

CAPITOLO 9

Classificazione degli aperti semplicemente connessi

9.1. Il Teorema di rappresentazione di Riemann.

Scopo di questo paragrafo è di dimostrare il teorema di rappresentazione di Riemann: un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ connesso, semplicemente connesso con $\Omega \neq \mathbb{C}$ è biolomorfo al disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Vedremo poi come da questo risultato segua che tutte le proprietà elencate nel Teorema 5.4.5 siano tutte equivalenti al fatto che un aperto di \mathbb{C} sia semplicemente connesso.

Il Teorema di Riemann sarà immediata conseguenza del seguente lemma che usa in modo cruciale il fatto che una funzione olomorfa su un aperto semplicemente connesso che non ha zeri ammette una radice quadrata olomorfa:

LEMMA 9.1.1: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ con $\Omega \neq \mathbb{C}$ un aperto tale che ogni funzione olomorfa su Ω che non si annulla ammette una radice quadrata olomorfa. Sia $z_0 \in \Omega$. Esiste una funzione olomorfa F su Ω tale che*

- (i) $F(z_0) = 0$ e $F'(z_0) > 0$;
- (ii) F è iniettiva;
- (iii) $F(\Omega) = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Dimostrazione: Denotiamo con $Hol(\Omega)$ l'insieme di tutte le funzioni olomorfe definite su Ω e sia

$$\Lambda = \{f \in Hol(\Omega) \mid f \text{ è iniettiva, } f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0 \text{ e } f(\Omega) \subset \mathbb{D}\}.$$

Dunque se $f \in \Lambda$ si ha $\sup\{|f(z)| \mid z \in \Omega\} < 1$ e quindi, per il teorema di Montel, se è non vuota, Λ è una famiglia normale ossia ogni successione contenuta in Λ ammette una sottosuccessione uniformemente convergente sui compatti. In particolare allora la chiusura $\bar{\Lambda}$ è un compatto nella topologia della convergenza uniforme sui compatti.

Per cominciare, dimostriamo che $\Lambda \neq \emptyset$.

Dato che $\Omega \neq \mathbb{C}$, esiste $b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Sia $g \in Hol(\Omega)$ tale che $g^2(z) = z - b$ per ogni $z \in \Omega$. E' chiaro allora che g è iniettiva visto che se $g(z_1) = g(z_2)$ si deve avere $z_1 - b = z_2 - b$. Inoltre, essendo non costante, g è aperta e quindi, per qualche $r > 0$ si deve avere $\mathbb{D}(g(z_0), r) \subset g(\Omega)$. Si ha

$$\mathbb{D}(-g(z_0), r) \cap g(\Omega) = \emptyset. \tag{9.1.1}$$

Infatti se esistesse $z \in \Omega$ con $g(z) \in \mathbb{D}(-g(z_0), r)$ allora

$$|-g(z) - g(z_0)| = |g(z) + g(z_0)| < r.$$

Dunque si avrebbe $-g(z) \in \mathbb{D}(g(z_0), r) \subset g(\Omega)$ e quindi $-g(z) = g(w)$ per qualche $w \in \Omega$. Ma allora si avrebbe anche $z - b = (g(z))^2 = (g(w))^2 = w - b$ ossia $z = w$. Pertanto seguirebbe che $g(z) = -g(z)$. Ma questo è possibile solo se $g(z) = 0$ che implica che $b = z \in \Omega$ contro l'ipotesi che $b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Se $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ denota la sfera di Riemann, da (9.1.1) si ha che

$$g(\Omega) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}(-g(z_0), r).$$

Sia T una trasformazione di Möbius tale che $T(\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}(-g(z_0), r)) = \mathbb{D}$ e si definisca $g_1 = T \circ g$. Se $g_1(z_0) = c \in \mathbb{D}$, sia ϕ_c un automorfismo di \mathbb{D} tale che $\phi_c(c) = 0$. Si consideri $g_2 = \phi_c \circ g_1 = \phi_c \circ T \circ g$. Evidentemente g_2 è olomorfa su Ω con $g(\Omega) \subset \mathbb{D}$ e $g_2(z_0) = 0$. Dato che g è iniettiva e $\phi_c \circ T$ è un biolomorfismo, g_2 è iniettiva. Infine, usando la Proposizione 7.3.2, si ha che $g_2'(z_0) = \rho e^{i\theta} \neq 0$. Allora $g_3 = e^{-i\theta} g_2 \in \Lambda$ e quindi $\Lambda \neq \emptyset$.

Studiamo ora la chiusura di Λ . Dimostreremo che $\bar{\Lambda} = \Lambda \cup \{0\}$.

La topologia sullo spazio delle funzioni olomorfe è quella della convergenza uniforme sui compatti e quindi basterà dimostrare che se f_n è una successione in Λ uniformemente convergente sui compatti di Ω a f , allora o $f \in \Lambda$ o $f \equiv 0$. Sia dunque f_n una successione in Λ uniformemente convergente sui compatti di Ω a f . Allora, per il Corollario 7.1.5 o f è olomorfa e iniettiva oppure f è costante. Dato che $f_n \in \Lambda$, per ogni n si ha

$$f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(z_0) \geq 0.$$

Dunque, se f è costante, da $f(z_0) = 0$ segue che $f \equiv 0$. Se invece f è iniettiva, allora $f'(z_0) \neq 0$ per la Proposizione 7.2.2 e quindi, visto che $f'(z_0) \geq 0$, deve essere $f'(z_0) > 0$. Infine, dato che per ogni n si ha $f_n(\Omega) \subset \mathbb{D}$, segue che $f(\Omega) \subset \bar{\mathbb{D}}$. D'altra parte $f(\Omega) \cap \partial\mathbb{D} = \emptyset$ perché altrimenti, per il principio del massimo modulo, f dovrebbe essere costante. Pertanto $f(\Omega)$ è un aperto contenuto in \mathbb{D} e quindi $f \in \Lambda$.

Possiamo dunque concludere la dimostrazione. Sia $\Phi: Hol(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ l'applicazione definita da $\Phi(f) = f'(z_0)$. Evidentemente la funzione Φ è continua nella topologia della convergenza uniforme sui compatti. Inoltre Φ assume su $\bar{\Lambda}$ solo valori reali. Dato che è una famiglia normale ed è un chiuso, allora $\bar{\Lambda}$ è compatto nella topologia della convergenza uniforme sui compatti. Dunque Φ assume massimo su $\bar{\Lambda}$: esiste $F \in \bar{\Lambda}$ tale che

$$F'(z_0) = \Phi(F) \geq \Phi(g) = g'(z_0) \quad \forall g \in \bar{\Lambda}. \quad (9.1.2)$$

Dato che $\Lambda \neq \emptyset$, segue che non può essere $F \equiv 0$ e quindi si deve avere che F è iniettiva, con $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) > 0$ e $F(\Omega) \subset \mathbb{D}$. Grazie al Teorema 7.2.3 basterà dimostrare che $F(\Omega) = \mathbb{D}$.

Supponiamo per assurdo che esista $w \in \mathbb{D} \setminus F(\Omega)$. Ovviamente $w \neq 0$. Allora

$$h(z) = \frac{F(z) - w}{1 - \bar{w}F(z)}$$

definisce una funzione olomorfa su Ω con $h(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$. Sia H una radice quadrata olomorfa di h . Dato che $F(\Omega) \subset \mathbb{D}$ e che h è ottenuta da F mediante composizione con un automorfismo di \mathbb{D} si ha $h(\Omega) \subset \mathbb{D}$ e che h è iniettiva. Quindi anche $H(\Omega) \subset \mathbb{D}$ e H è iniettiva. Inoltre da $H^2 = h$ otteniamo

$$2H(z_0)H'(z_0) = (1 - |w|^2)F'(z_0) > 0 \quad (9.1.3)$$

e quindi, in particolare, che $H(z_0) \neq 0$ e $H'(z_0) \neq 0$. Sia $G \in \text{Hol}(\Omega)$ la funzione definita da

$$G(z) = \frac{|H'(z_0)|}{H'(z_0)} \frac{H(z) - H(z_0)}{1 - \overline{H(z_0)}H(z)}.$$

Allora $G(z_0) = 0$ e, dato che G è ottenuta componendo H con un automorfismo di \mathbb{D} , si ha che G è iniettiva e $G(\Omega) \subset \mathbb{D}$. Dato che da (9.1.3) segue che

$$H'(z_0) = \frac{(1 - |w|^2)F'(z_0)}{2H(z_0)}$$

e che $|H(z_0)|^2 = |h(z_0)| = |w|$, abbiamo

$$\begin{aligned} G'(z_0) &= \frac{|H'(z_0)|}{1 - |H(z_0)|^2} = \frac{(1 - |w|^2)F'(z_0)}{2\sqrt{|w|}} \frac{1}{1 - |w|} = \frac{1 + |w|}{2\sqrt{|w|}} F'(z_0) \\ &= \left(1 + \frac{(1 - \sqrt{|w|})^2}{2\sqrt{|w|}}\right) F'(z_0) > F'(z_0). \end{aligned}$$

Ma allora $G \in \Lambda$ e $\Phi(G) > \Phi(F)$ contro l'ipotesi che F è un massimo su $\bar{\Lambda}$ per Φ . \square

Possiamo ora enunciare

TEOREMA 9.1.2: (di rappresentazione di Riemann) *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso semplicemente connesso con $\Omega \neq \mathbb{C}$. Per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste una unica applicazione biolomorfa $F: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ tale che $F(z_0) = 0$ e $F'(z_0) > 0$.*

Dimostrazione: Dato che ogni funzione olomorfa su un dominio semplicemente connesso ha radice quadrata olomorfa, l'esistenza della funzione F è conseguenza del Lemma 9.1.1. Rimane dunque da dimostrare solo l'unicità. Questa è una semplice conseguenza del Lemma di Schwartz. Infatti siano $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ applicazioni biolomorfe con $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $f'(z_0), g'(z_0) > 0$, allora $f \circ g^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ è un automorfismo di \mathbb{D} con $f \circ g^{-1}(0) = 0$. Dunque $f \circ g^{-1}(z) = cz$ con c numero complesso con $|c| = 1$. D'altro canto deve essere $(f \circ g^{-1})'(0) > 0$ e quindi $c = 1$ da cui segue che $f = g$. \square

Infine si ricava immediatamente la seguente classificazione:

TEOREMA 9.1.3: *Sia $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ un aperto connesso semplicemente connesso. Allora vale una delle seguenti mutualmente esclusive affermazioni:*

- (i) $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$;
- (ii) Ω è biolomorfo a \mathbb{C} ;
- (iii) Ω è biolomorfo al disco unitario.

Dimostrazione: Il fatto che (i), (ii), (iii) siano mutualmente esclusivi è ovvio dato che $\hat{\mathbb{C}}$ è compatto e che \mathbb{C} , per il teorema di Liouville, non può essere biolomorfo al disco unitario.

Se $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$ allora vale (i). Supponiamo che $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega = \{a\}$. Se $a = \infty$ allora $\Omega = \mathbb{C}$. Se $a \neq \infty$, si consideri la trasformazione di Möbius T definita da $T(z) = \frac{1}{z-a}$. Allora $T(\Omega) = \mathbb{C}$ e quindi vale (ii). Infine supponiamo che $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ contenga almeno due punti distinti a, b . Se uno di essi è ∞ , allora $\Omega \subset \mathbb{C}$ è un aperto semplicemente connesso con $\Omega \neq \mathbb{C}$ e quindi vale (iii). Se $a \neq \infty$ e $b \neq \infty$, si consideri la trasformazione di Möbius S definita da $S(z) = \frac{1}{z-b}$. Allora $\hat{\mathbb{C}} \setminus S(\Omega)$ contiene almeno due punti e uno di questi è ∞ e pertanto $S(\Omega)$ e quindi Ω sono biolomorfi al disco unitario. Anche in questo caso vale (iii). \square

Per concludere riassumiamo le conseguenze topologiche di quello che abbiamo dimostrato riguardo gli aperti semplicemente connessi in \mathbb{C} :

TEOREMA 9.1.4: $\Omega \subset \mathbb{C}$, un aperto connesso. Le seguenti proprietà sono equivalenti:

- (i) Ω è semplicemente connesso;
- (ii) $\mathbb{C} \setminus \Omega$ non ha componenti connesse compatte;
- (iii) $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ è connesso;
- (iv) per ogni catena Γ di curve chiuse C^1 a tratti di Ω e per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ si ha $n(z, \Gamma) = 0$;
- (v) per ogni curva chiusa C^1 a tratti di Ω e per ogni funzione olomorfa f su Ω sia $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$;
- (vi) ogni funzione olomorfa su Ω ha una primitiva olomorfa su Ω ;
- (vii) ogni funzione olomorfa mai nulla su A ha un logaritmo olomorfo su Ω ;
- (viii) per ogni intero positivo n , ogni funzione olomorfa mai nulla su Ω ha una radice n -esima olomorfa su Ω ;
- (ix) ogni $f \in \text{Hol}(\Omega)$ con $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$ ha una radice quadrata olomorfa;
- (x) Ω è omeomorfo al disco unitario.

Dimostrazione: A questo punto rimane poco da dimostrare. L'equivalenza delle proprietà da (ii) a (viii) sono contenute nel Teorema 5.4.5 dove è anche dimostrato che (i) implica ciascuna delle affermazioni da (ii) a (viii). Evidentemente (viii) \Rightarrow (ix). Inoltre (ix) \Rightarrow (x) segue dal Lemma 9.1.1 se $\Omega \neq \mathbb{C}$. Se invece $\Omega = \mathbb{C}$, allora ad esempio l'applicazione $\phi(z) = \frac{z}{1+|z|}$ è un omeomorfismo (ovviamente non olomorfo!). Infine il fatto che (x) \Rightarrow (i) è immediato. \square

9.2. Comportamento al bordo di biolomorfismi.

In questo paragrafo daremo condizioni di regolarità del bordo di un aperto che assicurano l'estensione dell'applicazione definita dal Teorema di Rappresentazione di Riemann a un omeomorfismo delle chiusure. Prima di tutto diamo qualche definizione. Per cominciare in questo paragrafo, per brevità, un aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{C}$ si dirà un *dominio* di \mathbb{C} .

Definizione. Sia Ω un dominio di \mathbb{C} . Un punto $p \in \partial\Omega$ si dice *facilmente accessibile* se esistono $r(p) > 0$ e funzioni continue $\theta_1, \theta_2: (0, r(p)) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che per $r \in (0, r(p))$ si ha $\theta_1(r) \neq \theta_2(r)$ e

$$\Omega \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - p| = r\} = \{z = p + re^{i\theta} \mid \theta \in (\theta_1(r), \theta_2(r))\}$$

ossia se $\Omega \cap \partial\mathbb{D}(p, r)$ è un arco di circonferenza per ogni $r \in (0, r(p))$ con estremi che dipendono con continuità da r .

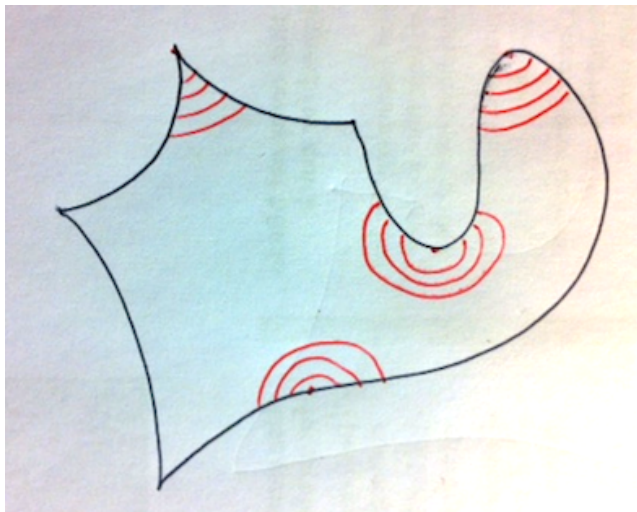


Fig. 8.1

Dunque si vede immediatamente ad esempio che per un poligono (Fig. 8.2),

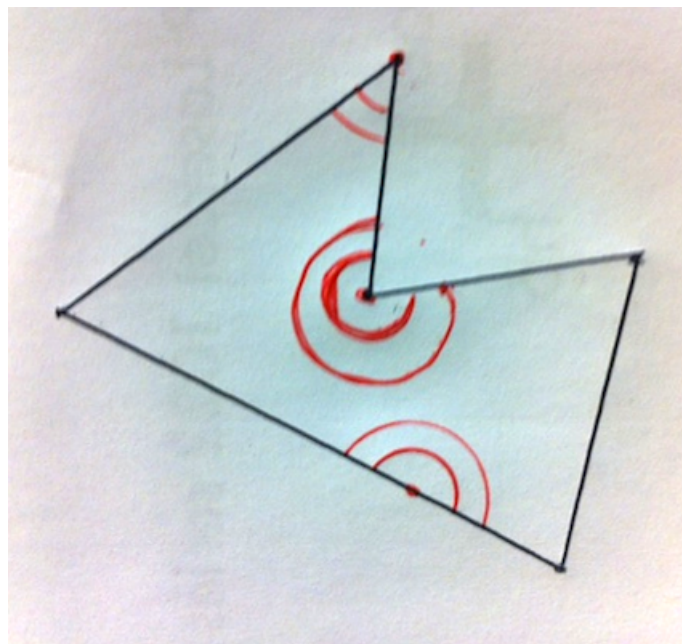


Fig. 8.2

che è un dominio che per ha per frontiera una curva lineare a tratti, tutti i punti della frontiera sono facilmente accessibili. Infatti in questo caso si possono scegliere le funzioni $\theta_1(r)$ e $\theta_2(r)$ costanti con $\theta_2(r) - \theta_1(r) = \pi$ se si prende un punto su un lato del poligono, che non sia un vertice, mentre se si prende un vertice la differenza $\theta_2(r) - \theta_1(r)$ sarà uguale all'angolo in quel vertice.

Si può dimostrare che lo stesso è vero per domini con frontiera C^1 a tratti. Ci limitiamo a dimostrarlo per *domini regolari* che ora definiamo:

Definizione. Un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ si dice *regolare* in $p \in \partial\Omega$ se esiste un intorno aperto $U \ni p$ e una *funzione definente* $\rho: U \rightarrow \mathbb{R}$ per $\partial\Omega$ in p ossia una funzione a valori reali ρ di classe C^1 definita su un intorno aperto di p tale che

$$U \cap \Omega = \{z \in U \mid \rho(z) < 0\}, \quad \text{e } d\rho(z) \neq 0 \text{ per } z \in U. \quad (9.2.1)$$

Si vede subito che se vale (9.2.1) allora

$$U \cap \partial\Omega = \{z \in U \mid \rho(z) = 0\} \quad \text{e } U \setminus \bar{\Omega} = \{z \in U \mid \rho(z) > 0\}.$$

Il dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ si dice *regolare* se è regolare in ogni $p \in \partial\Omega$. Se in ogni punto $p \in \partial\Omega$ esiste una funzione definente di classe C^k per $k = 1, 2, \dots, +\infty$ si dice anche che $\Omega \subset \mathbb{C}$ è *regolare* di classe C^k .

Tutti i punti della frontiera di un dominio regolare sono facilmente accessibili:

PROPOSIZIONE 9.2.1: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio regolare. Allora:*

- (i) *per ogni punto $p \in \partial\Omega$ esiste un intorno aperto $U \ni p = (x_0 + iy_0)$ tale che $U \cap \partial\Omega$ è il grafico di una funzione $y = \phi(x)$ di classe C^1 definita in un intervallo contenente x_0 oppure è il grafico di una funzione $x = \psi(y)$ di classe C^1 definita in un intervallo contenente y_0 ;*
- (ii) *ogni punto $p \in \partial\Omega$ è facilmente accessibile.*

Dimostrazione: Il punto (i) è una semplice applicazione del teorema delle funzioni implicite. Infatti se $\rho: U \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione definente per $\partial\Omega$ in p , allora

$$0 \neq d\rho(p) = \rho_x(x_0, y_0)dx + \rho_y(x_0, y_0)dy.$$

Dunque almeno uno fra $\rho_x(x_0, y_0)$ e $\rho_y(x_0, y_0)$ deve essere diverso da zero. Se $\rho_y(x_0, y_0) \neq 0$ allora il teorema delle funzioni implicite garantisce che esiste una funzione $\phi: I \rightarrow J$ di classe C^1 fra intervalli aperti $I \ni x_0$ e $J \ni y_0$ tale che $y_0 = \phi(x_0)$ e $\rho_y(x, \phi(x)) = 0$ per $x \in I$ in modo che

$$(I \times J) \cap \partial\Omega = \{z = x + iy \mid y = \phi(x) \text{ per } x \in I\}. \quad (9.2.2)$$

Analogamente, se $\rho_x(x_0, y_0) \neq 0$, si ha che $\partial\Omega$, in un intorno di p , è grafico di una funzione della variabile y . Sia $p \in \partial\Omega$ un punto per il quale $\partial\Omega$, in un intorno di p , sia grafico di una funzione di classe C^1 della variabile x ossia valga (9.2.2). Allora esiste un $r(p) > 0$ tale che $\mathbb{D}(p, r(p)) \subset I \times J$ e tale che $\partial\mathbb{D}(p, r(p)) \cap \partial\Omega$ consista di due punti distinti. Si osservi che, dato che $\partial\Omega$ vicino p è il grafico di una funzione C^1 , in un intorno sufficientemente piccolo di p , il numero delle intersezioni di $\partial\Omega$ con $\partial\mathbb{D}(p, r(p))$ è uguale al numero delle intersezioni della retta tangente in p a $\partial\Omega$ con $\partial\mathbb{D}(p, r(p))$. Per ogni $r \in (0, r(p))$ siano $x_1(r) < x_2(r) \in I$

tali che $z_1(r) = x_1(r) + i\phi(x_1(r))$ e $z_2(r) = x_2(r) + i\phi(x_2(r))$ siano le due intersezioni (distinte) di $\partial\mathbb{D}(p, r(p))$ con $\partial\Omega$. I punti $z_1(r)$ e $z_2(r)$ sono funzioni di classe C^1 di r e quindi, per un'opportuna scelta della funzione argomento, anche le funzioni $\theta_1(r) = \text{Arg}(z_1(r) - p)$ e $\theta_2(r) = \text{Arg}(z_2(r) - p)$. Dunque per ogni $r \in (0, r(p))$

$$\Omega \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - p| = r\} = \{z = p + re^{i\theta} \mid \theta \in (\theta_1(r), \theta_2(r))\}$$

ossia $\Omega \cap \partial\mathbb{D}(p, r(p))$ è un arco di circonferenza per ogni $r \in (0, r(p))$. □

Useremo il seguente risultato tecnico:

LEMMA 9.2.2: Sia Ω un dominio di \mathbb{C} e $p \in \partial\Omega$ un punto facilmente accessibile. Sia $\{z_n\} \subset \Omega$ una successione convergente a p . Allora esiste una curva continua $\alpha : [0, 1) \rightarrow \Omega$, una successione $\{t_n\} \subset [0, 1)$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$ e $N > 0$ tali che se $n > N$ si ha $z_n = \alpha(t_n)$.

Dimostrazione: Dato che p è facilmente accessibile, esistono $r(p) > 0$ e funzioni continue $\theta_1, \theta_2 : (0, r(p)) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che per $r \in (0, r(p))$ si ha $\theta_1(r) \neq \theta_2(r)$ e

$$\Omega \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - p| = r\} = \{z = p + re^{i\theta} \mid \theta \in (\theta_1(r), \theta_2(r))\}.$$

Sia $N > 0$ intero tale che se $n \geq N$ si ha $r_n = |z_n - p| < r(p)$. Per n intero positivo, si ponga:

$$z_n = p + r_n e^{i\phi_n}, \quad \zeta_n = r_n e^{i \frac{\theta_1(r_n) + \theta_2(r_n)}{2}}$$

$$t_n = \frac{n-1}{n}, \quad t'_n = t_n + \frac{1}{3n(n+1)} = \frac{3n^2-2}{3n(n+1)}, \quad t''_n = t_n + \frac{2}{3n(n+1)} = \frac{3n^2-1}{3n(n+1)}.$$

Si osservi che allora si ha anche

$$t_n = \frac{n}{n+1} = t''_n + \frac{1}{3n(n+1)}.$$

$$\Phi_n(t) = [1 - 3n(n+1)(t - t_n)]\phi_n + 3n(n+1)(t - t_n) \frac{\theta_1(r_n) + \theta_2(r_n)}{2}.$$

$$\Psi_n(t) = [1 - 3n(n+1)](t - t''_n) \frac{\theta_1(r_n) + \theta_2(r_n)}{2} + 3n(n+1)(t - t''_n)\phi_{n+1}.$$

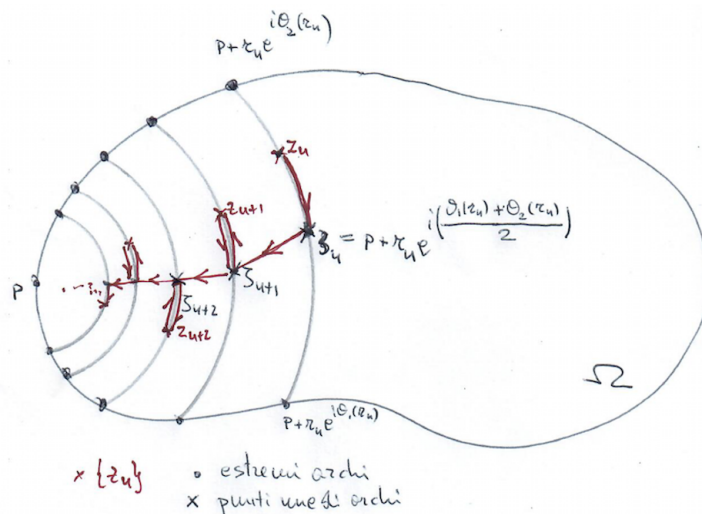


Fig. 8.3

Definiamo $\alpha : [0, 1) \rightarrow \Omega$ ponendo $\alpha(t) = z_N$ se $t \in [0, t_N]$ e per $n \geq N$ (vedi Fig. 8.3)

$$\alpha(t) = \begin{cases} p + r_n e^{\Phi_n(t)} & \text{se } t \in [t_n, t'_n] \\ [1 - 3n(n+1)(t - t'_n)]\zeta_n + 3n(n+1)(t - t'_n)\zeta_{n+1} & \text{se } t \in [t'_n, t''_n] \\ p + r_{n+1} e^{\Psi_{n+1}(t)} & \text{se } t \in [t''_n, t_{n+1}]. \end{cases}$$

La curva α è quella richiesta. \square

Il risultato di estensione che vogliamo provare è il seguente

TEOREMA 9.2.3: *Sia Ω un aperto limitato semplicemente connesso tale che ogni punto di $\partial\Omega$ sia facilmente accessibile. Allora un biolomorfismo $F: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ da Ω al disco unitario \mathbb{D} si estende a un omeomorfismo $\bar{F}: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$.*

Dimostrazione: Sia $F: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ un biolomorfismo. Per $p \in \partial\Omega$ vogliamo definire $\bar{F}(p) \in \partial\mathbb{D}$ dimostrando che esiste

$$\lim_{\Omega \ni z \rightarrow p} F(z) = w := \bar{F}(p) \in \partial\mathbb{D}.$$

Cominciamo osservando che se $\{z_n\}$ è una successione convergente a $p \in \partial\Omega$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} F(z_n) = w$ allora $w \in \partial\mathbb{D}$. Necessariamente deve essere $w \in \bar{\mathbb{D}}$. Si può escludere che $w \in \mathbb{D}$ con il seguente argomento. Si consideri la successione di funzioni $g_n(z) = F(z) - F(z_n)$. È immediato verificare che g_n converge uniformemente sui compatti di Ω alla funzione $g = F - w$. Allora $w \in \mathbb{D}$ se e solo se esiste $z \in \Omega$ tale che $F(z) = w$ ossia se la funzione g ha uno zero in Ω . Sia $\{\Omega_k\}$ una successione di aperti tali che per ogni k si abbia $\Omega_k \subset \bar{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}$ e con $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$. Supponiamo che esista uno zero z per la funzione $g = F - w$. Allora esiste k_0 tale che $z \in \Omega_{k_0}$. Dato che z_n converge a $p \in \partial\Omega$, esiste N tale che se $n > N$ si deve avere $z_n \notin \bar{\Omega}_{k_0}$. Ma allora la successione $\{g_n\}_{n > N}$ converge uniformemente sui compatti di Ω_{k_0} alla funzione (non costante!) $g = F - w$. Ma g_n , per ogni $n > N$, non ha zeri in Ω_{k_0} mentre g ne avrebbe uno: questo, per il teorema di Hurwitz non è possibile.

Supponiamo ora che $\{z_n\}$, $\{\zeta_n\}$ siano successioni in Ω convergenti a $p \in \partial\Omega$ e tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z_n) = w_1 \in \partial\mathbb{D} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(\zeta_n) = w_2 \in \partial\mathbb{D}$$

Dimostriamo ora che $w_1 = w_2$. Siano $\alpha: [0, 1) \rightarrow \Omega$ e $\beta: [0, 1) \rightarrow \Omega$ curve continue costruite come nel Lemma 9.2.2 tali che, se $t_n = \frac{n}{n+1}$ per n grande abbastanza, si abbia $\alpha(t_n) = z_n$ e $\beta(t_n) = \zeta_n$.

Per ogni $r \in (0, r(p))$ si denoti:

$$z(r) = \partial\mathbb{D}(p, r) \cap \text{Im}(\alpha) \quad \text{e} \quad \zeta(r) = \partial\mathbb{D}(p, r) \cap \text{Im}(\beta).$$

Se $C_r = \Omega \cap \partial\mathbb{D}(p, r)$ e $C'_r \subset C_r$ è la porzione di arco con estremi $z(r) = p + r e^{iA(r)}$ e $\zeta(r) = p + r e^{iB(r)}$ (in questo ordine), allora

$$F(\zeta(r)) - F(z(r)) = \int_{C'_r} F'(z) dz.$$

Dunque:

$$|F(\zeta(r)) - F(z(r))| = \left| \int_{C'(r)} F'(z) dz \right| \leq \int_{A(r)}^{B(r)} |F'(re^{i\theta})| r d\theta \leq \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |F'(re^{i\theta})| r d\theta,$$

e quindi, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per integrali:

$$\begin{aligned} |F(\zeta(r)) - F(z(r))|^2 &\leq \left(\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |F'(re^{i\theta})| r d\theta \right)^2 \\ &\leq \left(\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |F'(re^{i\theta})|^2 d\theta \right) \left(\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} r^2 d\theta \right) \\ &\leq 2\pi r \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |F'(re^{i\theta})|^2 r d\theta. \end{aligned}$$

Ma allora, dividendo per r e integrando otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_0^{r(p)} \frac{|F(\zeta(r)) - F(z(r))|^2}{r} dr &\leq 2\pi \int_0^{r(p)} \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |F'(re^{i\theta})|^2 r d\theta dr \\ &\leq 2\pi \int_{\Omega} |F'(z)|^2 dx dy = 2\pi \text{Area}(\mathbb{D}) \end{aligned} \tag{9.2.3}$$

dove l'ultima eguaglianza segue dal fatto che $|F'(z)|^2$ è il determinante del diffeomorfismo $z \mapsto F(z)$ e dalla formula del cambiamento di coordinate per integrali multipli. D'altra parte, affinché il primo integrale che compare in (9.2.3) sia finito, è necessario che

$$0 = \lim_{r \rightarrow 0} F(\zeta(r)) - F(z(r)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(\zeta_n) - F(z_n).$$

Possiamo allora concludere che se z_n è una successione che converge a $p \in \partial\Omega$, allora $F(z_n)$ ha limite per $n \rightarrow \infty$ e il limite è un punto $w \in \partial\Omega$. Infatti $\{\overline{F(z_n)}\}$ consiste dei punti della successione $\{F(z_n)\}$ e dei limiti delle sue sottosuccessioni convergenti. Ma abbiamo appena dimostrato che queste sottosuccessioni convergono a un unico punto $w \in \partial\Omega$ e quindi, di conseguenza, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(z_n) = w$. Poniamo come annunciato, per definizione $w = \overline{F}(p)$. In questo modo si definisce un'estensione $\overline{F}: \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ di F che è continua per costruzione. Dato che ogni punto di $\partial\mathbb{D}$ è facilmente accessibile, con lo stesso argomento, si definisce un'estensione continua $\overline{F^{-1}}: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\Omega}$ di F^{-1} . Dato che $F^{-1} \circ F = Id_{\Omega}$ e $F \circ F^{-1} = Id_{\mathbb{D}}$, per continuità deve essere $\overline{F^{-1}} \circ \overline{F} = Id_{\overline{\Omega}}$ e $\overline{F} \circ \overline{F^{-1}} = Id_{\overline{\mathbb{D}}}$ e la dimostrazione è completa. \square

Come corollario immediato, abbiamo il seguente:

TEOREMA 9.2.4: *Siano Ω_1, Ω_2 domini limitati semplicemente connessi tale che ogni punto di $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$ sia facilmente accessibile. Allora un biolomorfismo $F: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ si estende a un omeomorfismo $\overline{F}: \overline{\Omega_1} \rightarrow \overline{\Omega_2}$.*

Dimostrazione: Siano $z_0 \in \Omega_1$, $w_0 = F(z_0) \in \Omega_2$ e $G_1: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{D}$ e $G_2: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{D}$ gli unici bilomorfismi tali che $G_1(z_0) = 0$, $G_1'(z_0) > 0$ e $G_2(w_0) = 0$, $G_2'(w_0) > 0$. Si considerino:

$$g_1(z) = \frac{|F'(z_0)|}{F'(z_0)} G_2(F(z)) \quad \text{e} \quad g_2(w) = \frac{|(F^{-1})'(w_0)|}{(F^{-1})'(w_0)} G_1((F^{-1})(w)).$$

Allora $g_1: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{D}$ e $g_2: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{D}$ sono bilomorfismi tali che $g_1(z_0) = 0$, $g_1'(z_0) > 0$ e $g_2(w_0) = 0$, $g_2'(w_0) > 0$. Allora, per l'unicità dell'applicazione di Riemann, deve essere: $g_1 = G_1$ e $g_2 = G_2$. Per il teorema 9.2.3 le applicazioni $g_1 = G_1$ e $g_2 = G_2$ si estendono a omeomorfismi delle chiusure e quindi segue (i dettagli sono lasciati per esercizio) che F e F^{-1} si estendono continue sulle chiusure e la tesi segue. \square

9.3. Aperti con gruppo di automorfismi non compatto.

Come abbiamo visto il disco unitario \mathbb{D} è un esempio di aperto omogeneo ossia $Aut(\mathbb{D})$ agisce in modo transitivo su \mathbb{D} . Il teorema di Rappresentazione di Riemann implica che ogni aperto semplicemente connesso di \mathbb{C} è omogeneo. In effetti come conseguenza del teorema di uniformizzazione che classifica le superfici di Riemann, si può dimostrare il seguente

TEOREMA 9.3.1: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso omogeneo. Allora si verificano una e una sola delle seguenti affermazioni:*

$$\Omega = \mathbb{C} \quad \text{oppure} \quad \Omega = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{oppure} \quad \Omega \text{ è biolomorfo a } \mathbb{D}.$$

La dimostrazione del Teorema 9.3.1 ha bisogno di materiali che vanno oltre gli scopi di queste note. D'altra parte un risultato di questo tipo si dimostra utilizzando caratteristiche peculiari della teoria delle funzioni olomorfe di una variabile complessa che è caratterizzata dalla grande ricchezza dello spazio delle funzioni olomorfe. Non è possibile aspettarsi nulla del genere in dimensione più alta. Infatti uno dei primi risultati importanti dell'analisi complessa in più variabili è dovuto a Poincaré che nel 1906 dimostra che la palla unitaria $\mathbb{B}^2 \subset \mathbb{C}^2$ e il prodotto di due dischi $\mathbb{D}^2 = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \subset \mathbb{C}^2$ sono aperti semplicemente connessi omogenei non olomorficamente equivalenti.

Qui dimostreremo un caso particolare del Teorema 9.3.1 sotto ipotesi di regolarità della frontiera. Il teorema che presenteremo è l'esatto analogo unidimensionale del risultato più generale che vale che vale anche in dimensione più alta. La dimostrazione usa il teorema di rappresentazione di Riemann che è esclusivo del caso unidimensionale ma adatta alcuni argomenti e metodi messi a punto per dimostrare il caso generale. Cominciamo con qualche considerazione sui gruppi di automorfismi di aperti di \mathbb{C} . Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$, considereremo $Aut(\Omega)$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti di Ω . Useremo la seguente

Definizione. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso. Un punto $p \in \partial\Omega$ si dice *punto d'accumulazione d'orbita al bordo* se esiste $q \in \Omega$ e una successione di automorfismi $\{\phi_n\} \subset Aut(\Omega)$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(q) = p$.

È evidente che se Ω è un aperto omogeneo, allora ogni punto $p \in \partial\Omega$ è punto d'accumulazione d'orbita al bordo. Infatti per $p \in \partial\Omega$ sia $q \in \Omega$ arbitrario e sia $\{p_n\} \subset \Omega$ una successione tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$. Allora esiste una successione $\{\phi_n\} \subset Aut(\Omega)$ tale che $\phi_n(q) = p_n$ per ogni n . Dunque $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(q) = p$.

Abbiamo bisogno di alcuni risultati di preparazione.

Definizione. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $p \in \partial\Omega$. Una *funzione picco* in p è una funzione continua $f_p: \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ olomorfa su Ω tale che $f_p(p) = 1$ e $|f(z)| < 1$ per ogni $z \in \overline{\Omega} \setminus \{p\}$.

PROPOSIZIONE 9.3.2: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso con frontiera unione di curve di classe C^1 e $p \in \partial\Omega$. Esiste una funzione picco $f_p: \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ in p .*

Dimostrazione: Dato che la componente di $\partial\Omega$ su cui giace p è una curva di classe C^1 , esiste un punto $q \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ tale che il segmento \overline{pq} è ortogonale (alla retta tangente)

a $\partial\Omega$ in p ed è tutto contenuto in $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$. Sia T_1 una trasformazione di Möbius tale che $T_1(p) = 0$, $T_1(q) = \infty$ e $T_1(\frac{q-p}{2}) = -1$ in modo che $T_1(\bar{p}q) = \{\infty\} \cup (-\infty, 0]$. Sia $T_2(z) = \sqrt{z} = e^{\frac{\text{Log} z}{2}}$ dove Log è il logaritmo principale definito su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Allora, in particolare

$$T_2 \circ T_1(p) = 0, \quad T_2 \circ T_1(\Omega) \subset \{z \mid \text{Re}(z) > 0\} \text{ e } T_2 \circ T_1(\bar{\Omega} \setminus \{p\}) \subset \{z \mid \text{Re}(z) \geq 0\}.$$

Se $T_3(z) = \frac{1-z}{1+z}$, allora

$$T_3 \circ T_2 \circ T_1(p) = 1, \quad T_3 \circ T_2 \circ T_1(\Omega) \subset \{z \mid |z| < 1\} \text{ e } T_3 \circ T_2 \circ T_1(\bar{\Omega} \setminus \{p\}) \subset \{z \mid |z| \leq 1\}.$$

Infine, se $T_4(z) = \frac{z+1}{2}$, $f_p = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ è la funzione cercata (vedi Fig. 8.4) dato che

$$f_p(p) = 1 \text{ e } f_p(\bar{\Omega} \setminus \{p\}) \subset \{z \mid |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\} \setminus \{1\} \subset \{z \mid |z| < 1\}.$$

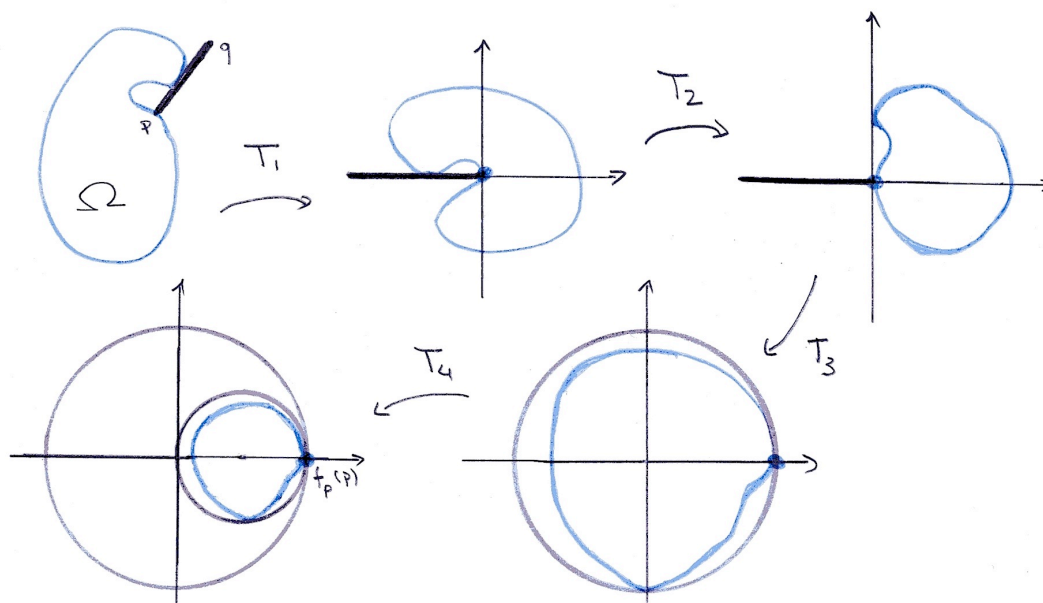


Fig. 8.4

□

Ecco il risultato che abbiamo annunciato:

TEOREMA 9.3.3: (Teorema di Wong-Rosay) *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso con frontiera unione di curve semplici disgiunte di classe C^1 . Se esiste un punto d'accumulazione d'orbita al bordo $p \in \partial\Omega$ allora Ω è biolomorfo al disco unitario \mathbb{D} .*

Dimostrazione: Dato che esiste $p \in \partial\Omega \neq \emptyset$ e quindi $\Omega \neq \mathbb{C}$, allora ci basterà dimostrare che Ω è semplicemente connesso. Lo faremo in tre passi utilizzando il fatto che, per ipotesi, esiste una successione di automorfismi $\{\phi_n\} \subset \text{Aut}(\Omega)$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(q) = p$. Prima di tutto osserviamo che grazie l'argomento utilizzato nella dimostrazione della Proposizione 9.3.2 si ha che Ω è biolomorfo a un aperto contenuto nel disco unitario e quindi, in particolare a un aperto limitato. Possiamo dunque assumere da qui in poi che Ω sia un aperto limitato.

Primo Passo: Esiste una sottosuccessione ϕ_{n_k} di $\{\phi_n\}$ tale che ϕ_{n_k} converge uniformemente su ogni compatto $K \subset \Omega$ alla funzione costante $C_p(z) \equiv p$.

Per la Proposizione 9.3.2 esiste una funzione continua $f_p: \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ olomorfa su Ω tale che $f_p(p) = 1$ e $|f(z)| < 1$ per ogni $z \in \overline{\Omega} \setminus \{z\}$. Si consideri la successione $\psi_n = f_p \circ \phi_n$. Per il Teorema di Montel, esiste una sottosuccessione ψ_{n_k} di ψ_n uniformemente convergente su ogni compatto contenuto in Ω a una funzione olomorfa ψ_0 . Dato che $|\psi_{n_k}(z)| < 1$ per ogni $z \in \Omega$, allora $|\psi_0(z)| \leq 1$ per ogni $z \in \Omega$. D'altra parte:

$$\psi_0(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{n_k}(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_p \circ \phi_{n_k}(q) = f_p \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{n_k}(q) \right) = f_p(p) = 1.$$

Per il principio del massimo modulo necessariamente allora si ha $\psi_0 \equiv 1$. D'altra parte avendo assunto che Ω è limitato, per il Teorema di Montel, a meno di sostituire ϕ_{n_k} con una sua sottosuccessione, possiamo supporre che ϕ_{n_k} converge uniformemente sui compatti di Ω a una funzione ϕ_0 olomorfa su Ω a valori in $\overline{\Omega}$. D'altra parte dato che deve essere $\psi_0 = f_p \circ \phi_0$ e che $f_p^{-1}(1) = \{p\}$, necessariamente ψ_0 è la funzione costante C_p .

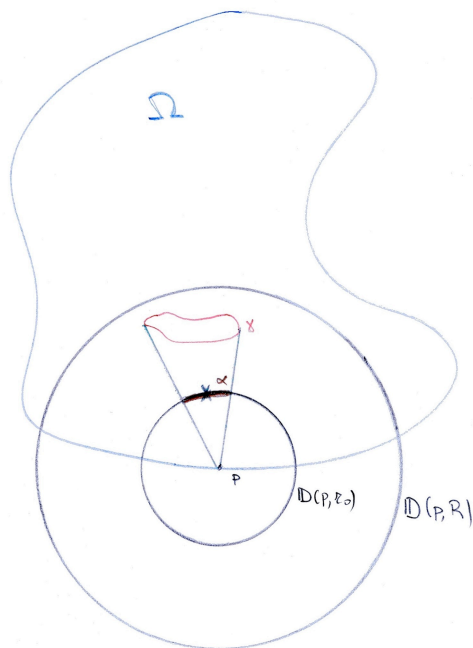
Secondo Passo: Esiste $R > 0$ tale che $\Omega \cap \mathbb{D}(p, R)$ è semplicemente connesso.

Per la Proposizione 9.2.1, con la terminologia introdotta nel paragrafo 2, il punto p è facilmente accessibile ossia esistono $R > 0$ e funzioni continue $\theta_1, \theta_2: (0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che per $r \in (0, R)$ si ha $\theta_1(r) \neq \theta_2(r)$ e

$$\Omega \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - p| = r\} = \{z = p + re^{i\theta} \mid \theta \in (\theta_1(r), \theta_2(r))\}$$

ossia se $\Omega \cap \partial\mathbb{D}(p, r)$ è un arco di circonferenza per ogni $r \in (0, R)$ con estremi che dipendono con continuità da r (vedi Fig. 8.1). Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega \cap \mathbb{D}(p, R)$ un cammino chiuso. Allora $\gamma([a, b])$ è un compatto in $\Omega \cap \mathbb{D}(p, R)$ e quindi la funzione continua $d(z) = |z - p|$ ha minimo $2r_0 > 0$ su $\gamma([a, b])$. Per ogni $t \in [a, b]$ sia

$$\alpha(t) = [p, \gamma(t)] \cap \{z = r_0 e^{i\theta} \mid \theta \in (\theta_1(r_0), \theta_2(r_0))\}.$$



Allora $\alpha: [a, b] \rightarrow \Omega \cap \mathbb{D}(p, R)$ è continua e ha per immagine un arco contenuto nell'arco $\{z = r_0 e^{i\theta} \mid \theta \in (\theta_1(r_0), \theta_2(r_0))\}$. Un'omotopia $H: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \Omega \cap \mathbb{D}(p, R)$ che contrae per $s \in [0, \frac{1}{2}]$ il cammino γ a un arco contenuto in $\{z = r_0 e^{i\theta} \mid \theta \in (\theta_1(r_0), \theta_2(r_0))\}$ e per $s \in [\frac{1}{2}, 1]$, questo arco nel suo punto medio (Vedi Fig. 8.5) è definita da

Fig. 8.5

$$H_1(s, t) = \begin{cases} (1 - 2s)\gamma(t) + 2s\alpha(t) & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ [1 - 2(s - \frac{1}{2})]\alpha(t) + 2(s - \frac{1}{2})r_0 e^{i\frac{(\theta_2(r_0) - \theta_1(r_0))}{2}} & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Terzo Passo: Ω è semplicemente connesso.

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ un cammino chiuso. Allora $\Gamma = \gamma([a, b])$ è un compatto in Ω . Sia $R > 0$ il raggio trovato nel Secondo Passo. Per quanto dimostrato Primo Passo, esiste k_0 tale che se $k > k_0$ allora $\phi_{n_k}(\Gamma) \subset \Omega \cap \mathbb{D}(p, R)$. Dato che $\Omega \cap \mathbb{D}(p, R)$ è semplicemente connesso, allora $\phi_{n_k} \circ \gamma$ è omotopo a un cammino costante in $\Omega \cap \mathbb{D}(p, R)$. D'altra parte ϕ_{n_k} è un omeomorfismo e quindi γ è omotopo a un cammino costante in Ω . Dunque Ω è semplicemente connesso. \square

Come conseguenza quasi immediata, abbiamo il seguente

COROLLARIO 9.3.4: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso omogeneo con frontiera unione di curve semplici disgiunte di classe C^1 . Allora Ω è biolomorfo al disco unitario \mathbb{D} .*

Dimostrazione: Come abbiamo già osservato, si vede subito che ogni punto della frontiera di Ω è punto d'accumulazione di orbita e quindi il risultato seguirà immediatamente dal Teorema 9.3.3. \square

TEOREMA 9.3.5: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso con frontiera unione di curve semplici disgiunte di classe C^1 . Se esiste un punto d'accumulazione d'orbita al bordo $p \in \partial\Omega$ allora $Aut(\Omega)$ non è compatto. Se Ω è anche limitato, allora vale anche il viceversa, ossia, se $Aut(\Omega)$ non è compatto, allora esiste un punto d'accumulazione d'orbita al bordo $p \in \partial\Omega$.*

Dimostrazione: Supponiamo che esista un punto d'accumulazione d'orbita al bordo $p \in \partial\Omega$ e che $Aut(\Omega)$ sia compatto. Useremo un argomento molto simile a quello utilizzato per il Primo Passo della dimostrazione del Teorema 9.3.3 per trovare una contraddizione. Allora siano $q \in \Omega$ e $\{\phi_n\} \subset Aut(\Omega)$ una successione di automorfismi tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(q) = p$. Sia ϕ_{n_k} una sottosuccessione di ϕ_n uniformemente convergente su ogni compatto contenuto in Ω a ϕ_0 . Se $Aut(\Omega)$ è compatto si deve avere $\phi_0 \in Aut(\Omega)$. D'altra parte se f_p è una funzione picco in p , posto $\psi_{n_k} = f_p \circ \phi_{n_k}$ e $\psi_0 = f_p \circ \phi_0$, si ha $|\psi_{n_k}(z)| < 1$ per ogni $z \in \Omega$ e quindi $|\psi_0(z)| \leq 1$ per ogni $z \in \Omega$. Come nella dimostrazione del Teorema 9.3.3, osserviamo però che

$$\psi_0(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{n_k}(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_p \circ \phi_{n_k}(q) = f_p \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{n_k}(q) \right) = f_p(p) = 1$$

e quindi, per il principio del massimo modulo, necessariamente si ha $\psi_0 \equiv 1$. Per le proprietà della funzione f_p , questo è possibile se e solo ϕ_{n_k} converge uniformemente su ogni compatto $K \subset \Omega$ alla funzione costante $C_p(z) \equiv p$ contro il fatto che $\phi_0 \in Aut(\Omega)$. Viceversa, se Ω è limitato e non ci sono punti d'accumulazione d'orbita al bordo dimostriamo che $Aut(\Omega)$ è compatto nella topologia della convergenza uniforme sui compatti. Sia $q \in \Omega$. Allora l'orbita di q

$$\mathcal{O}(q) = \{z = \phi(q) \mid \phi \in Aut(\Omega)\}$$

è un sottoinsieme di Ω che non ha punti di accumulazione sulla frontiera $\partial\Omega$ di Ω . Dunque la sua chiusura $\overline{\mathcal{O}(q)}$ è un sottoinsieme compatto di Ω . Sia $\{\phi_n\} \subset$

$Aut(\Omega)$ una successione di automorfismi. Per il Teorema di Montel (si ricordi che Ω è limitato!) esiste una sottosuccessione ϕ_{n_k} di ϕ_n uniformemente convergente su ogni compatto contenuto in Ω a ϕ_0 . Vogliamo dimostrare che $\phi_0 \in Aut(\Omega)$. Per ogni $q \in \Omega$ si ha

$$\phi_0(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{n_k}(q) \in \overline{\mathcal{O}(q)} \subset \Omega.$$

Dunque $\phi_0(\Omega) \subset \Omega$. Ripetendo l'argomento si dimostra che esiste una sottosuccessione $\{\phi_n^{-1}\}$ uniformemente convergente sui compatti di Ω . A meno di rinominare indici e scegliere sottosuccessioni di sottosuccessioni, possiamo supporre che $\phi_{n_k}^{-1}$ converga uniformemente sui compatti di Ω a ψ_0 . Per $q \in \Omega$ allora

$$\psi_0(\phi_0(q)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{n_k}^{-1}(\phi_{n_k}(q)) = q.$$

Dunque ϕ_0 è iniettiva e ψ_0 è suriettiva. Scambiando i ruoli si dimostra che ψ_0 è iniettiva e ϕ_0 è suriettiva. Dunque $\phi_0 \in Aut(\Omega)$. \square

Osservazione. L'ipotesi di limitatezza nella seconda parte del Teorema 9.3.5 è indispensabile. Infatti posto $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$, se si definisce $\alpha_n(z) = z + n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, allora si dimostra che

$$Aut(\mathbb{H} \setminus \{z = i + n \mid n \in \mathbb{Z}\}) = \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dunque $Aut(\mathbb{H} \setminus \{z = i + n \mid n \in \mathbb{Z}\})$ è non compatto ma d'altra parte non vi sono punti d'accumulazione d'orbita al bordo per $\mathbb{H} \setminus \{z = i + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Infine, mettendo insieme le conclusioni del Teorema 9.3.3 e del Teorema 9.3.5, abbiamo il seguente:

COROLLARIO 9.3.6: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso limitato con frontiera unione di curve semplici disgiunte di classe C^1 . Allora, se $Aut(\Omega)$ non è compatto, Ω è biolomorfo al disco unitario \mathbb{D} .*