CAPITOLO 7

Principio dell'argomento e Biolomorfismi

7.1. Il Principio dell'argomento.

Una conseguenza molto importante del Teorema dei Residui è il seguente

TEOREMA 7.1.1: (Principio dell'argomento) $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un aperto e* f *una funzione meromorfa in* Ω. *Sia* $D \subset \Omega$ *un aperto limitato con* $\overline{D} \subset \Omega$ *e con frontiera* ∂D *unione finita di curve* C^1 *a tratti semplici chiuse disgiunte. Se* f *non ha zeri nè poli su* ∂D, *si ha*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P \tag{7.1.1}$$

dove N *è la somma delle molteplicità degli zeri di* f *in* D *e* P *è la somma degli ordini dei poli di* f *in* D.

Dimostrazione: In D la funzione f ha un numero finito di zeri $a_1, \ldots, a_r$ di molteplicità $\mu_1, \ldots, \mu_r$ rispettivamente e un numero finito di poli $b_1, \ldots, b_s$ di ordine $\nu_1, \ldots, \nu_s$ rispettivamente. Dunque esiste una funzione h olomorfa su un aperto contente $\overline{D}$ che non si annulla in alcun punto di D tale che per $z \in D$

$$f(z) = \frac{(z-a_1)^{\mu_1}\ldots(z-a_r)^{\mu_r}}{(z-b_1)^{\nu_1}\ldots(z-b_s)^{\nu_s}}h(z). \tag{7.1.2}$$

Dato che per funzioni olomorfe ϕ e ψ, ovunque abbia senso, si ha

$$\frac{(\phi\psi)'}{\phi\psi} = \frac{\phi'}{\phi} + \frac{\psi'}{\psi} \tag{7.1.3}$$

e, per $\nu \in \mathbb{Z}$, se $\alpha(z) = (z-c)^\nu$, si ha

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\nu}{(z-c)}. \tag{7.1.4}$$

Dunque, da (7.1.2), (7.1.3) e (7.1.4), segue

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{r}\frac{\mu_k}{z-a_k} - \sum_{h=1}^{s}\frac{\nu_h}{z-a_h} + \frac{h'(z)}{h(z)}. \tag{7.1.5}$$

Da (7.1.5) segue che $\frac{f'}{f}$ è una funzione meromorfa con poli semplici esattamente dove f si annulla e dove f ha un polo. Un calcolo immediato dimostra che dove f ha uno zero $\frac{f'}{f}$ ha residuo pari alla molteplicità dello zero e dove f ha un polo $\frac{f'}{f}$ ha per residuo l'opposto dell'ordine del polo. Dunque (7.1.1) segue dal Teorema dei Residui. □

Una importante applicazione è il Teorema di Rouché che che afferma che il numero degli zeri di una funzione olomorfa su un aperto limitato non cambia se le si aggiunge una funzione olomorfa sul dominio che ha modulo sul bordo dominato dal modulo della prima.

Teorema 7.1.2: (di Rouché) *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato. Se $g, h \in C^0(\overline{\Omega})$ sono funzioni olomorfe in Ω tali che*

$$| g(z) |<| h(z) | \qquad \forall z \in \partial\Omega. \tag{7.1.6}$$

Allora le funzioni h e $f = g + h$ hanno lo stesso numero di zeri in Ω.

Dimostrazione: Dato che vale (7.1.6) e $g, h \in C^0(\overline{\Omega})$, esiste una aperto $A \supset \partial\Omega$ tale che su $A \cap \overline{\Omega}$ si ha $|g| < |h|$. Dunque

$$h(z) \neq 0 \quad \text{e} \quad f(z) = h(z) + g(z) \neq 0 \qquad \forall z \in A \cap \overline{\Omega}.$$

Infatti se esistesse $z_0 \in A \cap \overline{\Omega}$ con $h(z_0) = 0$ allora si avrebbe $0 = |h(z_0)| > |g(z_0)| \geq 0$ e se esistesse $z_1 \in A \cap \overline{\Omega}$ con $f(z_1) = 0$ allora si avrebbe $h(z_1) = -g(z_1)$ e quindi $|h(z_1)| = |g(z_1)| < |h(z_1)|$.

Sia $\Omega' = \Omega \setminus \overline{A}$. Allora Ω' è un aperto tale che $\overline{\Omega'}$ è un compatto che contiene tutti gli zeri di f e di h. Sia D un aperto con frontiera unione finita di curve C^1 a tratti semplici chiuse disgiunte tale che $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset D \subset \overline{D} \subset \Omega$. Dato che h e f sono olomorfe su D e non hanno zeri su ∂D, applicando il principio dell'argomento, basta dimostrare che

$$\int_{\partial D} \frac{f'}{f}\, dz = \int_{\partial D} \frac{h'}{h}\, dz. \tag{7.1.7}$$

A tal fine si definisca una funzione meromorfa q su Ω mediante $f = hq$ ossia ponendo

$$q(z) = 1 + \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Dunque q è meromorfa con singolarità (eventualmente eliminabili) dove h ha zeri. Allora

$$\frac{f'}{f} = \frac{h'}{h} + \frac{q'}{q}.$$

Dunque per dimostrare la (7.1.7) basterà provare che $\int_{\partial D} \frac{q'}{q}\, dz = 0$. Su $A \cap \overline{\Omega}$ si ha $|g| < |h|$ e quindi anche $|q(z) - 1| = |g(z)/h(z)| < 1$. Allora per $z \in A \cap \Omega$ si ha $|q(z)| < 2$ e quindi q è una funzione olomorfa su $A \cap \Omega$ con

$$q(A \cap \Omega) \subset \mathbb{D}(1, 1) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Allora una funzione olomorfa è definita per $z \in A \cap \Omega$ da $Q(z) = Log(q(z))$, dove Log è il logaritmo principale definito su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Dato che $Q'(z) = q'(z)/q(z)$ su $A \cap \Omega$, si ha

$$\int_{\partial D} \frac{q'(z)}{q(z)}\, dz = \int_{\partial D} Q'(z)\, dz = 0.$$

$\square$

Il teorema di Rouché permette di dare un'altra semplice dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra. Inoltre la dimostrazione suggerisce anche metodi per "localizzare" approsimativamente le rtadici:

COROLLARIO 7.1.3: (Teorema fondamentale dell'algebra) *Un polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi ha esattamente n radici complesse contate con la loro molteplicità.*

Dimostrazione: Basta dimostrare che il risultato vale per $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ per $n \geq 1$. Dato che

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{p(z)}{z^n} = \lim_{|z|\to\infty} 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} = 1,$$

allora per qualche $R > 0$ se $|z| = R$ si deve avere

$$\left| \frac{p(z)}{z^n} - 1 \right| < 1$$

o, in altre parole, $|p(z) - z^n| < |z^n|$. Per il teorema di Rouché segue che $p(z) = (p(z) - z^n) + z^n$ ha esattamente n zeri nel disco di centro 0 e raggio R. $\square$

Il teorema di Rouché può essere usato per stimare dove sono situati gli zeri di un polinomio.

Esempio. Si consideri il polinomio $p(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$. Si ponga

$$h(z) = -4z^5 \qquad \text{e} \qquad g(z) = z^8 + z^2 - 1.$$

Su $|z| = 1$ si ha $|h(z)| > |g(z)|$ visto che

$$|h(z)| = |4z^5| = 4 \qquad \text{e} \qquad |g(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leq |z^8| + |z^2| + |1| \leq 3.$$

Per il teorema di Rouché segue che $p(z) = h(z) + g(z)$ ha 5 radici nel disco $|z| < 1$. D'altro canto se si pone

$$l(z) = z^8 \qquad \text{e} \qquad m(z) = -4z^5 + z^2 - 1,$$

su $|z| = 2$ si ha $|l(z)| > |m(z)|$ visto che

$$|l(z)| = |z^8| = 256 \qquad \text{e} \qquad |m(z)| = |-4z^5 + z^2 - 1| \leq |4z^5| + |z^2| + |1| \leq 128 + 4 + 1 = 133.$$

Per il teorema di Rouché segue che $p(z) = l(z) + m(z)$ ha 8 radici nel disco $|z| < 2$ e quindi $p(z)$ ha 3 radici nella corona $1 \leq |z| < 2$.

Un'altra applicazione del Teorema di Rouché è il seguente:

Teorema 7.1.4: (Teorema di Hurwitz) *Sia* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un aperto connesso e* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni olomorfe convergente uniformemente sui compatti di* Ω *a* f. *Siano* $f \not\equiv 0$, $a \in \Omega$ *e, per* $r > 0$ *opportuno,* $\mathbb{D} = \mathbb{D}(a, r) \subset \overline{\mathbb{D}(a, r)} \subset \Omega$ *in modo che* $f(z) \neq 0$ *per ogni* $z \in \partial\mathbb{D}$. *Allora esiste* N *tale che se* $n > N$ *le funzioni* f *e* f_n *hanno lo stesso numero di zeri in* $\mathbb{D}$. *In particolare segue che se per ogni* n *le funzioni* f_n *non si annullano in alcun punto di* Ω *o* f *non si annulla in alcun punto di* Ω *o* $f \equiv 0$.

Dimostrazione: Se $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial\mathbb{D}$ sia

$$d = \min\{|f(z)| \mid z \in \partial\mathbb{D}\} > 0.$$

Dato che f_n converge uniformemente a f su $\partial\mathbb{D}$, esiste N tale che se $n > N$ per $z \in \partial\mathbb{D}$ si deve avere

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{1}{2}d < |f(z)|.$$

Il teorema di Rouché allora implica che $f_n(z) = f_n(z) - f(z) + f(z)$ ha lo stesso numero di zeri di f su $\mathbb{D}$. □

Il seguente è un utile corollario del Teorema di Hurwitz:

Corollario 7.1.5: *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni olomorfe iniettive su un aperto* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *uniformemente convergente sui compatti di* Ω *a* f. *Allora* f *è olomorfa e o è iniettiva o è costante.*

Dimostrazione: Sia dunque f_n una successione uniformemente convergente sui compatti di Ω a f. Per il teorema di Weierstrass f è olomorfa. Sia $z_1 \in \Omega$ arbitrario e si definiscano

$$\zeta = f(z_1) \quad \text{e} \quad \zeta_n = f_n(z_1) \quad \forall \quad n.$$

Per $z_2 \in \Omega \setminus \{z_1\}$, sia $K = \overline{\mathbb{D}(z_2, r)} \subset \Omega \setminus \{z_1\}$. Si osservi che, dato che f_n è iniettiva per ogni n, si ha per ogni $z \in K$

$$f_n(z) - \zeta_n = f_n(z) - f_n(z_1) \neq 0. \tag{7.1.8}$$

Dato che f_n converge uniformemente sui compatti di Ω a f, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che se $n > N$ si ha

$$\sup_K \mid f_n - f \mid < \epsilon/2 \quad \text{e} \quad \mid f_n(z_1) - f(z_1) \mid < \epsilon/2$$

e quindi per $z \in K$ e $n > N$

$$\begin{aligned} \mid (f_n(z) - \zeta_n) - (f(z) - \zeta) \mid &= \mid (f_n(z) - f_n(z_1)) - (f(z) - f(z_1)) \mid \\ &\leq \mid f_n(z) - f(z) \mid + \mid f_n(z_1) - f(z_1) \mid < \epsilon. \end{aligned}$$

Dunque $f_n - \zeta_n$ converge uniformemente a $f - \zeta$ su K. Da (7.1.8) e dal Teorema di Hurwitz segue che o $f(z) - \zeta \neq 0$ per ogni $z \in K$ o $f \equiv \zeta$. Se $f \equiv \zeta$ su K allora f è costante per il teorema del prolungamento analitico. Se invece $f(z) - \zeta \neq 0$ per ogni $z \in K$ allora, in particolare $f(z_1) \neq f(z_2)$. Ripetendo l'argomento per ogni $z_2 \neq z_1$, si ha che in questo caso f è iniettiva. □

APPENDICE: Il Teorema delle Funzioni Implicite.

Diamo ora una dimostrazione della versione olomorfa del Teorema delle Funzioni Implicite in due variabili complesse che utilizza le nozioni e le idee introdotte in questo paragrafo:

TEOREMA 7.1.6: *Sia $B \subset \mathbb{C}^2$ un aperto e $F: B \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1 tale che per ogni $(z_0, w_0) \in B$ esistano aperti $A_{z_0} \subset \mathbb{C}$ contenente z e $A_{w_0} \subset \mathbb{C}$ contente w_0 tali che $A_{z_0} \times A_{w_0} \subset B$ e che*

$$\begin{array}{rl} F(\cdot, w): A_{z_0} \to & \mathbb{C} \\ z \mapsto & F(z,w) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} F(z, \cdot): A_{w_0} \to & \mathbb{C} \\ w \mapsto & F(z,w) \end{array}$$

siano funzioni olomorfe rispettivamente per ogni $w \in A_{w_0}$ e $z \in A_{z_0}$. Allora:

(i) Se per $(z_0, w_0) \in Z_F$ la funzione $F_w = \frac{\partial F(z,\cdot)}{\partial w}$ non si annulla in (z_0, w_0), allora esistono un disco $\mathbb{D}_{z_0}$ centrato in z_0, un disco $\mathbb{D}_{w_0}$ centrato in w_0 e una funzione olomorfa $\phi: \mathbb{D}_{z_0} \to \mathbb{D}_{w_0}$ tale che $\phi(z_0) = w_0$ e

$$Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0}) = \{(z, \phi(z)) \mid z \in \mathbb{D}_{z_0}\}.$$

(ii) Se per $(z_0, w_0) \in Z_F$ la funzione $F_z = \frac{\partial F(\cdot,w)}{\partial z}$ non si annulla in (z_0, w_0), allora esistono un disco $\mathbb{D}_{z_0}$ centrato in z_0, un disco $\mathbb{D}_{w_0}$ centrato in w_0 e una funzione olomorfa $\psi: \mathbb{D}_{w_0} \to \mathbb{D}_{z_0}$ tale che $\psi(w_0) = z_0$ e

$$Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0}) = \{(\psi(w), w) \mid w \in \mathbb{D}_{w_0}\}.$$

Dimostrazione: Naturalmente basterà dimostrare la parte (i) dell'enunciato, l'altra è completamente equivalente. Sia f_z la funzione olomorfa definita su A_{w_0} ponendo $f_z(w) = F(z,w)$. Dato che per ipotesi $\frac{\partial F(z,\cdot)}{\partial w}$ non si annulla in (z_0, w_0), allora $f'_{z_0}(w_0) \neq 0$. Dunque esiste un disco $\mathbb{D}_{w_0}$ centrato in w_0 tale che w_0 sia l'unico zero di f_{z_0} su $\overline{\mathbb{D}}_{w_0}$. Dunque per qualche $d > 0$ si ha $|f_{z_0}(w)| > 2d$ per ogni $w \in \partial\mathbb{D}_{w_0}$. Esiste allora, per continuità, un disco $\mathbb{D}_{z_0}$ centrato in z_0 tale che se $z \in \mathbb{D}_{z_0}$ allora $|f_z(w)| > d$ per ogni $w \in \partial\mathbb{D}_{w_0}$ e possiamo assumere che $f'_z(w) \neq 0$ per $w \in \mathbb{D}_{w_0}$. Allora, per il Principio dell'Argomento, il numero n di radici dell'equazione $f_z(w) = 0$ è dato da

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_{w_0}} \frac{f'_z(\omega)}{f_z(\omega)} d\omega.$$

Dato che per $z = z_0$, si $n = 1$, per continuità, si ha $n = 1$ per ogni $z \in \mathbb{D}_{z_0}$. Sia $\phi(z) \in \mathbb{D}_{w_0}$ l'unica radice dell'equazione $f_z(w) = 0$ per $z \in \mathbb{D}_{z_0}$. Con un argomento simile a quello usato nella dimostrazione della Proposizione 4.5.1, se si pone $g(\zeta) = \zeta \frac{f'_z(\zeta)}{f_z(\zeta)}$, allora $\phi(z)$ è l'unico polo della funzione $g(\zeta)$ in $\mathbb{D}_{w_0}$ ed è un polo semplice dato che $f'_z(w) \neq 0$ per $w \in \mathbb{D}_{w_0}$. Allora:

$$\phi(z) = Res_{\phi(z)}(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_{w_0}} \omega \frac{f'_z(\omega)}{f_z(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_{w_0}} \omega \frac{1}{F(z,\omega)} \frac{\partial F}{\partial z}(z,\omega) d\omega$$

da cui segue che ϕ è olomorfa dato che l'integrando è olomorfo nella variabile z. $\square$

7.2. Biolomorfismi.

Concludiamo il capitolo con una importante proprietà delle funzioni olomorfe che si ottiene come elegante corollario dei risultati ottenuti. Dimostreremo in particolare che l'inversa di una funzione olomorfa è necessariamente olomorfa e che quindi una applicazione olomorfa biettiva è necessariamente un biolomorfismo. Sarà necessario il seguente risultato di cui ripetiamo la dimostrazione per comodità del lettore.

TEOREMA 7.2.1: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, f una funzione olomorfa su Ω e $z_0 \in \Omega$. Se $f'(z_0) \neq 0$ esiste un aperto U con $z_0 \in U \subset \Omega$ tale che la restrizione $f_{|U}: U \to f(U) = V$ è biettiva e l'inversa $f^{-1}: V \to U$ è olomorfa.*

Dimostrazione: Siano u e v la parte reale e immaginaria della funzione f: $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$. Allora, dato che f è olomorfa, si ha $f' = f_x$, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ e quindi

$$det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = (u_x + iv_x)(u_x - iv_x) = f'\overline{f'} = |f'|^2.$$

Se $f'(z_0) \neq 0$, la funzione f, per il teorema dell'applicazione inversa per applicazioni di classe C^1 su aperti di $\mathbb{R}^2$ ammette una inversa $f^{-1}: V \to U$ di classe C^1. Dato che $f'(z_0) \neq 0$, restringendo eventualmente U, si può supporre che $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in U$. Dunque derivando l'eguaglianza $z = f^{-1}(f(z))$, posto $w = f(z)$ si ha

$$0 = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} z = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f^{-1}(f(z))) = \frac{\partial f^{-1}}{\partial \overline{z}}(w)\,\overline{f'(z)}$$

e quindi $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f^{-1}) \equiv 0$ su U.

□

Persino per funzioni di classe C^ω l'invertibilità non garantisce che l'inversa conservi le proprietà di regolarità. L'esempio della funzione $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $u(x) = x^3$ chiarisce bene la situazione: u è un omeomorfismo ma u^{-1} non è derivabile in 0 dato che $u'(0) = 0$. Per funzioni olomorfe invece l'invertibilità locale garantisce che la derivata non si annulli mai e quindi che l'inversa sia olomorfa.

PROPOSIZIONE 7.2.2: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, f una funzione olomorfa su Ω e $z_0 \in \Omega$. Allora $f'(z_0) \neq 0 \iff$ esiste un aperto U con $z_0 \in U \subset \Omega$ tale che la restrizione $f_{|U}$ di f a U è iniettiva.*

Dimostrazione: In una direzione il risultato è immediata conseguenza del Teorema 7.2.1. Supponiamo che per $z_0 \in \Omega$ e per $r_1 > 0$ tale che $\mathbb{D} = \mathbb{D}(z_0, r_1) \subset \Omega$ si abbia che f è iniettiva su $\mathbb{D}$. Per assurdo supponiamo che $f'(z_0) = 0$. Dato che gli zeri di funzioni olomorfe sono isolati, per qualche r con $0 < r < r_1$, si ha $f'(z) \neq 0$ per ogni z tale che $0 < |z - z_0| < r$. D'altro canto per $|z - z_0| < r$, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2 + O(|z - z_0|^3) \\ &= f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2 + O(|z - z_0|^3) \end{aligned}$$

e quindi

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2 + O(|z - z_0|^3).$$

Allora la funzione $f - f(z_0)$, per l'iniettività di f su $\mathbb{D}$, ha in $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$ un unico zero in z_0 di molteplicità $\mu \geq 2$. Di conseguenza, per il principio dell'argomento, posto $\Gamma_r = \{z \mid |z - z_0| = r\}$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} \, dz = \mu \geq 2.$$

Sia $\delta = \min\{|f(z) - f(z_0)| \mid z \in \Gamma_r\} > 0$ e si consideri la funzione $\Phi \colon \mathbb{D}(f(z_0), \delta) \to \mathbb{Z}$ definita da

$$\Phi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z) - w} \, dz.$$

Dunque $\Phi(w)$, per il principio dell'argomento, è uguale alla somma delle molteplicità degli zeri della funzione $f - w$ nel disco $|z - z_0| < r$ e quindi assume solo valori interi. Inoltre è semplice verificare che Φ è continua. Infatti se $w_n \to w_0$ allora, passando al limite sotto il segno d'integrale si vede subito che $\Phi(w_n) \to \Phi(w_0)$. Dunque la Φ è costante:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z) - w} \, dz = \Phi(w) = \Phi(f(z_0)) = \mu \geq 2 \tag{7.2.1}$$

per ogni $w \in \mathbb{D}(f(z_0), \delta)$. Per il principio dell'argomento (7.2.1) implica che il numero degli zeri, contati con la loro molteplicità, della funzione $f(z) - w$ sul disco $\mathbb{D}(z_0, r)$ è maggiore o uguale a 2. D'altro canto, dato che $f'(z) \neq 0$ per ogni z tale che $0 < |z - z_0| < r$, se $w \in \mathbb{D}(f(z_0), \delta) \setminus \{f(z_0)\}$, la funzione $f(z) - w$ può avere solo zeri semplici sul disco $\mathbb{D}(z_0, r)$. Dunque per ogni $w \in \mathbb{D}(f(z_0), \delta) \setminus \{f(z_0)\}$ esisterebbero almeno due punti $z_1, z_2 \in \mathbb{D}(z_0, r)$ tali che

$$f(z_1) = w = f(z_2).$$

Questo contraddice il fatto che f sia iniettiva su $\mathbb{D} = \mathbb{D}(z_0, r_1)$. $\square$

I risultati precedenti danno immediatamente il seguente

Teorema 7.2.3: *Siano Ω e Ω' due aperti di $\mathbb{C}$ e $f \colon \Omega \to \Omega'$ una applicazione olomorfa. Allora f è un biolomorfismo $\iff$ f è biettiva.*

Dimostrazione: Per definizione, se f è un biolomorfismo è una funzione biettiva. Supponiamo che f sia olomorfa e biettiva. Sia $z \in \Omega$ arbitrario e $w = f(z) \in \Omega'$. Basterà dimostrare che f^{-1} è olomorfa in un intorno di w. Questo segue immediatamente dalla Proposizione 7.2.2 che ci assicura che che f' non si annulla in un intorno aperto di z. In questo caso Teorema 7.2.1 garantisce che f^{-1} è olomorfa in un intorno di w. $\square$