

CAPITOLO 2

Funzioni olomorfe

2.1. Funzioni olomorfe e equazione di Cauchy-Riemann

Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione.

DEFINIZIONE 2.1.1: La funzione f ha *derivata complessa* in $a \in A$ se esiste finito il limite

$$\lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

e il numero $f'(a)$ si dice *derivata* di f in a . La funzione f si dice *olomorfa* su A se ha derivata complessa in ogni punto di A . Se f è olomorfa su A , funzione f' definita da $a \mapsto f'(a)$ si dice *derivata* di f . Una funzione olomorfa su tutto \mathbb{C} si dice *intera*. Siano A, B aperti in \mathbb{C} . Denoteremo con $\text{Hol}(A)$ l'insieme di tutte le funzioni olomorfe su A e con $\text{Hol}(A, B)$ l'insieme di tutte le funzioni olomorfe definite su A a valori in B .

Dalla definizione abbiamo subito

PROPOSIZIONE 2.1.1: Se $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ha derivata complessa in $a \in A$, allora f è continua in a .

Dimostrazione: Si definisca in un intorno U di a la funzione $\Delta(z)$ mediante

$$\Delta(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} & \text{se } z \neq a \\ f'(a) & \text{se } z = a \end{cases}.$$

Allora su U si ha $f(z) = f(a) + \Delta(z)(z - a)$ e quindi la tesi è immediata. \square

Esempi

1. Le funzioni costanti $f(z) = c$ sono olomorfe su tutto \mathbb{C} e $f'(z) = 0$ dato che per ogni $a \in \mathbb{C}$

$$\lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

2. La funzione identica $f(z) = z$ è olomorfa su tutto \mathbb{C} e $f'(z) = 1$ dato che per ogni $a \in \mathbb{C}$

$$\lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{(a+h) - a}{h} = 1.$$

3. La funzione coniugio $f(z) = \bar{z}$ non ha derivata complessa in alcun punto di \mathbb{C} . Infatti per ogni $a \in \mathbb{C}$ si ha

$$\lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{(\bar{a} + h) - \bar{a}}{h} = 1$$

mentre

$$\lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(a + ih) - f(a)}{ih} = \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{(\bar{a} - ih) - \bar{a}}{ih} = -1.$$

Esattamente come per funzioni di variabili reali si dimostrano i seguenti risultati elementari:

PROPOSIZIONE 2.1.2: Siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni con derivata complessa nel punto $a \in A$. Allora

- (i) $f + g$ ha derivata complessa in a e $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
- (ii) fg ha derivata complessa in a e si ha $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (regola di Leibnitz).

PROPOSIZIONE 2.1.3: Sia $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione con ha derivata complessa nel punto $a \in A$. Se $f(a) \neq 0$ allora la funzione $1/f$ è definita in un intorno aperto di a ed ha ha derivata complessa in a con

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{[f(a)]^2}.$$

Per quanto riguarda le funzioni composte, vale l'usuale regola di derivazione:

PROPOSIZIONE 2.1.4: Siano $f: A \rightarrow B \subset \mathbb{C}$ e $g: B \rightarrow \mathbb{C}$ tali che f ha ha derivata complessa nel punto $a \in A$ e g ha ha derivata complessa nel punto $b = f(a) \in B$. Allora la funzione composta $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{C}$ è continua ed è derivabile in a con

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a).$$

Affronteremo più tardi il problema dell'invertibilità delle applicazioni olomorfe. Ci limitiamo a questo punto a una definizione e a un risultato preliminare.

DEFINIZIONE 2.1.2: Siano A, B aperti di \mathbb{C} . Un'applicazione olomorfa $f: A \rightarrow B$ si dice *biomorfa* o un *biomorfismo* se è biettiva e l'inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$ è olomorfa.

PROPOSIZIONE 2.1.5: Sia $f: A \rightarrow B$ un omeomorfismo olomorfo tale che $f' \neq 0$ su A , Allora f è un biomorfismo e se $b = f(a)$ per qualche $a \in A$, allora

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Applicando le regole di derivazione che abbiamo messo insieme, si dimostri per esercizio la seguente

PROPOSIZIONE 2.1.6: Un polinomio $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ è una funzione intera e la sua derivata è data da

$$p'(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}.$$

Se $p(z)$ e $q(z)$ sono due polinomi primi fra loro, la funzione razionale $R(z) = p(z)/q(z)$ è definita e olomorfa sull'insieme $\{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\}$ e la sua derivata $R'(z)$ è ancora una funzione razionale.

Vediamo ora come la nozione di derivabilità in senso complesso è collegata con quella di differenziabilità studiata nei corsi di Analisi Reale. Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione. Ricordiamo che f è differenziabile (in senso reale) in $a \in A$ se esiste un'applicazione \mathbb{R} -lineare $L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, detta *differenziale* di f in a , tale che, in un intorno aperto di a , si abbia

$$f(z) = f(a) + L(z - a) + o(|z - a|) \quad (2.1.1)$$

dove con o si intende che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(|t|)}{t} = 0.$$

Se f è differenziabile in a allora esistono le derivate parziali $f_x(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ e $f_y(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$ di f in a e $L = f_x(a)dx + f_y(a)dy$ e si scrive $L = df(a)$. Se $z = x + iy$ e $a = u + iv$, allora (2.1.1) si può riscrivere nel modo seguente:

$$f(z) = f(a) + f_x(a)(x - u) + f_y(a)(y - v) + o(|z - a|) \quad (2.1.2)$$

È un fatto valido in generale che un'applicazione \mathbb{R} -lineare fra spazi vettoriali complessi si possa scrivere (in modo unico) come somma di un'applicazione \mathbb{C} -lineare più un'applicazione \mathbb{C} -antilineare. Ci limitiamo a dimostrare questo fatto nel caso particolare che ci interessa. Si considerino il differenziale dz della funzione identità e il differenziale $d\bar{z}$ della funzione coniugio. Dato che l'identità e il coniugio sono \mathbb{R} -lineari, allora dz e $d\bar{z}$ coincidono rispettivamente con l'identità e il coniugio. Dunque $dz: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è \mathbb{C} -lineare mentre $d\bar{z}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è \mathbb{C} -antilineare. D'altro canto

$$dz = dx + idy \quad \text{e} \quad d\bar{z} = dx - idy.$$

Dunque per una funzione differenziabile L in a , abbiamo la seguente decomposizione per il differenziale:

$$\begin{aligned} df(a) &= f_x(a)dx + f_y(a)dy = f_x(a) \left(\frac{dz + d\bar{z}}{2} \right) + f_y(a) \left(\frac{dz - d\bar{z}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2} (f_x(a) - if_y(a)) dz + \frac{1}{2} (f_x(a) + if_y(a)) d\bar{z} = f_z(a)dz + f_{\bar{z}}(a)d\bar{z} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

dove si è posto

$$f_z(a) = \frac{1}{2} (f_x(a) - if_y(a)) \quad \text{e} \quad f_{\bar{z}}(a) = \frac{1}{2} (f_x(a) + if_y(a)).$$

Con queste notazioni (2.1.2) si scrive

$$f(z) = f(a) + f_z(a)(z - a) + f_{\bar{z}}(a)(\bar{z} - \bar{a}) + o(|z - a|). \quad (2.1.4)$$

TEOREMA 2.1.7: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Per una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) f ha derivata complessa in a ;

- (ii) f è differenziabile in a e $f_{\bar{z}}(a) = 0$;
 (iii) f è differenziabile in a e $df(a)$ è \mathbb{C} -lineare.

Se vale una qualunque fra (i), (ii) e (iii), allora $f'(a) = f_z(a) = f_x(a) = -if_y(a)$,

Dimostrazione: Dall'espressione (2.1.3) segue immediatamente che (ii) e (iii) sono equivalenti. Supponiamo che valga (i). Allora, in un intorno aperto U di a , la funzione definita da

$$\Delta(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{se } z \neq a \\ f'(a) & \text{se } z = a \end{cases}$$

è una funzione continua e su U si ha

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + (\Delta(z) - f'(a))(z-a) \quad (2.1.5)$$

da cui segue che f è differenziabile in a . Confrontando (2.1.5) e (2.1.4) si ha il resto di (ii).

Supponiamo invece che valga (ii). Allora in un intorno di a si ha

$$f(z) = f(a) + f_z(a)(z-a) + o(|z-a|)$$

e quindi immediatamente si ottiene $f'(a) = f_z(a)$.

Per completare la dimostrazione basta osservare che se ad esempio vale (i), si ha

$$f_x(a) = \lim_{\mathbb{R} \ni h} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

e

$$-if_y(a) = -i \lim_{\mathbb{R} \ni h} \frac{f(a+ih) - f(a)}{h} = \lim_{\mathbb{R} \ni h} \frac{f(a+ih) - f(a)}{ih} = f'(a).$$

□

L'equazione differenziale

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y) = 0 \quad (2.1.6)$$

si dice equazione di Cauchy-Riemann e viene soddisfatta dalle funzioni olomorfe su un aperto. Per le funzioni di classe C^1 , dal Teorema 2.1.7 abbiamo immediatamente:

COROLLARIO 2.1.8: Una funzione f di classe C^1 su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann (2.1.6).

Vedremo in seguito che una funzione olomorfa è sempre di classe C^∞ . Dunque le funzioni olomorfe sono esattamente quelle che soddisfano l'equazione di Cauchy-Riemann.

COROLLARIO 2.1.9: Sia f una funzione olomorfa su un aperto connesso A . Se $f'(z) = 0$ per ogni $z \in A$, allora f è una funzione costante.

Dimostrazione: Se f è una funzione olomorfa su un aperto connesso A con $f'(z) = 0$ per ogni $z \in A$, allora f è differenziabile con differenziale nullo su tutto l'aperto connesso A . Segue che f è costante. □

Gli operatori differenziali

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

(a volte chiamati *derivate di Wirtinger*), pur non essendo derivate parziali, hanno regole di calcolo analoghe a quelle delle derivate usuali. Raccogliamo qui di seguito una collezione di proprietà lasciando le semplici dimostrazioni per esercizio.

PROPOSIZIONE 2.1.10: *Si hanno le seguenti*

- (i) $\frac{\partial}{\partial z}$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sono operatori \mathbb{C} -lineari sullo spazio vettoriale delle funzioni di classe C^1 e soddisfano la regola di Leibnitz per il prodotto;
- (ii) $\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}}$ e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}}$ per una funzione f di classe C^1 ;
- (iii) se f è una funzione di classe C^1 reale, allora $\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}$;
- (iv) $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$ per una funzione f di classe C^2 ;
- (v) $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$ e $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$ per funzioni f, g di classe C^1 ;
- (vi) $\frac{d(f \circ \varphi)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{\varphi}}{dt}$ per funzioni f, φ di classe C^1 , con φ funzione di una variabile reale.

Concludiamo il paragrafo illustrando una proprietà geometrica fondamentale delle funzioni olomorfe. Siano $\gamma_1: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ e $\gamma_2: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ due curve regolari (ossia di classe C^1 con $\gamma_1'(t) \neq 0$ e $\gamma_2'(t) \neq 0$ per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$) che si incontrano nel punto $c = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. L'angolo orientato $\angle(\gamma_1, \gamma_2)$ fra le curve γ_1 e γ_2 è allora l'angolo orientato fra i vettori tangenti $\gamma_1'(0)$ e $\gamma_2'(0)$. Dunque si ha

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \arg \left(\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} \right).$$

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ un'applicazione olomorfa su un aperto A che contiene le immagini delle curve γ_1 e γ_2 tale che $f'(c) \neq 0$. Si osservi che dato che f è olomorfa quest'ultima condizione equivale a richiedere che $df(c)$ è non singolare. Assumiamo inoltre che f sia di classe C^1 (come annunciato, vedremo presto che questa è una ipotesi superflua!). Dunque, a meno di scegliere $\epsilon > 0$ un po' più piccolo, le curve $f \circ \gamma_1: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ e $f \circ \gamma_2: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ sono curve regolari che si incontrano nel punto $f(c)$. Dato che f è olomorfa si ha

$$(f \circ \gamma_1)'(0) = f_z(\gamma_1(0))\gamma_1'(0) + f_{\bar{z}}(\gamma_1(0))\overline{\gamma_1'(0)} = f_z(c)\gamma_1'(0)$$

e

$$(f \circ \gamma_2)'(0) = f_z(\gamma_2(0))\gamma_2'(0) + f_{\bar{z}}(\gamma_2(0))\overline{\gamma_2'(0)} = f_z(c)\gamma_2'(0).$$

Dunque

$$\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \arg \left(\frac{(f \circ \gamma_2)'(0)}{(f \circ \gamma_1)'(0)} \right) = \arg \left(\frac{f_z(c)\gamma_2'(0)}{f_z(c)\gamma_1'(0)} \right) = \arg \left(\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} \right) = \angle(\gamma_1, \gamma_2)$$

ossia f conserva l'angolo orientato fra le curve passanti per c (vedi Fig. 2.1).

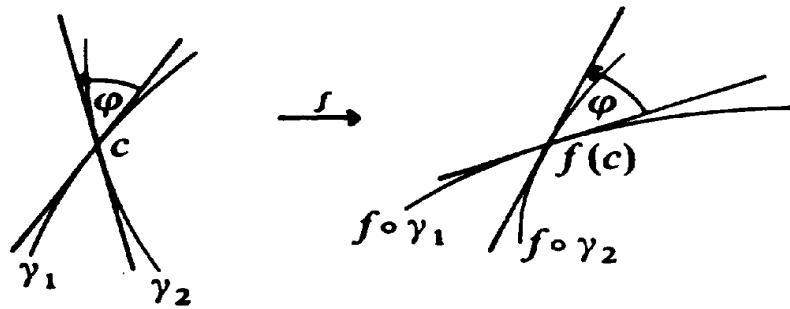


Fig. 2.1

Viceversa supponiamo che $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ sia un'applicazione di classe C^1 con df non singolare su A . Supponiamo che f conservi l'angolo orientato fra curve passanti per ogni punto $a \in A$. Fissato $a \in A$, denotiamo con $\alpha_\theta: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow A$ la curva definita da

$$\alpha_\theta(t) = a + te^{i\theta}$$

dove si suppone che $\epsilon > 0$ sia piccolo abbastanza affinché $\alpha_\theta(t) \in A$. Allora

$$\theta = \angle(\alpha_0, \alpha_\theta) = \angle(f \circ \alpha_0, f \circ \alpha_\theta) = \arg \left(\frac{(f \circ \alpha_\theta)'(0)}{(f \circ \alpha_0)'(0)} \right).$$

Si osservi che $(f \circ \alpha_0)'(0) = df(\alpha_0'(0)) \neq 0$ dato che abbiamo assunto che $df \neq 0$ su A . Dunque

$$\arg e^{i\theta} = \arg \left(\frac{f_z(a)\alpha_\theta'(0) + f_{\bar{z}}(a)\overline{\alpha_\theta'(0)}}{f_z(a)\alpha_0'(0) + f_{\bar{z}}(a)\overline{\alpha_0'(0)}} \right) = \arg \left(\frac{f_z(a)e^{i\theta} + f_{\bar{z}}(a)e^{-i\theta}}{f_z(a) + f_{\bar{z}}(a)} \right)$$

e quindi, dato che l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti,

$$0 = \arg \left(\frac{f_z(a) + f_{\bar{z}}(a)e^{-2i\theta}}{f_z(a) + f_{\bar{z}}(a)} \right).$$

Segue allora che

$$\arg (f_z(a) + f_{\bar{z}}(a)e^{-2i\theta})$$

è indipendente da θ e questo è possibile solo se $f_{\bar{z}}(a) = 0$. Dato che $a \in A$ era arbitrario, segue allora che f è olomorfa in A . Si osservi che da $df \neq 0$ su A segue che necessariamente si ha anche $f' = f_z \neq 0$ su A .

Riassumiamo quello che abbiamo dimostrato:

TEOREMA 2.1.11: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una applicazione di classe C^1 con df non singolare su A . Allora f è olomorfa se e solo se conserva l'angolo orientato fra curve passanti per ogni punto $a \in A$. In questo caso si ha anche che $f' \neq 0$ su A .*

Per un'applicazione la proprietà di conservare gli angoli viene detta *conformalità*. A causa della proposizione 2.1.11 le applicazioni biolomorfe vengono alle volte dette *applicazioni conformi*.

Esercizi.

1. Sia f una funzione di classe C^1 su un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Se $f = u + iv$ allora f soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann $f_{\bar{z}} = 0$ se e solo se la parte reale e la parte immaginaria di f soddisfano il sistema di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases} \quad (2.1.7)$$

2. Se due funzioni u, v di classe C^2 su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ soddisfano (2.1.7), allora sono funzioni armoniche ossia $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ e $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$.

3. Se f è una funzione olomorfa su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ e $f = u + iv$ dove u e v sono la parte reale e la parte immaginaria di f , utilizzando le espressioni in coordinate polari $u(x, y) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ e $v(x, y) = v(r \cos \theta, r \sin \theta)$, dimostrare che le equazioni di Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ sono equivalenti alle seguenti in coordinate polari:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

4. Siano $f: A \rightarrow B$ una funzione olomorfa (di classe C^2) con $f' \neq 0$ e u di classe C^2 su B . Allora $\Delta(u \circ f) = \Delta(u) \circ f |f'|^2$ e quindi, in particolare, $u \circ f$ è armonica se e solo se u è armonica.

5. Sia f una funzione olomorfa su un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Se $f = u + iv$, con u, v funzioni a valori reali, e $z = x + iy$, dimostrare

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = |f'(z)|^2. \quad (2.1.8)$$

6. Dimostrare la Proposizione 2.1.10.

7. Sia f una funzione olomorfa su un aperto connesso $A \subset \mathbb{C}$ con $f(A) \subset \mathbb{R}$. Dimostrare che f è costante.

8. Siano $A, B \subset \mathbb{C}$ aperti e $f: A \rightarrow B$ una funzione olomorfa con $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in A$. Dimostrare che f è un omeomorfismo locale.

9. Sia $p(x, y)$ un polinomio nelle due variabili reali x, y . Dimostrare che p è un polinomio nella variabile complessa $z = x + iy$ se e solo se p è una funzione olomorfa su \mathbb{C} .

2.2. Convergenza uniforme e serie di potenze.

Fino a questo punto gli unici esempi di funzioni olomorfe di cui disponiamo sono i polinomi, e dove sono definite, le funzioni razionali. In questo paragrafo vogliamo allargare il "parco" degli esempi a nostra disposizione.

Richiamiamo, per cominciare, alcuni fatti sulla convergenza di successioni di funzioni. Sia $A \subset \mathbb{C}$ e sia $\{f_n\} = \{f_n: A \rightarrow \mathbb{C}\}$ una successione di funzioni. Si dice che $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste N tale che se $n \geq N$ allora per ogni $z \in A$ si ha

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Ovviamente una successione $\{f_n\} = \{f_n: A \rightarrow \mathbb{C}\}$ di funzioni uniformemente convergente a $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ converge puntualmente a f ossia la successione $f_n(a)$ converge a $f(a)$ per ogni $a \in A$. La caratteristica che rende particolarmente utile convergenza uniforme è che conserva la continuità. Vale infatti il seguente risultato che diamo per conosciuto:

PROPOSIZIONE 2.2.1: *Sia $\{f_n\} = \{f_n: A \rightarrow \mathbb{C}\}$ una successione di funzioni continue uniformemente convergente a $f: A \rightarrow \mathbb{C}$. Allora f è continua.*

È inoltre utile ricordare il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme di successioni di funzioni:

PROPOSIZIONE 2.2.2: *Sia $\{f_n\} = \{f_n: A \rightarrow \mathbb{C}\}$ una successione di funzioni. Esiste una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\{f_n\}$ converge uniformemente a f se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste N tale che se $n, m > N$, per ogni $z \in A$, si ha*

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon.$$

Veniamo ora alla nozione di convergenza appropriata per studiare le funzioni olomorfe. Si dice che la successione di funzioni $\{f_n\} = \{f_n: A \rightarrow \mathbb{C}\}$ converge uniformemente sui compatti a f se converge uniformemente a f su ogni sottoinsieme compatto di A .

Abbiamo il seguente

TEOREMA 2.2.3: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $\{f_n\} = \{f_n: A \rightarrow \mathbb{C}\}$ una successione di funzioni.*

- (i) $\{f_n\}$ converge uniformemente sui compatti di A a $f \iff$ per ogni $a \in A$ esiste $r_a > 0$ tale che $\{f_n\}$ converge uniformemente a f su $\mathbb{D}(a, r_a) \subset A \iff$ per ogni $a \in A$ esiste un aperto U_a contenente a di tale che $\{f_n\}$ converge uniformemente a f su U_a (" $\{f_n\}$ converge localmente uniformemente a f ");
- (ii) se $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ è continua per ogni n e $\{f_n\}$ converge uniformemente sui compatti di A a $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ allora f è continua.

Dimostrazione: (i) La seconda equivalenza è immediata. Per quanto riguarda la prima, la parte (\implies) è ovvia. Dimostriamo (\impliedby). Sia $K \subset A$ un compatto. Allora se $a \in K$, sia $r_a > 0$ come nell'ipotesi. Allora

$$K \subset \bigcup_{a \in K} \mathbb{D}(a, r_a)$$

e quindi, dato che K è compatto esistono $a_1, \dots, a_n \in K$ tali che

$$K \subset \mathbb{D}(a_1, r_{a_1}) \cup \dots \cup \mathbb{D}(a_n, r_{a_n}) \subset \overline{\mathbb{D}(a_1, r_{a_1})} \cup \dots \cup \overline{\mathbb{D}(a_n, r_{a_n})}.$$

Sia $\epsilon > 0$. Dato che $\{f_n\}$ converge uniformemente a f su $\overline{\mathbb{D}(a_j, r_{a_j})}$ per ogni $j = 1, \dots, n$, esistono N_1, \dots, N_n tali che se $n > N_j$, allora $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ per ogni $z \in \overline{\mathbb{D}(a_j, r_{a_j})}$. Sia $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$, se $n > N$ allora $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ per ogni $z \in K$ e la tesi è dimostrata.

(ii) Dato che una funzione è continua se e solo se è continua in un intorno di ogni punto, la tesi è immediata dalla parte (i) e dalla Proposizione 2.2.1. \square

Consideriamo ora una serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ di funzioni f_k definite su un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Per definizione la serie converge uniformemente (sui compatti) a f se la successione $\sum_{k=0}^n f_k$ delle somme parziali converge uniformemente (sui compatti) a f . Ricordiamo anche il criterio di Cauchy per le serie: la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente su $B \subset A$ se e solo se se per ogni $\epsilon > 0$ esiste N tale che, se $n \geq m \geq N$, allora per ogni $z \in B$ si ha

$$\left| \sum_{k=m}^n f_k(z) \right| < \epsilon.$$

Si dice inoltre che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge assolutamente se converge la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|$.

Il seguente importante risultato (noto come il *criterio della serie maggiorante*) segue facilmente dal criterio di Cauchy:

TEOREMA 2.2.4: Sia $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ una serie di funzioni $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ e sia $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ una serie convergente di numeri reali non negativi. Se per ogni $z \in A$ e $k \geq 0$ si ha $|f_k(z)| \leq M_k$, allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge assolutamente e uniformemente in A .

Dimostrazione: Sia $\epsilon > 0$. Dato che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ converge, esiste N tale che, se $n \geq m \geq N$, allora $\sum_{k=m}^n M_k < \epsilon$. Dunque, per ogni $z \in A$

$$\left| \sum_{k=m}^n f_k(z) \right| \leq \sum_{k=m}^n |f_k(z)| \leq \sum_{k=m}^n M_k < \epsilon$$

e quindi $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente e assolutamente in A . \square

Una serie di potenze centrata in z_0 è una serie della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{2.2.1}$$

dove i coefficienti a_k sono numeri complessi. Per cominciare vogliamo caratterizzare la regione di convergenza di una serie di potenze (2.2.1). Per avere un'idea del comportamento generale esaminiamo brevemente un importante (e elementare) esempio, la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

La sua successione delle somme parziali è data da

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Dunque per $|z| < 1$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} = 0$ e quindi la serie converge e si può calcolare la somma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z} \quad \text{per } |z| < 1.$$

Nel disco $\mathbb{D}(0, 1)$, dato che la successione z^k converge uniformemente sui compatti alla funzione nulla, la successione delle somme parziali, e dunque la serie, converge uniformemente sui compatti alla funzione olomorfa $f(z) = (1 - z)^{-1}$. Se $|z| \geq 1$ la successione z^k non converge a zero e quindi la successione delle somme parziali della serie geometrica non converge. Riassumendo la serie geometrica converge esattamente nel disco $\mathbb{D}(0, 1)$ e la sua somma (ossia il limite delle somme parziali) è una funzione olomorfa. La situazione generale è simile a quella descritta nell'esempio. Il primo passo del nostro studio è il seguente

LEMMA 2.2.5: (di Abel) *Sia $\{a_k\}$ una successione di numeri complessi e siano $r, M > 0$ numeri reali positivi tali che per ogni k si abbia*

$$|a_k| r^k \leq M.$$

Allora la serie di potenze (2.2.1) converge assolutamente e uniformemente su ogni compatto contenuto in $\mathbb{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$. In particolare se la serie (2.2.1) converge in $w \neq z_0$ e $r_w = |w - z_0|$, allora converge assolutamente e uniformemente su ogni compatto contenuto in $\mathbb{D}(z_0, r_w) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r_w\}$.

Dimostrazione: Sia $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$. Allora per qualche ρ si ha $|z - z_0| < \rho < r$ e quindi per ogni intero positivo k risulta

$$|a_k(z - z_0)^k| \leq |a_k| \rho^k = |a_k| r^k \left(\frac{\rho}{r}\right)^k \leq M \left(\frac{\rho}{r}\right)^k$$

e quindi, per il criterio della serie maggiorante, la serie di potenze (2.2.1) converge assolutamente e uniformemente su ogni compatto contenuto in $\mathbb{D}(z_0, r)$.

La parte conclusiva dell'enunciato è immediata. Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(w - z_0)^k$ è convergente, allora la successione $a_k(w - z_0)^k$ converge a zero e quindi è necessariamente limitata. \square

Il raggio di convergenza di una serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \tag{2.2.2}$$

è definito da

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid |a_k|r^k \text{ è una successione limitata}\}.$$

Questa definizione è giustificata dal seguente evidente risultato:

PROPOSIZIONE 2.2.6: *Sia R il raggio di convergenza della serie di potenze (2.2.2). Allora la serie converge assolutamente e uniformemente sui compatti contenuti in $\mathbb{D}(z_0, R)$ e diverge su $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(z_0, R)$.*

Dimostrazione: Se $R = 0$ la conclusione è immediata dato che la serie (2.2.2) converge sempre in z_0 e non convergerà per alcun $w \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ perchè la successione $a_k(w - z_0)^k$ non è limitata e quindi non tenderà a 0. Supponiamo che $R > 0$. Allora per ogni compatto $K \subset \mathbb{D}(z_0, R)$ esiste r tale che $K \subset \mathbb{D}(z_0, r) \subset \mathbb{D}(z_0, R)$ e quindi dal Lemma di Abel segue che la serie converge uniformemente su K . D'altra parte se $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}(z_0, R)}$ allora $a_k(w - z_0)^k$ non è limitata e quindi la serie non può convergere in w . \square

Occorre naturalmente dare un metodo di calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze. La *formula di Cauchy-Hadamard* per il raggio di convergenza è data nella seguente:

PROPOSIZIONE 2.2.7: *Il raggio di convergenza della serie di potenze (2.2.2) è $R = 0$ se $\limsup_{k \rightarrow \infty} (|a_k|)^{1/k} = +\infty$, è $R = \infty$ se $\limsup_{k \rightarrow \infty} (|a_k|)^{1/k} = 0$ e*

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} (|a_k|)^{1/k}}$$

altrimenti.

Dimostrazione: Sia R il raggio di convergenza di (2.2.2) e sia

$$L = \begin{cases} +\infty & \text{se } \limsup_{k \rightarrow \infty} (|a_k|)^{1/k} = 0 \\ \frac{1}{l} & \text{se } \limsup_{k \rightarrow \infty} (|a_k|)^{1/k} = l \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{se } \limsup_{k \rightarrow \infty} (|a_k|)^{1/k} = +\infty. \end{cases}$$

Supponiamo che $0 < L < +\infty$. Cominciamo dimostrando che $L \leq R$. Sia $r \in (0, L)$. Allora

$$\frac{1}{r} > \limsup_{k \rightarrow \infty} (|a_k|)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq k} (|a_n|)^{1/n} \right)$$

e quindi esiste un N tale che se $k \geq N$, allora $\frac{1}{r} > (|a_k|)^{1/k}$ e di conseguenza $|a_k|r^k < 1$. Dunque la successione $|a_k|r^k$ è limitata e quindi si deve avere $r \leq R$. Dato che $r \in (0, L)$ è arbitrario, segue che $L \leq R$. Sia ora $s \in (L, +\infty)$. Allora

$$\frac{1}{s} < \limsup_{k \rightarrow \infty} (|a_k|)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq k} (|a_n|)^{1/n} \right)$$

e quindi per infiniti k si ha $\frac{1}{s} < |a_k|^{1/k}$ ossia $|a_k|s^k > 1$ e quindi la successione $|a_k|s^k$ non tende a zero e pertanto $s \geq R$. Per l'arbitrarietà di $s \in (L, +\infty)$, segue che $L \geq R$. In conclusione deve essere $L = R$ come desiderato. I casi $L = 0$ e $L = +\infty$ si trattano allo stesso modo e sono lasciati per esercizio. \square

In molti casi per calcolare il raggio di convergenza di una serie è più semplice ricorrere alla seguente osservazione:

PROPOSIZIONE 2.2.8: *Se esiste*

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

allora R è il raggio di convergenza di $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$.

Dimostrazione: Supponiamo che $0 < R < +\infty$. Se $0 \leq r < R$, allora esiste N tale che $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} > r$ se $n \geq N$. Segue allora che $|a_n| r^n < M = |a_N| r^N$ per $n > N$ (perché?). Dunque la successione $|a_n| r^n$ è limitata e quindi, applicando di nuovo il Lemma di Abel, possiamo concludere che r è minore o uguale del raggio di convergenza della serie. Per l'arbitrarietà di $r \in (0, R)$, si ha allora che R è minore o uguale del raggio di convergenza della serie. Sia invece $s > R$. Allora, per qualche N' , si ha $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} < s$ se $n \geq N'$. Dunque $|a_n| s^n > M' = |a_{N'}| s^{N'}$ per $n > N'$ (perché?). La successione $|a_n| s^n$ pertanto non converge a zero e quindi, come in precedenza segue che s è maggiore o uguale del raggio di convergenza della serie. Per l'arbitrarietà di $s > R$, segue allora che R è maggiore o uguale del raggio di convergenza della serie. In conclusione abbiamo dimostrato la tesi per $0 < R < +\infty$. I casi $R = 0$ e $R = +\infty$ sono lasciati per esercizio al lettore. \square

Possiamo finalmente dimostrare che all'interno del disco dove converge uniformemente sui compatti, una serie di potenze definisce una funzione olomorfa. Precisamente abbiamo:

TEOREMA 2.2.9: *Se R è il raggio di convergenza della serie di potenze*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (2.2.3)$$

sul disco $\mathbb{D}(z_0, R)$ la somma $S(z)$ della serie (2.2.3) definisce una funzione olomorfa che ha per derivata la serie

$$S_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} \quad (2.2.4)$$

che ha anch'essa raggio di convergenza R .

Dimostrazione: Per cominciare si osservi che

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (|a_k|)^{\frac{1}{k}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} (|k a_k|)^{\frac{1}{(k-1)}},$$

e quindi la serie (2.2.4) ha lo stesso raggio di convergenza R di (2.2.3). Per dimostrare questo fatto, dato che $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{\frac{1}{k-1}} = 1$, per l'esercizio 2 alla fine del paragrafo, basta mostrare che $\limsup_{k \rightarrow \infty} (|a_k|)^{\frac{1}{k}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} (|a_k|)^{\frac{1}{(k-1)}}$. Questo equivale a provare che, se R' è il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (z - z_0)^n, \quad (2.2.5)$$

allora $R' = R$, ossia che i raggi di convergenza delle serie (2.2.3) e (2.2.5) coincidono. Dato che

$$a_0 + (z - z_0) \sum_{n=1}^N a_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^N a_n (z - z_0)^n,$$

se $|z - z_0| < R'$, allora

$$\sum_{n=0}^N |a_n (z - z_0)^n| \leq |a_0| + |z - z_0| \sum_{n=1}^N |a_n (z - z_0)^{n-1}|$$

e quindi (2.2.3) converge assolutamente in z . Possiamo allora concludere che $R' \leq R$. D'altra parte, se $0 < |z - z_0| < R$, allora (2.2.3) converge assolutamente e

$$\sum_{n=0}^N |a_{n+1} (z - z_0)^n| \leq |z - z_0|^{-1} \left(\sum_{k=1}^N |a_k (z - z_0)^k| + |a_0| \right).$$

Dunque (2.2.5) converge assolutamente in z e, conseguentemente, $R' \geq R$.

Per completare la dimostrazione basterà dimostrare che se $w \in \mathbb{D}(z_0, R)$ la somma di (2.2.3) ha derivata complessa $S'(w) = S_1(w)$ in w . Sia dunque $S(z)$ la somma di (2.2.3) e denotiamo

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k, \quad R_n(z) = S(z) - s_n(z), \quad t_n(z) = \sum_{k=1}^n k a_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Sia $|w - z_0| < \rho < R$ e sia fissato $\epsilon > 0$ arbitrario. Allora per $z \neq w$ con $|z - z_0| < \rho < R$

$$\frac{S(z) - S(w)}{z - w} - S_1(w) = \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - t_n(w) + t_n(w) - S_1(w) + \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} &= \frac{1}{(z - z_0) - (w - z_0)} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k ((z - z_0)^k - (w - z_0)^k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k ((z - z_0)^{k-1} + (z - z_0)^{k-2} (w - z_0) + \dots + (w - z_0)^{k-1}) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| (|z - z_0|^{k-1} + |z - z_0|^{k-2} |w - z_0| + \dots + |w - z_0|^{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k |a_k| \rho^{k-1}. \end{aligned}$$

Dato che l'ultimo termine della disequaglianza è il resto di una serie numerica convergente, esiste N_1 tale che, se $n > N_1$,

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Esiste anche N_2 tale che, se $n > N_2$,

$$|t_n(w) - S_1(w)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Sia $n > \max\{N_1, N_2\}$, dato che $s_n(z)$ è un polinomio con derivata $t_n(z)$, esiste $\delta > 0$ tale che, per $0 < |z - w| < \delta$

$$\left| \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - t_n(w) \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dunque per $0 < |z - w| < \delta$, scegliendo $n > \max\{N_1, N_2\}$, possiamo concludere:

$$\begin{aligned} \left| \frac{S(z) - S(w)}{z - w} - S_1(w) \right| &\leq \left| \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - t_n(w) \right| + |t_n(z) - S_1(z)| \\ &\quad + \left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

e quindi la tesi segue. □

Dunque le serie di potenze convergenti sono esempi di funzioni olomorfe. Più in generale diamo la seguente

DEFINIZIONE 2.2.1: Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *analitica* se per ogni $a \in A$ esiste $r > 0$ tale che su $\mathbb{D}(a, r)$ la f è uguale alla somma di una serie di potenze centrata in a che converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{D}(a, r)$.

COROLLARIO 2.2.10: Sia $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora f e tutte le sue derivate sono funzioni olomorfe su A .

Dimostrazione: Immediata dal Teorema 2.2.9. □

Dimostremo più avanti che ogni funzione olomorfa è analitica.

Esempi. La serie

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{2.2.6}$$

ha raggio di convergenza $R = +\infty$ e quindi definisce una funzione intera, la *funzione esponenziale* che estende a \mathbb{C} la funzione esponenziale reale. Dal Teorema 2.2.7 si ha immediatamente la regola di derivazione

$$(e^z)' = e^z.$$

Per ogni w , se $f(z) = e^{-z}e^{z+w}$, segue allora che $f'(z) = 0$ su \mathbb{C} e quindi che $f(z) = \text{cost} = f(0) = e^w$. Dunque anche per l'esponenziale complesso vale la consueta formula di addizione:

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

Le serie

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{e} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2.2.7)$$

hanno raggio di convergenza $R = +\infty$ e quindi definiscono funzioni intere, le funzioni coseno e seno che estendono le funzioni trigonometriche reali. Sommando termine a termine le serie (2.2.7) (possibile grazie alla convergenza uniforme), ricordando la definizione (2.2.6) e usando $i^2 = -1$ otteniamo la *formula di Eulero*:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (2.2.8)$$

Dalla definizione (2.2.7) si ha immediatamente che

$$\cos(-z) = \cos z \quad \text{e} \quad \sin(-z) = -\sin z$$

e quindi

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \quad (2.2.9)$$

Da (2.2.8) e (2.2.9) seguono immediatamente le identità

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{e} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (2.2.10)$$

Derivando si trova, come per le funzioni trigonometriche reali,

$$(\cos z)' = -\sin z \quad \text{e} \quad (\sin z)' = \cos z.$$

Se $g(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$, allora $g(0) = 1$ e $g'(z) = -2 \cos z \sin z + 2 \sin z \cos z = 0$ e quindi si ha l'identità trigonometrica fondamentale

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1. \quad (2.2.11)$$

Sempre da (2.2.10) e dalla formula di addizione per l'esponenziale, si ottengono, con un calcolo immediato, le regole di addizione per le funzioni trigonometriche complesse:

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w \quad \text{e} \quad \sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$$

Per $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ e quindi

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \quad \text{e} \quad \operatorname{arg} e^z = \operatorname{Im} z.$$

L'esponenziale complesso è una funzione periodica con periodo un multiplo intero di $2\pi i$ ossia

$$e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_2 = z_1 + 2k\pi i \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z}.$$

Infatti, dato che $e^{2\pi i} = 1$, allora se $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{z_1+2k\pi i} = e^{z_1} (e^{2\pi i})^k = e^{z_1}.$$

D'altro canto se $e^{z_1} = e^{z_2}$ e $z_2 - z_1 = z = x + iy$, allora

$$1 = e^{z_2-z_1} = e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Dunque, confrontando parte reale e parte immaginaria, si ottiene $x = 0$ e $y = 2k\pi$ e quindi $z_2 = z_1 + 2k\pi i$.

Utilizzando (2.2.10) possiamo ricavare ulteriori semplici proprietà delle funzioni trigonometriche complesse. Da (2.2.10) segue ad esempio

$$\sin z = 0 \iff e^{2iz} = 1 \iff z = k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Dunque la funzione $\sin z$ si annulla solo sull'asse reale. Simile è il comportamento della funzione $\cos z$ come si può dimostrare a partire dalla seguente relazione:

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \sin z \cos \frac{\pi}{2} + \cos z \sin \frac{\pi}{2} = \cos z.$$

Per quanto riguarda la periodicità, dato che la funzione esponenziale è periodica di periodo un multiplo intero di $2\pi i$, dalle formule di Eulero (2.2.10) segue che le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ sono periodiche di periodo un multiplo intero di 2π . Non ci possono essere altri periodi. Per esempio se $w \in \mathbb{C}$ è un altro periodo per $\sin z$, allora deve essere $\sin w = \sin 0$ e quindi $w = m\pi$ per qualche $m \in \mathbb{Z}$. D'altra parte m deve essere pari dato che la funzione reale $\sin x$ è periodica di periodo un multiplo intero di 2π . Si usa un analogo ragionamento per la funzione coseno.

Concludiamo osservando che, mentre le funzioni trigonometriche sono limitate su \mathbb{R} , le loro estensioni su \mathbb{C} sono illimitate. Infatti per $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\cos(it) = \frac{e^{-t} + e^t}{2} = \cosh t$$

e

$$\sin(it) = \frac{e^{-t} - e^t}{2i} = i \sinh t.$$

Esercizi.

1. Dimostrare che la successione di funzioni $f_n(z) = z^n$ non converge uniformemente in $\mathbb{D}(0, 1)$ ma converge uniformemente sui compatti contenuti in $\mathbb{D}(0, 1)$.

2. Siano b_n, c_n due successioni di numeri reali non negativi. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ e $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = c$, dimostrare che $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = bc$.

Suggerimento:

Per ogni $\epsilon > 0$ esiste N tale che se $k > N$ si ha $(b - \epsilon)c_k \leq b_k c_k \leq (b + \epsilon)c_k$. Dunque

$$(b - \epsilon) \sup_{k \geq n > N} c_k \leq \sup_{k \geq n > N} b_k c_k \leq (b + \epsilon) \sup_{k \geq n > N} c_k \dots$$

3. Completare le dimostrazioni della Proposizione 2.2.7 e della Proposizione 2.2.8.

4. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n \geq 0} z^{2^n}$.

(a) Si dimostri che ha raggio di convergenza $R = 1$

(b) Se $f(z) = \sum_{n \geq 0} z^{2^n}$ è la somma della serie, si dimostri che $\lim_{\tau \rightarrow 1^-} f(\tau) = +\infty$

Consiglio: se $\tau \in (2^{-\frac{1}{2^N}}, 1)$ si ha $f(\tau) > \sum_0^N \tau^{2^n} > (N + 1)\tau^{2^N} > \frac{N+1}{2}$ e quindi....

(c) Se $|z| < 1$, si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $f(z^{2^n}) = f(z) - (z + z^2 + \dots + z^{2^n-1})$ e quindi che $|f(z^{2^n})| \leq |f(z)| + n$

(d) Dimostrare che $\lim_{t \rightarrow 1^-} |f(t\zeta)| = +\infty$ per ogni radice 2^n -esima dell'unità ζ (ossia se $\zeta^{2^n} = 1$). *Suggerimento: da (c) segue che $|f(t\zeta)| \geq f(t^{2^n}) - n \dots$*

(e) Concludere che per ogni z_0 con $|z_0| = 1$ non può esistere una funzione olomorfa \hat{f} definita su un intorno aperto di U di z_0 tale che $\hat{f}_{U \cap \mathbb{D}(0,1)} = f_{U \cap \mathbb{D}(0,1)}$. *Suggerimento: ricordare che l'unione H di tutti i sottogruppi delle radici 2^n -esime dell'unità è densa in S^1 (esercizio 17 paragrafo 1.2)*

5. Si trovi il raggio di convergenza della serie $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ e se ne calcoli la somma nel disco di convergenza se si è posto $a_n = \begin{cases} 2^n & \text{per } n \text{ pari} \\ 3^n & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$

6. Sviluppare in serie di potenze in 0 le funzioni $f(z) = \frac{1}{1+2z}$, $g(z) = \frac{z^2}{(1-z^2)^3}$ e in serie di potenze in i la funzione $h(z) = \frac{1}{z}$ e calcolare il raggio di convergenza di ciascuna serie.

7. Dimostrare che $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definita da $\exp(z) = e^z$ è un omomorfismo suriettivo dal gruppo additivo \mathbb{C} al gruppo moltiplicativo \mathbb{C}^* . Qual'è il suo nucleo?

8. Trovare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\cos z = 0$. Trovare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\cos z = 5$.

9. Per ogni intero $n \geq 1$ e $z \in \mathbb{C}$, dimostrare la seguente formula:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kz = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})z}{2 \sin \frac{z}{2}}$$

Suggerimento: Dato che $\cos kz = \frac{e^{ikz} + e^{-ikz}}{2}$, si ha

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kz = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikz} = \frac{e^{-inz}}{2} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikz}.$$

Sommando la progressione geometrica e utilizzando $\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \dots$

10. Dimostrare che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k$ converge uniformemente sui compatti contenuti del disco unitario $\mathbb{D}(0,1)$. Se $\lambda(z)$ è la somma della serie per $z \in \mathbb{D}(0,1)$, si dimostri che $\lambda'(z) = \frac{1}{1+z}$ e si concluda che $e^{\lambda(z)} = 1 + z$.

2.4. Topologia della convergenza uniforme sui compatti.

In questo paragrafo descriviamo rapidamente le implicazioni topologiche della nozione di convergenza uniforme sui compatti. Per cominciare riassumiamo in un lemma una serie di osservazioni che per economia dimostrativa è opportuno dimostrare insieme. Alcuni dei risultati sono essenziali per la discussione che faremo in questo paragrafo, altri che saranno importanti successivamente.

LEMMA 2.4.1: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Esiste una successione $\{A_n\}_{n \geq 1}$ di aperti tali che*

- (i) $\overline{A_n}$ è compatto per ogni $n \geq 1$;
- (ii) $\overline{A_n} \subset A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \overline{A_n}$;
- (iv) *ciascun A_n si può costruire in modo che la frontiera di A_n sia lineare a tratti è lineare a tratti infatti costituita da poligoni ottenuti come unione finita di segmenti paralleli o all'asse reale o all'asse immaginario.*

Dimostrazione: Per ogni intero positivo n si definiscano

$$K_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus A) \geq \frac{1}{n} \right\} \cap \overline{\mathbb{D}(0, n)}$$

e

$$U_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus A) > \frac{1}{n} \right\} \cap \mathbb{D}(0, n).$$

Allora per ogni n si ha che U_n è aperto e K_n è compatto perché chiuso e limitato e

$$U_n \subset K_n \subset U_{n+1} \subset K_{n+1}.$$

Inoltre si ha evidentemente che $A = \bigcup_{n \geq 1} U_n = \bigcup_{n \geq 1} K_n$. Per ogni intero positivo n sia

$$d_n = \frac{1}{4} \min_{K_n} \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus U_{n+1})$$

e si definisca per ogni $z \in K_n$

$$Q(z) = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid |\text{Re}(w) - \text{Re}(z)| < \frac{\sqrt{2}d_n}{2} \text{ e } |\text{Im}(w) - \text{Im}(z)| < \frac{\sqrt{2}d_n}{2} \right\}.$$

Allora per ogni $z \in K_n$ si ha $Q(z) \subset \overline{Q(z)} \subset U_{n+1}$ e, evidentemente, $\{Q(z)\}_{z \in K_n}$ è un ricoprimento aperto del compatto K_n . Allora esistono $z_1, \dots, z_N \in K_n$ tali che

$$K_n \subset Q(z_1) \cup \dots \cup Q(z_N) = A_n \subset \overline{A_n} = \overline{Q(z_1)} \cup \dots \cup \overline{Q(z_N)} \subset U_{n+1}.$$

Allora, per costruzione gli aperti A_n hanno tutte le proprietà richieste. In particolare dato che ciascun A_n è unione finita di quadrati, la sua frontiera è lineare a tratti e composta da una unione finita di segmenti paralleli all'asse reale o all'asse immaginario. \square

Siano dunque $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $\{A_n\}$ una successione di aperti contenuti in A con le proprietà (i), (ii), (iii) elencate nel Lemma 2.4.1. Se $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ è l'insieme di tutte le funzioni continue da A in \mathbb{C} e $f, g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$, definiamo

$$\rho_n(f, g) = \sup\{|f(z) - g(z)| \mid z \in \bar{A}_n\} \quad (2.4.1)$$

e

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}. \quad (2.4.2)$$

Si osservi che dato che $\left| \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)} \right| < 1$, la serie che definisce $\rho(f, g)$ è convergente e quindi la (2.4.2) fornisce una buona definizione per ρ .

Vogliamo ora dimostrare che ρ è una distanza su $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ e studiare la topologia indotta da questa struttura di spazio metrico. In particolare dimostreremo che è esattamente la topologia indotta dalla nozione di convergenza uniforme sui compatti che abbiamo introdotto prima. Cominciamo con la seguente:

PROPOSIZIONE 2.4.2: *La funzione definita da (2.4.2) è una distanza su $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ e quindi $(\mathcal{C}(A, \mathbb{C}), \rho)$ è uno spazio metrico.*

Dimostrazione: È evidente che $\rho(f, g) = \rho(g, f)$. Inoltre è anche semplice convincersi che (2.4.1) per ogni n è soddisfatta la disuguaglianza triangolare. Se $f(t) = \frac{t}{1+t}$, si vede subito che la funzione $f(t)$ è crescente e concava su $[0, +\infty)$. Dunque per ogni $t_0 > 0$ e $s \in [0, 1]$, si ha $sf(t_0) \leq f(st_0)$. Dunque, per $a, b, c \in [0, +\infty)$ con $0 \leq a \leq b + c$, abbiamo:

$$f(a) \leq f(b + c) = \frac{b}{b+c} f(b+c) + \frac{b}{b+c} f(b+c) \leq f(b) + f(c).$$

Pertanto, per $f, g, h \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$, dato che si ha $0 \leq \rho_n(f, g) \leq \rho_n(f, h) + \rho_n(h, g)$ per ogni n , segue che:

$$f(\rho_n(f, g)) \leq f(\rho_n(f, h)) + f(\rho_n(h, g)).$$

Dunque la disuguaglianza triangolare vale per ogni addendo della serie che definisce la funzione ρ e quindi possiamo concludere che la disuguaglianza triangolare vale per ρ . Infine dato che $A = \bigcup_{n \geq 1} \bar{A}_n$, si ha immediatamente che $f = g$ se $\rho(f, g) = 0$. \square

Vogliamo dimostrare che la struttura topologica indotta da ρ è indipendente dalla successione “inadente” A_n che si sceglie nella definizione. A tal fine cominciamo con il seguente lemma tecnico:

LEMMA 2.4.3: *Sia ρ definita su $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ da (2.4.2).*

(i) *Per ogni $\epsilon > 0$ esistono $\delta > 0$ e un compatto $K \subset A$ tali che per ogni $f, g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$*

$$\sup\{|f(z) - g(z)| \mid z \in K\} < \delta \quad \implies \quad \rho(f, g) < \epsilon.$$

(ii) *Per ogni $\delta > 0$ e sottoinsieme compatto $K \subset A$, esiste $\epsilon > 0$ tale che per ogni $f, g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$*

$$\rho(f, g) < \epsilon \quad \implies \quad \sup\{|f(z) - g(z)| \mid z \in K\} < \delta.$$

Dimostrazione: Sia $\epsilon > 0$. Esiste allora un intero positivo N tale che $\sum_{n>N} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$.

Si fissino allora $K = \bar{A}_N$ e $\delta > 0$ tale che per $t \in [0, \delta)$ si abbia $\frac{t}{1+t} < \frac{\epsilon}{2}$. Siano $f, g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ tali che

$$\sup\{|f(z) - g(z)| \mid z \in K\} < \delta.$$

Allora, dato che per ogni $n \leq N$ si ha $\bar{A}_n \subset \bar{A}_N = K$, si ha

$$\frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)} < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{per ogni } 1 \leq n \leq N.$$

Dunque

$$\rho(f, g) < \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} = \frac{\epsilon}{2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \right) + \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Supponiamo ora che siano fissati arbitrariamente $\delta > 0$ e un compatto $K \subset A$. Dato che $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bar{A}_n$ e $\bar{A}_n \subset A_{n+1}$ per ogni n , per qualche intero positivo M si ha $K \subset \bar{A}_M$. Dunque

$$\rho_M(f, g) \geq \sup\{|f(z) - g(z)| \mid z \in K\}.$$

□

Dimostriamo ora che la topologia indotta su $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ dalla distanza ρ definita da (2.4.2) non dipende dalla scelta della successione $\{A_n\}$ che “invade” A e che la convergenza uniforme sui compatti è esattamente la convergenza rispetto alla distanza ρ .

TEOREMA 2.4.4:

(i) Un sottoinsieme $U \subset \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ è aperto nella topologia indotta dalla distanza ρ se e solo se per ogni $f \in U$ esiste un compatto $K \subset A$ e $\delta > 0$ tali che

$$\{g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C}) \mid |g(z) - f(z)| < \delta\} \subset U.$$

- (ii) Siano $\{A_n\}$ e $\{A'_n\}$ due successioni di aperti contenuti in A con le proprietà (i), (ii), (iii) elencate nel Lemma 2.4.1. Le distanze ρ e ρ' definite mediante (2.4.2) utilizzando rispettivamente le successioni $\{A_n\}$ e $\{A'_n\}$ definiscono la stessa topologia su $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$.
- (iii) Una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ converge uniformemente sui compatti di A se e solo se converge rispetto alla distanza ρ .

Dimostrazione: (i) Per definizione di topologia indotta da una distanza, un sottoinsieme $U \subset \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ è aperto se per ogni $f \in U$ esiste un $\epsilon > 0$ tale che

$$\{g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C}) \mid \rho(f, g) < \epsilon\} \subset U.$$

Per il punto (i) del Lemma 2.4.3, esistono allora $\delta > 0$ e un compatto $K \subset A$ tali che per ogni $f, g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ con $\sup\{|f(z) - g(z)| \mid z \in K\} < \delta$ si ha $\rho(f, g) < \epsilon$. Ma allora δ e K ottenuti in questo modo sono proprio quelli richiesti.

(ii) Il punto (i) caratterizza gli aperti nella topologia indotta da ρ in modo indipendente dalla successione “invadente” di aperti $\{A_n\}$ e quindi è uguale alla topologia definita da una distanza ρ' definita come ρ a partire da un'altra successione “invadente” di aperti $\{A'_n\}$.

(iii) Se una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ converge uniformemente sui compatti di A a $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$, allora converge uniformemente su ogni compatto $\{\overline{A}_n\}$ e quindi, necessariamente, $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$. Viceversa, supponiamo che $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$ e sia K un compatto contenuto in A . Sia $\delta > 0$ arbitrario. Per il punto (ii) del Lemma 2.4.3, esiste ϵ tale che se $\rho(f_n, f) < \epsilon$ allora $\sup\{|f_n(z) - f(z)| \mid z \in K\} < \delta$. Dato che $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$, esiste N tale che se $n > N$ si ha $\rho(f_n, f) < \epsilon$ e quindi, per $n > N$ si ha $\sup\{|f_n(z) - f(z)| \mid z \in K\} < \delta$ e pertanto $\{f_n\}$ converge uniformemente a f su K . \square

Concludiamo questa panoramica sulla struttura metrica e topologica di $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ indotta dalla convergenza uniforme sui compatti con la completezza:

TEOREMA 2.4.5: $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ è uno spazio metrico completo.

Dimostrazione: A questo punto la dimostrazione è quasi immediata. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy rispetto alla distanza ρ . Allora, usando di nuovo (i) del Lemma 2.4.3, si vede subito che $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy per la distanza uniforme su qualunque compatto $K \subset A$. In particolare, per ogni $z \in A$, la successione $\{f_n(z)\}$ è una successione di Cauchy e quindi converge a un limite $f(z)$. Basterà dimostrare che la successione $\{f_n\}$ uniformemente sui compatti di A a F . Infatti in questo caso seguirà che f è continua e che $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$. Sia allora $K \subset U$ un compatto e sia $\delta > 0$ arbitrario. Usiamo di nuovo l'argomento usato prima. Per il punto (ii) del Lemma 2.4.3, esiste ϵ tale che se $\rho(f_n, f_m) < \epsilon$ allora $\sup\{|f_n(z) - f_m(z)| \mid z \in K\} < \frac{\delta}{2}$. Dato che $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy, esiste N tale che se $m, n > N$ si ha $\rho(f_n, f_m) < \epsilon$ e quindi, per $n > N$ si ha

$$\sup\{|f_n(z) - f_m(z)| \mid z \in K\} < \frac{\delta}{2}.$$

Si fissi arbitrariamente $z \in K$. Allora per qualche $m_z > N$ sufficientemente grande si deve avere

$$|f_{m_z}(z) - f(z)| < \frac{\delta}{2}.$$

Ma allora per ogni $z \in K$, se $n > N$,

$$|f_n(z) - f(z)| < |f_n(z) - f_{m_z}(z)| + |f_{m_z}(z) - f(z)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

e quindi, dato che N è indipendente dalla scelta di $z \in K$, la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente a f su K . \square