Variabile complessa 19.6.2013

Si risolvano il maggior numero possibile fra i seguenti esercizi:

1. Sia $\mathcal{M}$ il gruppo delle trasformazioni di Möbius e per $T \in \mathcal{M}$ si denoti $Fix(T) = \{p \in \hat{\mathbb{C}} \mid T(p) = p\}$ l'insieme dei punti fissi di T.

a) Si dimostri che se $T \in \mathcal{M}$ e $T \neq Id$ allora $Fix(T) \neq \emptyset$ ma contiene al più due punti.

b) Caratterizzare tutte le trasformazioni $T \in \mathcal{M}$ che non hanno punti fissi in $\mathbb{C}$.

c) Caratterizzare tutte le trasformazioni $T \in \mathcal{M}$ tali che $Fix(T) = \{1\}$.

2. Sia $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ il disco unitario e

$$K = \{f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |a_n| \leq n+1 \ \ \forall n \geq 0\}.$$

Dimostrare che K è una famiglia normale di funzioni olomorfe.

Consiglio: ricordare che $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)r^n = \frac{1}{(1-r)^2}$ *per* $r \in [0,1)$ *aiuta a stimare* $|f(z)|$ *per* $f \in K$*.....*

3. Siano $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ il disco unitario, f, g funzioni olomorfe su un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{C}$, continue su $\overline{\Omega}$ e tali che:

$$f(\overline{\Omega}) \cup g(\overline{\Omega}) \subset \overline{\mathbb{D}}, \qquad g(\partial\Omega) \subset \partial\mathbb{D}, \qquad \exists M > 0 \ \text{ tale che } \left|\frac{f}{g}\right| \leq M \ \text{ su } \ \Omega \setminus g^{-1}(0).$$

Dimostrare che $|f(z)| \leq |g(z)|$ per ogni $z \in \Omega$.

4. Sia F una funzione una funzione intera con $F(0) = 0$ tale che per $|z| > 1$ si abbia

$$\ln|z|\,|f(z)| \leq |z|.$$

Dimostrare che $F(0) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

5. Calcolare

$$\int_\gamma \left[\frac{e^{\pi\zeta}}{\zeta^2+1} + \cos\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{e^\zeta}\right] d\zeta$$

dove γ è la curva definita, per $t \in [0, 2\pi]$, da $\gamma(t) = 1 + i + 2e^{-it}$.