\pi} L(\partial D(z_0, r)) \frac{\max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|}{\delta^{n+1}}$$

ossia (6.1.1). La (6.1.2) si ottiene immediatamente dalla (6.1.1) per $z \to z_0$ e $\delta \to r$. □

Dalle diseguaglianze di Cauchy si ottiene la seguente stima che è molto utile nelle applicazioni:

Teorema 6.1.2: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $K \subset A$ un sottoinsieme compatto. Per ogni intero positivo n esiste una costante C_n, che dipende solo da n, K e A, tale che per ogni funzione f olomorfa su A si abbia*

$$\sup_K \left| f^{(n)} \right| \le C_n \sup_A |f| \,. \tag{6.1.3}$$

Dimostrazione: Sia $d = \frac{1}{2} \min_{z \in K} dist(z, \partial A)$. Dato che K è un compatto contenuto in A e che la distanza da un chiuso è una funzione continua, si osservi che $d > 0$. Si ponga $C_n = \frac{n!}{d^n}$. Allora, fissato arbitrariamente $z_0 \in K$, si ha $\overline{D(z_0, d)} \subset A$. Dato che evidentemente

$$\sup_{\overline{D(z_0,d)}} |f| \le \sup_A |f|,$$

allora da (6.1.2):

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \le \frac{n!}{d^n} \max_{|z - z_0| = d} |f(z)| \le C_n \sup_A |f|$$

e quindi, passando al sup per $z_0 \in K$, (6.1.3) segue immediatamente. □

Vediamo ora come questi risultati siano utili per studiare la convergenza di successioni di funzioni olomorfe. Il primo risultato che dimostriamo, in termini topologici afferma che, nella topologia della convergenza uniforme sui compatti, l'insieme delle funzioni olomorfe è un chiuso nello spazio delle funzioni continue su un aperto. In effetti si riesce a dimostrare di più: anche le successioni delle derivate di ogni ordine convergono uniformemente sui compatti alle derivate corrispondenti della funzione limite:

Teorema 6.1.3: (di Weierstrass) *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ uniformemente convergente sui compatti di A a una funzione f. Allora f è olomorfa e le successsioni delle derivate di ogni ordine di $\{f_n\}$ convergono uniformemente sui compatti di A alle corrispondenti derivate di f.*

Dimostrazione: Dato che f_n converge uniformemente sui compatti di A a f, allora f è continua. Sia Δ un triangolo chiuso contenuto in A. Allora passando al limite sotto il segno d'integrale

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = \lim_{n \to \infty} \int_{\partial \Delta} f_n(z) dz = 0$$

e quindi, per il teorema di Morera, f è olomorfa su A.

Sia K un compatto contenuto in A e sia B un aperto limitato tale che $K \subset B \subset \overline{B} \subset A$. Allora per qualche costante $C_{p+q} > 0$

$$\sup_K \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial y^q} f_n - \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial y^q} f \right| = \sup_K \left| i^q (f_n - f)^{(p+q)} \right| \le C_{p+q} \sup_{\overline{B}} |f_n - f| \to 0$$

e quindi anche la seconda parte della tesi è dimostrata. □

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni a valori complessi definite su un sottoinsieme $B \subset \mathbb{R}^n$. La successione $\{f_n\}$ si dice *equilimitata* se esiste una costante M tale che per ogni n e per ogni $x \in B$ si ha $|f_n(x)| \leq M$. La successione $\{f_n\}$ si dice *equicontinua* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x, y \in B$ e $|x-y| < \delta$ allora per ogni n si ha $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$.

Nei corsi di Analisi si dimostra *Teorema di Ascoli-Arzelà* che noi sevirà nella seguente formulazione:

TEOREMA 6.1.4: *Una successione di funzioni $\{f_n\}$ a valori complessi definite su un sottoinsieme compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ equilimitata e equicontinua ammette una sottosuccessione uniformemente convergente a una funzione continua f.*

Per applicare il Teorema 6.1.4 allo studio di successioni di funzioni olomorfe, è utile la seguente osservazione:

LEMMA 6.1.5:
(i) *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ tale che la successione delle derivate f_n' sia equilimitata su ogni compatto contenuto in A. Allora $\{f_n\}$ è equicontinua sui compatti di A.*
(ii) *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ equilimitate su ogni compatto contenuto in A. Allora $\{f_n\}$ è equicontinua su ogni compatto contenuto in A.*

Dimostrazione: Sia $K \subset A$ un compatto. Per ogni $z \in K$ esiste $r_z > 0$ tale che $\mathbb{D}(z, r_z) \subset \overline{\mathbb{D}(z, r_z)} \subset A$. Dato che K è compatto, esistono $z_1, \ldots, z_N \in K$ tali che, se $\mathbb{D}_j = \mathbb{D}(z_j, r_{z_j})$, allora

$$K = \mathbb{D}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{D}_N \subset \overline{\mathbb{D}_1} \cup \ldots \cup \overline{\mathbb{D}_N} = E \subset A.$$

Dunque E è un compatto. Sia M tale che per ogni n e per ogni $z \in E$ si abbia $|f_n'(z)| < M$. Sia $r = \min_{z \in K} dist(z, \partial E)$. Se $z_1, z_2 \in K$ con $|z_1 - z_2| < r$ allora tutto il segmento che li congiunge è contenuto in E: $[z_1, z_2] \subset E$. Allora

$$|f_n(z_2) - f_n(z_1)| = \left| \int_{[z_1, z_2]} f_n'(z) dz \right| \leq |z_2 - z_1| \max_{[z_1, z_2]} |f_n'| < M |z_2 - z_1|$$

da cui la (i) segue immediatamente. La (ii) segue da (i) e dal Teorema 6.1.2. □

Dunque il Lemma 6.1.5 permette di ridurre considerevolmente le ipotesi necessarie per applicare il Teorema di Ascoli-Arzelà a successioni di funzioni olomorfe ed risulta cruciale nella dimostrazione del seguente risultato:

TEOREMA 6.1.6: (di Montel) *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ equilimitata su ogni compatto contenuto in A. Allora $\{f_n\}$ ha una sottosuccessione uniformemente convergente sui compatti di A a una funzione olomorfa.*

Dimostrazione: Per il Lemma 2.4.1, esiste una successione $\{A_k\}_{k \geq 1}$ di aperti tali che

$$\overline{A}_k \text{ è compatto per ogni } k \geq 1, \quad \overline{A}_k \subset A_{k+1} \text{ per ogni } k \geq 1, \quad A = \bigcup_{n \geq 1} A_k.$$

D'altra parte, la Proposizione 6.1.5 assicura che la successione $\{f_n\}$ è equicontinua su ogni compatto contenuto in A. Per il teorema di Ascoli-Arzelà allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k^1}\} = f_{n_1^1}, \dots, f_{n_k^1}, \dots$ di $\{f_n\}$ che converge uniformemente su $\overline{A_1}$. Sempre per il teorema di Ascoli-Arzelà allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k^2}\} = f_{n_1^2}, \dots, f_{n_k^2}, \dots$ di $\{f_{n_k^1}\}$ che converge uniformemente su $\overline{A_2}$. Per induzione costruiamo in questo modo sottosuccessioni $\{f_{n_k^l}\}$ con la proprietà che per ogni l la successione $\{f_{n_k^l}\}$ è sottosuccessione della $\{f_{n_k^{l-1}}\}$ e converge uniformemente su $\overline{A_l}$. Si consideri la sottosuccessione $\{f_{n_k^k}\}$ di $\{f_n\}$. Per costruzione se $j > l$ allora $f_{n_j^j} \in \{f_{n_k^l}\}$ e quindi, per ogni l la $\{f_{n_k^k}\}$ è sottosuccessione della $\{f_{n_k^l}\}$ e converge uniformemente su $\overline{A_l}$. La $\{f_{n_k^k}\}$ converge allora uniformemente su ogni compatto di A dato che, se $K \subset A$ è un compatto, esisterà un l_0 tale che $K \subset A_{l_0}$. Per il Teorema 6.1.3, il limite uniforme della $\{f_{n_k^k}\}$ è una funzione olomorfa. □

Chiudiamo il paragrafo introducendo alcune nozioni che useremo più tardi. Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $C(A, \mathbb{C})$ lo spazio delle funzioni continue definite su A a valori in $\mathbb{C}$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti. Un sottoinsieme $\mathcal{F} \subset C(A, \mathbb{C})$ si dice *famiglia normale* se ogni successione $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ ammette una sottosuccessione convergente uniformemente sui compatti a una funzione $f \in C(A, \mathbb{C})$. Questa nomenclatura è tradizionale nella teoria delle funzioni olomorfe e la adotteremo anche in queste note. D'altra parte si vede subito che $\mathcal{F}$ è una *famiglia normale* se e solo se la chiusura di $\mathcal{F}$ è compatta in $C(A, \mathbb{C})$ nella topologia della convergenza uniforme sui compatti.

Dal teorema di Montel 6.1.6 si ottiene immediatamente una caratterizzazione delle famiglie normali di funzioni olomorfe. Si dice che una famiglia di funzioni $\mathcal{F}$ su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ è *equilimitata sui compatti* (o anche *localmente equilimitata*) se per ogni compatto $K \in A$ esiste una costante M tale che per ogni $f \in \mathcal{F}$ e per ogni $x \in K$ si ha $|f(x)| \leq M$. Dunque se $\mathcal{F}$ è una famiglia di funzioni localmente limitate allora ogni successione $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ è equilimitata su ogni compatto contenuto in A. Dunque abbiamo il seguente:

Teorema 6.1.7: *Una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni olomorfe su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ è normale se e solo se è equilimitata sui compatti di A.*

Dimostrazione: Dobbiamo solo dimostrare che una famiglia normale è equilimitata sui compatti, l'altra implicazione è immediata dal Teorema di Montel. Supponiamo per assurdo che una famiglia normale $\mathcal{F}$ non sia equilimitata sui compatti di A. Allora esiste un compatto $K \subset A$ tale che

$$\sup_{\mathcal{F}}\{|f(z)| \mid z \in K\} = +\infty.$$

Dunque esistono successioni $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ e $\{z_n\} \subset K$ tali che per ogni n risulti $|f_n(z_n)| \geq n$. D'altra parte, per ipotesi, esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ di $\{f_n\}$ uniformemente convergente sui compatti a una funzione olomorfa f. Se $M = \max_K |f|$, allora per ogni n_k e per ogni $z \in K$ si ha

$$|f_{n_k}(z)| \leq |f_{n_k}(z) - f(z)| + |f(z)| \leq |f_{n_k}(z) - f(z)| + M.$$

Dato che f_{n_k} converge uniformente a f su K, allora per n_k sufficientemente grande, per ogni $z \in K$, si ha $|f_{n_k}(z) - f(z)| < 1$. Ma allora

$$n_k \leq |f_{n_k}(z_{n_k})| \leq |f_{n_k}(z_{n_k}) - f(z_{n_k})| + |f(z_{n_k})| \leq 1 + M.$$

Contraddizione! □

Esercizi.

1. Sia $E \subset \mathbb{C}$ un chiuso e si consideri la funzione d_E la funzione distanza da E definita da $d_E(z) = \inf_{a \in E} |z-a|$. Dimostrare che d_E è una funzione continua. *Consiglio: Per $z, w \in \mathbb{C}$ e $a \in E$ si ha $|z-a| \leq |z-w| + |w-a|$ e quindi passando all'estremo inferiore $d_E(z) \leq |z-w| + d_E(w)$. Scambiando i ruoli di z, w stabilire che $|d_E(z) - d_E(w)| \leq |z-w|$...*

2. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni olomorfe su un aperto $A \subset C$ e sia $\mathcal{F}' = \{f' \mid f \in \mathcal{F}\}$. Dimostrare che se $\mathcal{F}$ è una famiglia normale allora $\mathcal{F}'$ è una famiglia normale. Dimostrare che non vale il viceversa. Sia A convesso. Per $z_0 \in A$, si definisca $\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(z_0) = 0\}$. Se $\mathcal{F}'$ è una famiglia normale anche $\mathcal{F}_0$ è una famiglia normale.

3. (Teorema di Vitali) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe su un aperto connesso $A \subset \mathbb{C}$ equilimitate sui compatti di A. Se esiste un sottoinsieme $E \subset A$ con un punto di accumulazione in A tale che la successione $\{f_n(z)\}$ converge per ogni $z \in E$, allora $\{f_n\}$ converge uniformemente sui compatti di A. *Consiglio: Se $\{f_n\}$ non converge uniformemente sui compatti di A, allora c'è un compatto $K \subset A$, $\delta > 0$ e sottosuccessioni $\{f_{n_k^1}\}$, $\{f_{n_k^2}\}$ di $\{f_n\}$ e una successioni di punti z_k in K, tale che*

$$|f_{n_k^1}(z_k) - f_{n_k^2}(z_k)| \geq \delta. \qquad (*)$$

Le successioni $\{f_{n_k^1}\}$ e $\{f_{n_k^2}\}$ hanno sottosuccessioni convergenti a funzioni olomorfe distinte a causa di $(*)$ (perché?) ma che a causa dell'ipotesi coincidono su E: contraddizione! (perché?)

6.2. Funzioni intere: polinomi e funzioni trascendenti

Un'altra conseguenza delle diseguaglianze di Cauchy è la seguente versione del Teorema di Liouville che caratterizzaza i polinomi:

TEOREMA 6.2.1: *Sia* $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una funzione intera. Se esistono un intero* $n \geq 0$ *e costanti* $R > 0$ *e* $M > 0$ *tali che*

$$|f(z)| \leq M|z|^n$$

per $|z| > R$ *allora* f *è un polinomio di grado al più* n*. Dunque per* $n = 0$*, segue che una funzione intera limitata* $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *è costante.*

Dimostrazione: Dato che f è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ allora vale per ogni z lo sviluppo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

dove $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Allora, usando (6.1.2), se $r > R$ e $k > n$,

$$0 \leq |a_k| \leq \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{r^k} \leq \frac{Mr^n}{r^k} \to 0 \quad \text{per } r \to \infty$$

e quindi necessariamente $a_k = 0$ se $k > n$. □

Un'immediata conseguenza del Teorema di Liouville è ll dimostrazione dell'esistenza di zeri per polinomi complessi non costanti. Cominciamo ricordando una stima sul comportamento asintotico dei polinomi già dimostrata nel Capitolo 4:

LEMMA 6.2.2: *Sia* $p(z) = a_0 + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n$ *un polinomio di grado* n*. Per ogni* $1 > \epsilon > 0$ *esiste* $R_\epsilon \geq 1$ *tale che se* $|z| \geq R_\epsilon$ *si ha*

$$(1 - \epsilon)|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq (1 + \epsilon)|a_n||z|^n. \tag{6.2.1}$$

Come conseguenza ecco una semplice dimostrazione del *Teorema fondamentale dell'Algebra*:

TEOREMA 6.2.3: *Un polinomio non costante con coefficienti complessi ha una radice in* $\mathbb{C}$*.*

Dimostrazione: Sia $p(z) = a_0 + a_1 z \ldots + a_n z^n$ un polinomio non costante con coefficienti complessi. Assumiamo dunque $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$. Supponiamo che $p(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora la funzione $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ è una funzione intera. D'altra parte, per il Lemma 6.2.2, esiste $R > 1$ tale che se $|z| = r \geq R > 1$

$$|p(z)| \geq (1 - \frac{1}{2})|a_n||z|^n > \frac{1}{2}|a_n|$$

Dunque

$$|f(z)| \leq \max\left\{\max_{|z| \leq R} \frac{1}{|p(z)|}, \frac{2}{|a_n|}\right\}$$

e quindi, per il Teorema di Liouville, $f(z)$ e, di conseguenza, $p(z)$ sarebbero costanti contro l'ipotesi. □

Come corollario possiamo concludere che un polinomio complesso di grado $n \geq 1$ si può sempre scomporre come prodotto di polinomi di primo grado. Precisamente abbiamo il seguente:

TEOREMA 6.2.4: *Sia $p(z)$ un polinomio complesso di grado $n \geq 1$ e siano $b_1, \ldots, b_k$ le sue radici distinte, ciascuna rispettivamente di molteplicità $m_1, \ldots, m_k$. Allora $n = m_1 + \ldots + m_k$ e per qualche costante $c \neq 0$ si ha*

$$p(z) = c(z - b_1)^{m_1} \ldots (z - b_k)^{m_k}.$$

Una funzione intera, ossia olomorfa su tutto $\mathbb{C}$, che non sia un polinomio si dice *trascendente*. Le funzioni trascendenti hanno un comportamento molto diverso dai polinomi per quanto riguarda l'esistenza di zeri. Per esempio la funzione esponenziale non ha zeri. Infatti per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha $|e^z| = e^{Re(z)} > 0$. Mentre abbiamo visto che le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ hanno infiniti zeri. È possibile comunque dare una caratterizzazione delle funzioni trascendenti nello spirito dei risultati in questo paragrafo che le distingua nel comportamento dai polinomi.

TEOREMA 6.2.5: *Sia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione intera non costante. Allora per f vale una delle seguenti due proprietà mutualmente esclusive:*

(i) f è un polinomio e per ogni compatto $K \subset \mathbb{C}$ esiste $R > 0$ tale che se $|z| > R$ allora $f(z) \notin K$

oppure

(ii) f è una funzione trascendente e per ogni $w \in \mathbb{C}$ esiste una successione $\{z_n\}$ con $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$ tale che $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$.

Dimostrazione: Supponiamo che f sia un polinomio di grado $n \geq 1$ e sia $K \subset \mathbb{C}$ un compatto. Sia $M = \max\{|z| | z \in K\}$. Dalla stima (6.2.1) segue che esiste $R > 0$ tale che, se $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$, su $|z| > R$ si ha $M < \frac{|a_n|}{2}|z|^n \leq |f(z)|$ e quindi necessariamente $f(z) \notin K$.

Supponiamo che f non sia un polinomio e supponiamo che esista $w \in \mathbb{C}$ tale che non ci sia alcuna successione $\{z_n\}$ tale che $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$. Allora esiste $\rho > 0$ e $\epsilon > 0$ tale che per tutti i z con $|z| > \rho$ si ha $|f(z) - w| > \epsilon$. Dato che f non è una funzione costante, nel compatto $\overline{D(0, \rho)}$ esistono un numero finito di zeri $b_1, \ldots, b_k$ per la funzione $f(z) - w$ ciascuno rispettivamente di molteplicità $m_1, \ldots, m_k$. Allora per una funzione g olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ che non ha zeri, si ha

$$f(z) - w = (z - b_1)^{m_1} \ldots (z - b_k)^{m_k} g(z).$$

Allora, per $|z| > \rho$, si ha

$$g(z) = \frac{f(z) - w}{(z - b_1)^{m_1} \ldots (z - b_k)^{m_k}}.$$

Sia $N = m_1 + \ldots + m_k$. Esiste $\rho_1 > 0$ e un'opportuna costante C, tale che se $|z| > \rho_1$, si ha

$$|(z - b_1)^{m_1} \ldots (z - b_k)^{m_k}| < C|z|^N.$$

Allora se $|z| > \max\{\rho, \rho_1\}$ possiamo concludere

$$\frac{1}{|g(z)|} \leq \frac{C}{\epsilon}|z|^N.$$

Dunque, per il Teorema 6.2.1, la funzione intera $\frac{1}{g}$ è un polinomio; dato che non ha zeri, necessariamente $\frac{1}{g}$, e quindi g, è costante. Segue allora che per qualche costante c si ha

$$f(z) = w + c(z - b_1)^{m_1} \dots (z - b_k)^{m_k}$$

e questo contraddice il fatto che avevamo supposto che f non fosse un polinomio. $\square$

La sostanza del Teorema 6.2.5 è che il punto all'infinito è una singolarità essenziale per una funzione trascendente. In effetti la dicotomia fra le funzioni intere in base al loro comportamento all'infinito illustrata dal Teorema 6.2.5 si può ottenere come conseguenza del teorema di Casorati-Weierstras. Diamo qui un cenno della dimostrazione lasciando i dettagli per esercizio al lettore:

Dimostrazione alternativa del Teorema 6.2.5: Per una funzione intera f il fatto che per ogni compatto $K \subset \mathbb{C}$ esiste $R > 0$ tale che se $|z| > R$ allora $f(z) \notin K$ equivale a dire che $\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$. Se f è un polinomio non costante allora $\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$. Supponiamo che f sia una funzione intera ma che non sia un polinomio. Allora $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ con infiniti $a_n \neq 0$. Allora la funzione $g(\zeta) = f(\frac{1}{\zeta})$ è olomorfa su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e ha una singolarità essenziale in 0 (perché?). Allora per ogni fissato $w \in \mathbb{C}$ esiste una successione $\{\zeta_n\}$ con $\lim_{n \to \infty} \zeta_n = 0$ si ha $\lim_{n \to \infty} f(\zeta_n) = w$ (perché?) e da questo segue (ii) (perché?). È evidente che (ii) e (ii) sono mutualmente esclusivi (perché?). $\square$

Esercizi.

1. Dimostrare che una funzione intera f tale che $Ref > 0$ è costante. *(Consiglio: studiare $g = e^{-f}$.)*

2. Fornire tutti i dettagli della dimostrazione alternativa del Teorema 6.2.5 presentata al termine del paragrafo.

6.3. Teorema dell'applicazione aperta, Principio del Massimo, Lemma di Schwarz.

In questo paragrafo, ancora come conseguenza delle diseguaglianze di Cauchy daremo una seconda dimostrazione del Teorema dell'applicazione aperta che utilizzeremo per provare il Principio del Massimo modulo per funzioni olomorfe. Questi due risultati hanno una grande importanza nello studio della teoria geometrica delle funzioni olomorfe. Cominciamo da un risultato tecnico che fornisce un criterio per l'esistenza degli zeri di una funzione olomorfa.

Lemma 6.3.1: *Sia f una funzione olomorfa su un aperto contenente il disco chiuso $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$. Allora, se*

$$|f(z_0)| < \min_{|z-z_0|=r} |f(z)|,$$

esiste $w \in \mathbb{D}(z_0, r)$ tale che $f(w) = 0$.

Dimostrazione: Se f non avesse zeri in $\mathbb{D}(z_0, r)$, dato che per ipotesi in questo caso si avrebbe anche $|f(z)| > |f(z_0)| > 0$ per $z \in \partial\mathbb{D}(z_0, r)$, allora la funzione $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ sarebbe olomorfa su un aperto contenente $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$. Dunque, per la diseguaglianza di Cauchy nel caso $n = 0$, si avrebbe

$$\frac{1}{|f(z_0)|} = |g(z_0)| \leq \max_{|z-z_0|=r} |g(z)| = \frac{1}{\min\limits_{|z-z_0|=r} |f(z)|}$$

in contraddizione con l'ipotesi. □

Il risultato seguente è noto come *Teorema dell'applicazione aperta*:

Teorema 6.3.2: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $f \colon A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Allora $f(A)$ è aperto in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione: Sia $z_0 \in A$ arbitrario e $w_0 = f(z_0)$. Dimostreremo che esiste un disco centrato in w_0 tutto contenuto in $f(A)$. Dato che gli zeri di una funzione olomorfa non identicamente nulla sono isolati, esiste $r > 0$ tale che $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subset A$ e z_0 è l'unico zero in $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$ della funzione olomorfa $f - w_0$. Dunque per qualche $\epsilon > 0$ per $|z - z_0| = r$ si ha

$$|f(z) - w_0| \geq 3\epsilon.$$

Sia $w \in \mathbb{D}(w_0, \epsilon)$ arbitrario e $|z - z_0| = r$ allora

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w - w_0| \geq 3\epsilon - \epsilon = 2\epsilon$$

e quindi

$$|f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \epsilon < 2\epsilon \leq \min_{|z-z_0|=r} |f(z) - w|.$$

Per il Lemma 6.3.1 la funzione $f(z) - w$ ha uno zero nel disco $\mathbb{D}(z_0, r) \subset A$ per ogni $w \in \mathbb{D}(w_0, \epsilon)$. Dunque $\mathbb{D}(w_0, \epsilon) \subset f(A)$. □

Come corollario otteniamo il *Principio del Massimo Modulo* per le funzioni olomorfe:

Teorema 6.3.3: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.*
(i) Se $|f|$ ha un massimo locale in A, allora f è costante.
(ii) Se inoltre A è limitato e $f \in C^0(\overline{A})$, allora per ogni $z \in \overline{A}$

$$|f(z)| \leq \max_{\partial A} |f|.$$

Dimostrazione: Evidentemente la (ii) segue dalla (i). Dimostriamo (i). Sia z_0 un punto di massimo locale per $|f|$. Allora esiste un aperto connesso U contente z_0 tale che per ogni $z \in U$ si ha $|f(z)| \leq |f(z_0)|$. Pertanto $f(U) \subset \overline{\mathbb{D}(0, |f(z_0)|)}$ e quindi non esiste un disco centrato in $f(z_0)$ tutto contenuto in $f(U)$. Dunque $f(U)$ non è un intorno del suo punto $f(z_0)$ e pertanto $f(U)$ non è un aperto. Dunque f deve essere costante su U e di conseguenza su A dato che A è connesso. □

Abbiamo facilmente anche il seguente *Principio del Minimo Modulo* per le funzioni olomorfe:

Teorema 6.3.4: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.*
(i) Se $|f|$ ha un minimo locale in $a \in A$, allora o $f(a) = 0$ o f è costante.
(ii) Se inoltre A è limitato e $f \in C^0(\overline{A})$, allora o f ha zeri in A o per ogni $z \in \overline{A}$

$$|f(z)| \geq \min_{\partial A} |f|.$$

Dimostrazione: Anche in questo caso e la (ii) segue immediatamente dalla (i). Per quanto riguarda (i) se $f(a) \neq 0$, basta applicare il Principio del Massimo in un intorno di a alla funzione $\frac{1}{f}$. □

Una importante conseguenza del Principio del Massimo Modulo è il *Lemma di Schwarz*:

Teorema 6.3.5: *Sia $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$ il disco unitario centrato nell'origine e sia $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una funzione olomorfa tale che $f(0) = 0$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$*

$$|f(z)| \leq |z| \tag{6.3.1}$$

e

$$|f'(0)| \leq 1. \tag{6.3.2}$$

Inoltre se vale l'uguaglianza in (6.3.1) per qualche $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ oppure vale in (6.3.2), allora esiste c con $|c| = 1$ tale che $f(z) = cz$ per ogni $z \in \mathbb{D}$.

Dimostrazione: Esiste una funzione olomorfa h su D tale che $f(z) = zh(z)$ per $z \in \mathbb{D}$. Sia $0 < r < 1$; allora la funzione h è olomorfa su $\mathbb{D}(0,r)$ e continua su $\overline{\mathbb{D}(0,r)}$. Dunque per il Principio del Massimo si ha

$$|h(z)| = \max_{|z|=r} |h(z)| = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}. \tag{6.3.3}$$

Dunque, dato che (6.3.3) vale per ogni $0 < r < 1$, allora per $z \in \mathbb{D}$ si ha $|h(z)| \leq 1$ ossia $|f(z)| \leq |z|$. D'altra parte, dato che

$$h(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0),$$

abbiamo anche (6.3.2). Se vale $|f(z_0)| = |z_0|$ per qualche $z_0 \in \mathbb{D}$, allora $|h(z_0)| = 1$ e quindi $|h|$ avrebbe un massimo interno. Se vale $|h(0)| = |f'(0)| = 1$ allora si ha la stessa conclusione. Ancora per il Principio del Massimo, in ambedue i casi h è una funzione costante di modulo 1 e quindi esiste c con $|c| = 1$ tale che $f(z) = cz$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. $\square$

Concludiamo il paragrafo con utilizzando il Lemma di Schwarz per descrivere i biolomorfismi del disco unitario in sé. Prima una

DEFINIZIONE 6.3.1: Sia $A \subset \mathbb{C}$. Un'applicazione olomorfa $f\colon A \to A$ si dice un *automorfismo* di A se è un biolomorfismo ossia se f è biettiva con inversa $f^{-1}\colon A \to A$ olomorfa. Denoteremo con $Aut(A)$ l'insieme degli automorfismi di A. Con l'operazione di composizione $Aut(A)$ è un gruppo. Si dice che $Aut(A)$ *agisce in modo transitivo* su A se per ogni $a, b \in A$ esiste $f \in Aut(A)$ tale che $f(a) = b$, in questo caso A si dice *omogeneo*.

Vogliamo dunque calcolare il gruppo degli automorfismi del disco unitario $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$. Cominciamo con il seguente

LEMMA 6.3.6: *Sia $a \in \mathbb{D}$ e $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$. Allora $\varphi_a \in Aut(\mathbb{D})$.*

Dimostrazione: Si osservi che φ_a è olomorfa – e non costante – sul disco $\mathbb{D}\left(0, \frac{1}{|a|}\right) \supset \overline{\mathbb{D}}$. Se $|z| = 1$ allora $z\overline{z} = 1$ e quindi

$$|\varphi_a(z)| = \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = \left|\frac{z-a}{z\overline{z}-\overline{a}z}\right| = \frac{1}{|z|}\frac{|z-a|}{|\overline{z}-\overline{a}|} = 1.$$

Per il Principio del Massimo allora $|\varphi_a(z)| < 1$ per ogni $z \in \mathbb{D}$ ossia $\varphi_a(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Allo stesso modo si ha che $\varphi_{-a}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Dato che una semplice verifica dimostra che $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{-a}$, la tesi segue. $\square$

Osservazione. Siano $a, b \in \mathbb{D}$ due punti arbitrari. Allora $\varphi_{-b} \circ \varphi_a$ trasforma a in b. Dunque il gruppo $Aut(\mathbb{D})$ agisce in modo transitivo su $\mathbb{D}$ e quindi $\mathbb{D}$ è omogeneo.

TEOREMA 6.3.7: *$\varphi \in Aut(\mathbb{D}) \iff$ esistono $a \in \mathbb{D}$ e $c \in \partial\mathbb{D}$ tali che $\varphi = c\varphi_a$.*

Dimostrazione: Se $a \in \mathbb{D}$ e $c \in \partial\mathbb{D}$ allora evidentemente $\varphi = c\varphi_a \in Aut(\mathbb{D})$. Sia $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ e supponiamo che $\varphi(0) = b$. Allora $F = \varphi_b \circ \varphi \in Aut(\mathbb{D})$ e $F(0) = 0$. Allora per il Lemma di Schwarz si ha $|F(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. Allo stesso modo si ha che $|F^{-1}(w)| \leq |w|$ per ogni $w \in \mathbb{D}$. Sia $z \in \mathbb{D}$, allora

$$|z| = |F^{-1}(F(z))| \leq |F(z)| \leq |z|$$

e quindi necessariamente $|F(z)| = |z|$. Esiste allora $c \in \partial\mathbb{D}$ tale che

$$cz = F(z) = \varphi_b \circ \varphi(z).$$

Allora

$$\varphi(z) = \varphi_{-b}(cz) = \frac{cz + b}{1 + \bar{b}cz} = c\frac{z + bc^{-1}}{1 + \overline{bc^{-1}}z}$$

e quindi $\varphi = c\varphi_a$ con $a = -bc^{-1}$ □

Grazie alla caratterizzazione che abbiamo dato degli atomorfismi del disco, possiamo dare una formulazione del Lemma di Schwarz per funzioni olomorfe arbitrarie del disco in sé. Cominciamo con una definizione. Per $z, w \in \mathbb{D}(0,1)$ definiamo

$$d(z,w) = \frac{|z - w|}{|1 - \overline{w}z|}. \tag{6.3.4}$$

Teorema 6.3.8: (Schwarz-Pick) *Sia* $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$ *il disco unitario centrato nell'origine e sia* $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *una funzione olomorfa. Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$

$$d(f(z), f(w)) \le d(z,w) \tag{6.3.5}$$

e in (6.3.5) vale l'eguaglianza per una coppia di punti se e solo se vale per ogni coppia di punti se e solo se $f \in Aut(\mathbb{D})$. *Inoltre per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \le \frac{1}{1 - |z|^2}. \tag{6.3.6}$$

e in (6.3.6) vale l'eguaglianza in un punto se e solo se vale in ogni punto se e solo se $f \in Aut(\mathbb{D})$.

Dimostrazione: Per ogni $a \in \mathbb{D}$, se $\phi_a(\zeta) = \frac{\zeta - a}{1 - \bar{a}\zeta}$, allora $(\phi_a)^{-1}(\zeta) = \phi_{-a}(\zeta) = \frac{\zeta + a}{1 + \bar{a}\zeta}$. Siano $z, w \in \mathbb{D}$ arbitrari e si consideri $F = \phi_{f(w)} \circ f \circ \phi_{-w}$. Allora $F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ e

$$F(0) = \phi_{f(w)}(f(\phi_{-w}(0))) = \phi_{f(w)}(f(w)) = 0.$$

Allora applicando il Lemma di Schwarz alla funzione F, si ha $|F(\zeta)| \le |\zeta|$ per ogni $\zeta \in \mathbb{D}$. Quindi, se si prende $\zeta = \phi_w(z)$, possiamo concludere

$$d(f(z), f(w)) = |\phi_{f(w)}(f(z))| \le |\zeta| \le \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w}z} \right| = d(z,w)$$

e quindi (6.3.5) è dimostrata. Se per qualche $z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ valesse l'eguaglianza allora per la funzione $F = \phi_{f(w_0)} \circ f \circ \phi_{-w_0}$ varrebbe l'eguaglianza $|F(\zeta)| = |\zeta|$ per $\zeta = \phi_{w_0}(z_0)$. Questo succede se e solo se F è una rotazione ossia se per qualche $c \in \partial\mathbb{D}$ si ha $F(\zeta) = c\zeta$ e quindi $f(\phi_{-w_0}(\zeta)) = \phi_{-f(w_0)}(c\zeta)$ per ogni $\zeta \in \mathbb{D}$. Dunque l'eguaglianza in (6.3.5) si ha se e solo se per ogni $\eta \in D$

$$f(\eta) = f(\phi_{-w_0}(\phi_{w_0}(\eta))) = \phi_{-f(w_0)}(c\phi_{w_0}(\eta))$$

e quindi se e solo se f è un automorfismo di $\mathbb{D}$ per il quale l'eguaglianza in (6.3.5) si ha per ogni coppia di punti di $\mathbb{D}$.

La dimostrazione di (6.3.6) è simile. Sia $z \in \mathbb{D}$ e sia $w = f(z)$. Si definisca $G: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mediante $G = \phi_w \circ f \circ \phi_{-z}$. Allora $G(0) = \phi_w(f(\phi_{-z}(0))) = \phi_w(f(z)) = 0$ e quindi, applicando il Lemma di Schwarz alla funzione G, abbiamo $|G'(0)| \leq 1$. Dato che per ogni $a \in \mathbb{D}$ si ha

$$\phi'_a(\zeta) = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \overline{a}\zeta)^2},$$

allora

$$1 \geq |G'(0)| = |\phi'_w(f(\phi_{-z}(0)))||f'(\phi_{-z}(0))||\phi'_{-z}(0)| = \frac{1 - |z|^2}{1 - |w|^2}|f'(z)|$$

da cui segue la (6.3.6) immediatamente. Come prima si dimostra che in (6.3.6) vale l'eguaglianza in un punto se e solo se G è una rotazione e questo succede se e solo se f è un automorfismo del disco unitario $\mathbb{D}$. □

La funzione definita da (6.3.4) in realtà definisce una distanza sul disco unitario $\mathbb{D}$ conosciuta come la *distanza di Möbius* e il Teorema di Schwarz-Pick dice che gli automorfismi sono isometrie per questa distanza. Precisiamo questa osservazione nel seguente

Teorema 6.3.9: *Funzione definita da (6.3.4) per z, w nel disco unitario centrato nell'origine $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, 1)$ è una distanza per la quale una funzione olomorfa $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ è un'isometria se e solo se è un automorfismo di $\mathbb{D}$.*

Dimostrazione: Il Teorema 6.3.8 dice che se una funzione olomorfa $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ conserva la funzione definita da (6.3.4) è un automorfismo di $\mathbb{D}$. D'altra parte se $\phi \in Aut(\mathbb{D})$ e $z, w \in \mathbb{D}$ allora, usando (6.3.5), si ha

$$d(z, w) = d(\phi^{-1}(\phi(z)), \phi^{-1}(\phi(w))) \leq d(\phi(z), \phi(w)) \leq d(z, w)$$

e quindi $d(\phi(z), \phi(w)) = d(z, w)$. Rimane da dimostrare che d è una distanza. È immediato verificare dalla definizione (6.3.4) che $d(z, w) \geq 0$, $d(z, w) = 0$ se e solo se $z = w$ e che $d(z, w) = d(w, z)$. Rimane da dimostrare che d soddisfa la diseguaglianza triangolare ossia per ogni z, v, w occorre dimostrare che

$$d(z, w) \leq d(z, v) + d(v, w). \tag{6.3.7}$$

Ovviamente la (6.3.7) è verificata se $v = w$. Possiamo dunque assumere $v \neq w$. Semplifichiamo la verifica utilizzando l'invarianza della funzione d rispetto a $Aut(\mathbb{D})$. Sia $\phi \in Aut(\mathbb{D})$ definito da $\phi = e^{-i\theta_0}\phi_v$ dove θ_0 è tale che $\phi_v(w) = |\phi_v(w)|e^{i\theta_0}$. Allora si ha $\phi(v) = 0$ e $\phi(w) = t \in (0, 1)$. Se $\phi(z) = u = \rho e^{i\theta}$, allora, per l'invarianza della funzione d rispetto a $Aut(\mathbb{D})$, dato che $d(z, w) = d(u, t)$, $d(z, v) = d(u, 0)$ e $d(z, w) = d(0, t)$, si ha che verificare che (6.3.7) vale per ogni $z, v, w \in \mathbb{D}$, con $v \neq w$, equivale a provare che

$$\left| \frac{\rho e^{i\theta} - t}{1 - t\rho e^{i\theta}} \right| \leq \rho + t \tag{6.3.8}$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$, $t, \rho \in (0, 1)$. La verifica di (6.3.8) è elementare, seppure un po' noiosa. Si consideri per $\theta \in [0, 2\pi]$ la funzione

$$g(\theta) = \left| \frac{\rho e^{i\theta} - t}{1 - t\rho e^{i\theta}} \right|^2 = \frac{\rho^2 - 2t\rho\cos\theta + t^2}{1 - 2t\rho\cos\theta + t^2\rho^2}.$$

Si ha che

$$g'(\theta) = \frac{2t\rho(1-t^2)(1-\rho^2)\sin\theta}{(1-2t\rho\cos\theta + t^2\rho^2)^2},$$

e quindi $g'(\theta)$ in $(0, 2\pi)$ si annulla solo per $\theta = \pi$. Si ha

$$g(0) = g(2\pi) = \left(\frac{t-\rho}{1-t\rho}\right)^2, \qquad g(\pi) = \left(\frac{t+\rho}{1+t\rho}\right)^2 = g(\pi)$$

e, dato che per $t, \rho \in (0,1)$,

$$\left(\frac{t+\rho}{1+t\rho}\right)^2 - \left(\frac{t-\rho}{1-t\rho}\right)^2 = \frac{4t\rho(t^2-1)(\rho^2-1)}{(1+t\rho)^2(1-t\rho)^2} \geq 0,$$

allora

$$g(0) = g(2\pi) = \left(\frac{t-\rho}{1-t\rho}\right)^2 \leq \left(\frac{t+\rho}{1+t\rho}\right)^2 = g(\pi).$$

Dunque la funzione g ha massimo in $\theta = \pi$ e quindi

$$\left|\frac{\rho e^{i\theta} - t}{1 - t\rho e^{i\theta}}\right| = \sqrt{g(\theta)} \leq \left|\frac{t+\rho}{1+t\rho}\right| \leq \rho + t$$

dato che si ha $1 \leq 1 + t\rho < 2$. Abbiamo allora provato che la (6.3.8) vale. $\square$

Una carrellata sulle relazioni fra queste nozioni e la geometria iperbolica del disco unitario può essere trovata alla pagina web

http://www.dm.unipi.it/ abate/libri/libriric/files/IterationThTautMan1-1.pdf

Esercizi.

1. Sia f una funzione olomorfa su un aperto connesso $A \subset \mathbb{C}$. Dimostrare che se $|f| = cost$ su un aperto $B \subset A$ allora f è costante su A.

2. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni olomorfe su un aperto limitato A, continue su $\overline{A}$. Dimostrare che se $\mathcal{F}$ è equilimitata su ∂A allora è una famiglia normale.

3. Sia $f\colon \mathbb{D}(0,R) \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $f(0) = 0$ e $|f(z)| < M$ per ogni $z \in \mathbb{D}(0,R)$. Allora $|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|$ per ogni $z \in \mathbb{D}(0,R)$ e $|f'(0)| \leq \frac{M}{R}$. Inoltre se vale l'uguaglianza in una delle due diseguaglianze, allora esiste c con $|c| = 1$ tale che $f(z) = c\frac{M}{R}z$.

4. Sia $f\colon \mathbb{D}(0,1) \to \mathbb{D}(0,1)$ una funzione olomorfa del disco unitario in sé e si supponga che f abbia uno zero di ordine n in 0. Dimostrare che $|f(z)| \leq |z|^n$ per ogni $z \in \mathbb{D}(0,1)$ e $|f^{(n)}(0)| \leq n!$. Inoltre esiste c con $|c| = 1$ tale che $f(z) = cz^n$ se e solo o se $|f(z_0)| = |z_0|^n$ per qualche $z_0 \in \mathbb{D}(0,1)$ o vale $|f^{(n)}(0)| = n!$.

5. Sia $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una funzione olomorfa sul disco unitario $\mathbb{D}$ con $f(0) = 0$. Dimostrare che la serie $F(z) = \sum_{k\geq 0} f(z^k)$ definisce una funzione olomorfa su $\mathbb{D}$.

6.4. Un tocco di dinamica olomorfa locale.

I primi passi della teoria dei sistemi dinamici olomorfi consistono nella descrizione del comportamento locale in un intorno di un punto fisso. Precisamente se f è una funzione olomorfa su un intorno aperto U di un punto z_0 e $f(z_0) = z_0$, ossia z_0 è un punto fisso di f, si è interessati al comportamento asintotico, ossia per n molto grande, vicino z_0 della successione f^n delle iterate della funzione f definita induttivamente da $f^1 = f$ e $f^n = f^{n-1} \circ f$. Qui illustreremo la situazione in un caso particolarmente semplice. Chiameremo il numero $\lambda = f'(z_0)$ il *moltiplicatore* di f nel punto fisso z_0. Il punto fisso z_0 si dice *iperbolico* se il suo moltiplicatore ha modulo $|\lambda|$ diverso da $0, 1$. Un punto fisso iperbolico si dice *attrattivo* se $0 < |\lambda| < 1$ si dice *repulsivo* se $|\lambda| > 1$. Per punti fissi iperbolici si può dimostrare che il comportamento della successione delle iterate è equivalente a quello di un'applicazione lineare. Il seguente risultato nel quale, per semplicità si suppone che il punto fisso sia l'origine, è storicamente uno dei primi teoremi dimostrati in dinamica olomorfa:

TEOREMA 6.4.1: (di linearizzazione di Koenigs [1884]) *Siano U un aperto con $0 \in U$ e f una funzione olomorfa su U. Se 0 è un punto fisso iperbolico, ossia con moltiplicatore λ tale che $|\lambda| \neq 0, 1$, allora esistono aperti $A \subset U$ e B con $0 \in A, B$ e un biolomorfismo $\Phi\colon A \to B$ tale che $\Phi(0) = 0$ e $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(z) = \lambda z$ per ogni $z \in B$. L'applicazione Φ è unica a meno di una costante moltiplicativa non nulla. In particolare se $|\lambda| \in (0, 1)$, per $z \in B$ si ha $\Phi \circ f^n \circ \Phi^{-1}(z) = \lambda^n z$ per ogni $n \geq 1$.*

Dimostrazione: L'ultima parte dell'enunciato è ovvia se vale il resto. Cominciamo dunque dimostrando l'unicità di Φ a meno di costante. Se Ψ è un'altra applicazione con le stesse proprietà di Φ, allora in un intorno di 0 si ha

$$\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(z) = \lambda z = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1}(z).$$

Dunque $\Phi^{-1}(\lambda z) = f \circ \Phi^{-1}(z)$ e quindi

$$\begin{aligned}\Psi \circ \Phi^{-1}(\lambda z) &= \Psi \circ f \circ \Phi^{-1}(z) = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1} \circ \Psi \circ \Phi^{-1}(z) \\ &= \Psi \circ f \circ \Psi^{-1}(\Psi \circ \Phi^{-1}(z)) = \lambda \Psi \circ \Phi^{-1}(z).\end{aligned}$$

Ma allora, se lo sviluppo in serie di $\Psi \circ \Phi^{-1}$ vicino 0 è dato da $\Psi \circ \Phi^{-1}(z) = \sum_{n \geq 1} b_n z^n$, si ha

$$\sum_{n \geq 1} \lambda b_n z^n = \lambda \sum_{n \geq 1} b_n z^n = \lambda \Psi \circ \Phi^{-1}(z) = \Psi \circ \Phi^{-1}(\lambda z) = \sum_{n \geq 1} \lambda^n b_n z^n$$

da cui segue che per ogni $n \geq 1$ si ha $\lambda b_n = \lambda^n b_n$ che può accadere solo se $b_n = 0$ per ogni $n \geq 2$. Dunque per ogni z in un un intorno aperto contenente l'origine, si ha $\Psi(z) = \Psi(\Phi^{-1}(\Phi(z))) = b_1 \Phi(z)$. Per l'unicità del prolungamento analitico allora $\Psi = b_1 \Phi$ sul più grande aperto connesso contenente 0 su cui Ψ e Φ sono ambedue definiti.

Veniamo ora alla costruzione di Φ nel caso in cui 0 sia un punto fisso attrattivo, ossia se $0 < |\lambda| < 1$. Sia $r > 0$ tale che $\overline{\mathbb{D}(0, r)} \subset U$; se $z \in \overline{\mathbb{D}(0, r)}$ si ha $f(z) = \lambda z + z^2 g(z)$ per qualche funzione g olomorfa in un intorno aperto di $\overline{\mathbb{D}(0, r)}$. Sia $M > 0$ tale che $|g(z)| < M$ per ogni $z \in \overline{\mathbb{D}(0, r)}$. Sia $\epsilon > 0$ tale che se $c = |\lambda| + M\epsilon$ si abbia

$$c^2 < |\lambda| < |\lambda| + M\epsilon = c < 1.$$

Allora, se $z \in \mathbb{D}_\epsilon = \mathbb{D}(0,\epsilon)$, si ha

$$|f(z)| \leq |\lambda||z| + M|z|^2 \leq (|\lambda| + M\epsilon)|z| = c|z|.$$

Allora, per $z \in \mathbb{D}_\epsilon$, si ha

$$|f^n(z)| < c|f^{n-1}(z)| < \ldots < c^n|z| < c^n\epsilon$$

Dunque la successione f^n converge uniformemente alla funzione nulla su $\mathbb{D}_\epsilon$ e per ogni n si ha $f^n(z) \in \mathbb{D}_\epsilon$ se $z \in \mathbb{D}_\epsilon$. Per ogni n si definisca su $\mathbb{D}_\epsilon$

$$\Phi_n = \frac{1}{\lambda^n} f^n.$$

Dato che per $z \in \mathbb{D}_\epsilon$, si ha

$$|f(z) - \lambda z| < M|z|^2,$$

allora

$$|\Phi_{n+1}(z) - \Phi_n(z)| = \frac{1}{|\lambda|^{n+1}}|f^{n+1}(z) - \lambda f^n(z)| \leq \frac{M}{|\lambda|^{n+1}}|f^n(z)|^2 < \frac{M\epsilon^2}{|\lambda|}\left(\frac{c^2}{|\lambda|}\right)^n.$$

Dunque la successione

$$\Phi_{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n}[\Phi_{k+1} - \Phi_k]\right) + \Phi_1$$

converge uniformemente su $\mathbb{D}_\epsilon$. Sia Φ la funzione olomorfa su $\mathbb{D}_\epsilon$ limite di questa successione. La funzione Φ è un biolomorfismo su un aperto contente 0. Infatti, dato che vicino 0 si ha $f(z) = \lambda z + O(z^2)$, per ogni n, si ha

$$f^n(z) = \lambda f^{n-1}(z) + O(f^{n-1}(z))^2) = \lambda f^{n-1}(z) + O(z^2) = \ldots = \lambda^n z + O(z^2).$$

Dunque, per ogni n, abbiamo $\Phi'_n(0) = 1$ e quindi $\Phi'(0) = 1$. Possiamo allora concludere che esiste un aperto A contenente 0 tale che $\Phi\colon A \to B = \Phi(A)$ è un biolomorfismo. D'altra parte per ogni n e $w \in \mathbb{D}_\epsilon$ si ha

$$\Phi_n \circ f(w) = \lambda\Phi_{n+1}(w)$$

allora, passando al limite per $n \to \infty$ segue che

$$\Phi \circ f(w) = \lambda\Phi(w)$$

e dunque se $w = \Phi^{-1}(z)$

$$\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(z) = \lambda\Phi(\Phi^{-1}(z)) = \lambda z.$$

Dato che si può scegliere $A, B = \Phi(A) \subset \mathbb{D}_\epsilon$, la dimostrazione, nel caso in cui 0 sia un punto fisso attrattivo, è completa. Il caso in cui 0 sia un punto fisso repulsivo per f segue dal caso attrattivo considerando $h = f^{-1}$ che è una funzione olomorfa ben definita in un intorno di 0 e che ha moltiplicatore $1/\lambda$ in 0 e quindi un punto fisso attrattivo in 0. $\square$

Mentre nel caso nel quale il moltiplicatore λ ha modulo $|\lambda| = 1$ la teoria della linearizzazione è molto profonda e si affronta con metodi fuori della portata di queste note, se il moltiplicatore è $\lambda = 0$, il punto fisso si dice *superattrattivo* e possiamo dare un risultato simile al precedente. Se una funzione olomorfa f definita su un aperto U contenente 0 ha un punto fisso superattrattivo in 0, allora f ha uno sviluppo in serie di potenze in 0 del tipo:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k \tag{6.4.1}$$

con $a_n \neq 0$ con $n \geq 2$. Il numero n si dice *grado locale* del punto fisso superattrattivo. Il risultato che fornisce la "forma normale" a meno di cambi di coordinate olomorfi in un punto superattrattivo è il seguente:

Teorema 6.4.2: (di Böttcher [1904]) *Siano U un aperto con $0 \in U$ e f una funzione olomorfa su U. Se 0 è un punto fisso superattrattivo con grado locale n, allora esistono aperti $A \subset U$ e B con $0 \in A, B$ e un biolomorfismo $\Phi: A \to B$ tale che $\Phi(0) = 0$ e $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(\zeta) = \zeta^n$ per ogni $\zeta \in B$. L'applicazione Φ è unica a meno di una costante moltiplicativa data da una radice $(n-1)$-esima dell'unità. non nulla. In particolare dunque, per $\zeta \in B$ si ha $\Phi \circ f^k \circ \Phi^{-1}(\zeta) = \zeta^{n^k}$ per ogni $k \geq 1$.*

Dimostrazione: Dimostriamo prima che l'applicazione Φ esiste. Come già osservato, lo sviluppo in serie di Taylor di f in 0 è del tipo:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$$

con $a_k \neq 0$. Si osservi per cominciare che si può supporre che $a_n = 1$. Infatti se $c \in \mathbb{C}$ è una soluzione dell'equazione $c^{n-1} = a_n$, allora se $L(z) = cz$, abbiamo

$$L \circ f \circ L^{-1}(z) = cf\left(\frac{z}{c}\right) = c\sum_{k=n}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{c}\right)^k = z^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} c^{1-k} a_k z^k.$$

Dunque, a meno di coniugare preliminarmente con una tale applicazione lineare L, si può assumere che $a_n = 1$ e possiamo assumere di essere in questa situazione:

$$f(z) = z^n + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{n+k} = z^n\,(1 + g(z)) \qquad \text{dove} \qquad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k. \tag{6.4.2}$$

Si può scegliere $r \in (0, \frac{1}{2})$ in modo che per $z \in \mathbb{D}(0,r)$ si abbia $|g(z)| < \frac{1}{2}$. Allora segue che

$$|f(z)| \leq \frac{3}{2}|z|^n \leq \frac{3}{4}|z| < |z|$$

da cui segue che $f\left(\mathbb{D}(0,r)\right) \subset \mathbb{D}(0,r)$ e $f(z) \neq 0$ se $z \in \mathbb{D}(0,r) \setminus \{0\}$. Se, come prima, la successione delle iterate della funzione f è definita induttivamente da $f^1 = f$ e $f^k = f^{k-1} \circ f$, allora si ha per $z \in \mathbb{D}(0,r)$:

$$f^k(z) = z^{n^k}\left(1 + n^{k-1} b_1 z + O(z^2)\right). \tag{6.4.3}$$

Questo fatto si vede facilmente per induzione. È infatti vero per $k = 1$. Supponiamo che risulti

$$f^{k-1}(z) = z^{n^{k-1}}\left(1 + n^{k-2} b_1 z + O(z^2)\right).$$

Allora, usando (6.4.2),

$$\begin{aligned}
f^k(z) &= f\left(f^{k-1}(z)\right) = f\left(z^{n^{k-1}}\left(1+n^{k-2}b_1z+O(z^2)\right)\right) \\
&= \left(z^{n^{k-1}}\left(1+n^{k-2}b_1z+O(z^2)\right)\right)^n\left(1+g\left(z^{n^{k-1}}\left(1+n^{k-2}b_1z+O(z^2)\right)\right)\right) \\
&= z^{n^k}\left(1+n^{k-2}b_1z+O(z^2)\right)^n\left(1+g\left(O(z^{n^{k-1}})\right)\right) \\
&= z^{n^k}\left(1+n^{k-1}b_1z+O(z^2)\right)\left(1+O(z^{n^{k-1}})\right) \\
&= z^{n^k}\left(1+n^{k-1}b_1z+O(z^2)\right)
\end{aligned}$$

e quindi abbiamo (6.4.3) per ogni $k \geq 1$. Per ogni k la funzione $1+n^{k-1}b_1z+O(z^2)$ che compare in (6.4.3) non si annulla in $\mathbb{D}(0,r)$ e quindi ammette una radice n^k-esima olomorfa. La si può scegliere in modo che

$$\left(1+n^{k-1}b_1z+O(z^2)\right)^{\frac{1}{n^k}} = 1+\frac{n^{k-1}b_1z}{n^k}+O(z^2) = 1+\frac{b_1}{n}z+O(z^2).$$

Usando questo ramo di radice n^k-esima olomorfa, possiamo allora definire per ogni $k \geq 1$ una funzione olomorfa su $\mathbb{D}(0,r)$ mediante

$$\phi_k(z) = \left(f^k(z)\right)^{\frac{1}{n^k}} = z\left(1+n^{k-1}b_1z+O(z^2)\right)^{\frac{1}{n^k}} = z\left(1+\frac{b_1}{n}z+O(z^2)\right).$$

Abbiamo allora, in particolare, che

$$\phi_k(f(z)) = \left(f^{k+1}(z)\right)^{\frac{1}{n^k}} = \left[\left(f^{k+1}(z)\right)^{\frac{1}{n^{k+1}}}\right]^n = [\phi_{k+1}(z)]^n \tag{6.4.4}$$

e quindi $[\phi_{k+1}(z)]^{n^k} = [\phi_k(f(z))]^{n^{k-1}} = \ldots = \left[\phi_2(f^{k-1}(z))\right]^n = \phi_1(f^k(z))$. Dunque

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\phi_{k+1}(z)}{\phi_k(z)}\right| &= \left|\frac{\phi_1(f^k(z))}{f^k(z)}\right|^{\frac{1}{n^k}} = \left|\frac{f^k(z)\left(1+\frac{b_1}{n}f^k(z)+O(z^2)\right)}{f^k(z)}\right|^{\frac{1}{n^k}} \\
&= \left|\left(1+\frac{b_1}{n}f^k(z)+O(z^2)\right)\right|^{\frac{1}{n^k}} = 1+\frac{1}{n^{k+1}}O\left(\left|f^k(z)\right|\right) \\
&= 1+O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)
\end{aligned} \tag{6.4.5}$$

dove abbiamo usato il fatto che, per ogni k, si ha $\left|f^k(z)\right| < 1$. Definiamo, per $z \in \mathbb{D}(0,r)$,

$$P_k(z) = \prod_{j=1}^{k}\frac{\phi_{j+1}(z)}{\phi_j(z)} = \frac{\phi_{k+1}(z)}{\phi_1(z)}. \tag{6.4.6}$$

Allora, per $z \in \mathbb{D}(0,r)$, usando la (6.4.5), abbiamo

$$\begin{aligned}
|P_k(z)-P_l(z)| &= \left|\left[1+O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)\right]^k - \left[1+O\left(\frac{1}{n^{l+1}}\right)\right]^l\right| \\
&= \left|O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)-O\left(\frac{1}{n^{l+1}}\right)\right| \underset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

e quindi la successione $P_k(z)$, definita in (6.4.6), converge uniformemente su $\mathbb{D}(0,r)$ a $\frac{\Phi(z)}{\phi_1(z)}$ per qualche funzione olomorfa Φ che è quindi il limite uniforme su $\mathbb{D}(0,r)$ della successione ϕ_k. Dato che ${\phi_k}'(0) = 1$ per ogni k, allora $\Phi'(0) = 1$ e quindi, eventualmente scegliendo r opportunamente più piccolo, possiamo assumere che Φ sia un biolomorfismo da $A = \mathbb{D}(0,r)$ a $B = \Phi\left(\mathbb{D}(0,r)\right)$. Passando al limite in (6.4.4), abbiamo allora $\Phi(f(z)) = [\Phi(z)]^n$ ossia, per ogni $\zeta \in B$ abbiamo

$$\Phi \circ f \circ (\zeta) = \zeta^n$$

come desiderato. Sia Ψ un altro biolomorfismo di un intorno dell'origine tale che $\Psi(0) = 0$ e $\Phi \circ f \circ (\zeta) = \zeta^n$. Allora abbiamo per ζ vicino l'origine: $\Phi^{-1}(\zeta^n) = f \circ \Phi^{-1}(\zeta)$ e quindi

$$\Psi \circ \Phi^{-1}(\zeta^n) = \Psi \circ f \circ \Phi^{-1}(\zeta) = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1} \circ \Psi \circ \Phi^{-1}(\zeta) = \left[\Psi \circ \Phi^{-1}(\zeta)\right]^n.$$

se lo sviluppo in serie di $\Psi \circ \Phi^{-1}$ vicino 0 è dato da $\Psi \circ \Phi^{-1}(\zeta) = c_1\zeta + c_k\zeta^k + \ldots$ dove c_k è il primo coefficiente non nullo dopo il primo, si ha

$$\begin{aligned} c_1\zeta^n + c_k\zeta^{2k} + \ldots &= \Psi \circ \Phi^{-1}(\zeta^n) \\ &= \left[\Psi \circ \Phi^{-1}(\zeta)\right]^n = \left[c_1\zeta + c_2\zeta^2 + c_3\zeta^3 + \ldots\right]^n \\ &= c_1^n\zeta^n + nc_1^{n-1}c_k\zeta^{n+k-1} + \ldots \end{aligned}$$

dove, dato che $k \geq 2$ si ha $nk > n + k - 1$. Ma allora, paragonando i coefficienti si ottiene induttivamente che $c_1^{n-1} = 1$ e che tutti gli altri coefficienti della serie di $\Psi \circ \Phi^{-1}$ sono nulli. Possiamo concludere che per ogni ζ in un un intorno aperto contenente l'origine, si ha $\Psi(\zeta) = \Psi(\Phi^{-1}(\Phi(\zeta))) = c_1\Phi(\zeta)$. Per l'unicità del prolungamento analitico allora $\Psi = c_1\Phi$ sul più grande aperto connesso contenente 0 su cui Ψ e Φ sono ambedue definiti.

L'ultima parte dell'enunciato è ovvia. $\square$