CAPITOLO 3

La formula di Cauchy e le sue prime applicazioni

3.1. Integrazione lungo le curve.

Un'applicazione continua $\gamma\colon [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ si dice una *curva C^1 a tratti* se esiste una partizione $t_0 = a, \dots, t_n = b$ dell'intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tale che la restrizione di γ a ciascun intervallo aperto (t_{j-1}, t_j) è di classe C^1 con derivate che si estendono con continuità sugli intervalli chiusi $[t_{j-1}, t_j]$. Ovviamente una curva di classe C^1 è C^1 a tratti, ma non vale il viceversa. Diremo che una curva $\gamma\colon [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ è *semplice* se è iniettiva e che è *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. A volte, se non c'è rischio di ambiguità, denoteremo con γ anche l'immagine (o sostegno) di una curva C^1 a tratti γ. Infine diremo che la curva $\gamma\colon [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ è *regolare a tratti* se è C^1 a tratti con $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a,b]$ dove γ è derivabile.

La *lunghezza* di una una curva C^1 a tratti $\gamma\colon [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ è definta da

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{(Re\gamma'(t))^2 + (Im\gamma'(t))^2}dt. \tag{3.1.1}$$

Si osservi che gli integrandi che compaiono in (3.1.1) sono funzioni continue tranne al più che in un numero finito di punti dove possono avere discontinuità di tipo salto e quindi la definizione è ben posta. Sia ora $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Per definizione *l'integrale di f lungo la curva C^1* a tratti $\gamma\colon [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ è definito da

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{3.1.2}$$

Di nuovo la definizione è ben posta dato che l'integrando a destra in (3.1.2) è una funzione continua tranne al più che in un numero finito di punti dove può avere discontinuità di tipo salto.

Esempi. Sia $\Gamma(z_0, r) = \{|z - z_0| = r\}$ la circonferenza parametrizzata per $t \in [0,1]$ da $t \to z_0 + re^{2\pi i t}$. Allora

$$\int_{\Gamma(z_0,r)} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Le curve $\gamma_1 : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ definita da $\gamma_1(t) = e^{i(\pi-t)}$ e $\gamma_2 : [-1,1] \to \mathbb{C}$ definita da $\gamma_2(t) = t$ sono di classe C^1 e hanno gli stessi estremi: $\gamma_1(0) = \gamma_2(-1) = -1$ e $\gamma_1(\pi) = \gamma_2(1) = 1$. D'altro canto:

$$\int_{\gamma_1} |z|dz = 2 \neq 1 = \int_{\gamma_2} |z|dz.$$

Diremo che due curve C^1 a tratti $\gamma_1 : I \to A \subset \mathbb{C}$, $\gamma_2 : J \to A \subset \mathbb{C}$ sono *equivalenti* se esiste un diffeomorfismo $\varphi : J \to I$ con $\varphi'(t) > 0$ per ogni $t \in J$ e tale che $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. Dalla definizione che abbiamo dato segue che curve equivalenti hanno lo stesso sostegno e la stessa orientazione (nel senso di verso di percorrenza). In letteratura spesso per curve equivalenti si intende semplicemente curve con lo stesso sostegno.

PROPOSIZIONE 3.1.1: *La lunghezza di una curva e l'integrale di una funzione su una curva sono indipendenti dalle parametrizzazioni orientate. Precisamente se $\gamma_1 : I \to A \subset \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : J \to A \subset \mathbb{C}$ sono curve C^1 a tratti equivalenti e f è una funzione continua su A, allora $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$ e*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Lasciamo per esercizio la semplice dimostrazione. Si osservi che lunghezza della curva rimane invariante anche rispetto a riparametrizzazioni che invertono l'orientazione. Dalla definizione di integrale segue immediatamente inoltre che, se $\gamma : I \to A \subset \mathbb{C}$ è una curva C^1 a tratti, $f_1, f_2 : A \to \mathbb{C}$ sono funzioni continue e c_1, c_2 sono costanti,

$$\int_{\gamma} c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)dz = c_1 \int_{\gamma} f_1(z)dz + c_2 \int_{\gamma} f_2(z)dz.$$

Se $\gamma_1 : [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [c,d] \to A \subset \mathbb{C}$ sono curve C^1 a tratti con $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, il *prodotto* $\gamma_1\gamma_2 : [a, b+d-c] \to A \subset \mathbb{C}$ è la curva C^1 a tratti definita da

$$\gamma_1\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) \ \text{ se } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t-b+c) \ \text{ se } t \in [b, b+d-c]. \end{cases}$$

Se $\gamma : [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ è una curva C^1 a tratti, l'*inversa* di γ è la curva C^1 a tratti $\gamma^{-1} : [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ definita da $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a+b-t)$.

Se $\gamma_1 : [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [b,c] \to A \subset \mathbb{C}$ sono curve C^1 a tratti con $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ e $\gamma : [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ è una curva C^1 a tratti e $f : A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua, si ha allora dalla definizione di integrale:

$$\int_{\gamma_1\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz \tag{3.1.3}$$

e

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz. \tag{3.1.4}$$

È spesso utile la seguente stima:

Proposizione 3.1.2: *Siano $\gamma\colon [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ una curva C^1 a tratti e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione continua, allora*

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \max_{z\in\gamma(I)} |f(z)|L(\gamma).$$

Dimostrazione: Se $\int_\gamma f(z)dz = 0$ la stima è ovvia. Supponiamo che $\int_\gamma f(z)dz \neq 0$ e sia $s_0 = -arg\left(\int_\gamma f(z)dz\right)$. Allora $e^{is_0}\int_\gamma f(z)dz \in \mathbb{R}_+$ e si può argomentare come segue:

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)dz\right| &= \left|e^{is_0}\int_\gamma f(z)dz\right| = e^{is_0}\int_\gamma f(z)dz = Re\left(e^{is_0}\int_\gamma f(z)dz\right)\\ &= Re\left(e^{is_0}\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right) = \int_a^b Re\left(e^{is_0}f(\gamma(t))\gamma'(t)\right)dt\\ &\le \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \le \max_\gamma |f| L(\gamma).\end{aligned}$$

□

È utile avere una ulteriore nozione leggermente più generale di integrale. Cominciamo con una definizione. Sia $\mathcal{C}(A)$ l'insieme di tutte le curve C^1 a tratti con sostegno nell'aperto $A \subset \mathbb{C}$; una *catena* in A è un'applicazione $\Gamma\colon \mathcal{C}(A) \to \mathbb{Z}$ tale che Γ assume valore diverso da zero solo per un numero finito di curve. La struttura di gruppo additivo di $\mathbb{Z}$ induce, mediante la somma valore per valore, una operazione di somma per le catene con la quale l'insieme delle catene su un aperto risulta un gruppo abeliano. Se $\gamma\colon I \to A \subset \mathbb{C}$ è una curva C^1 a tratti, identificheremo γ con l'unica catena su A – che denoteremo ancora con γ – che assume valore 1 su γ e 0 su ogni altra curva in $\mathcal{C}(A)$.

Sia Γ una catena su A e siano $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \in \mathcal{C}(A)$ le uniche curve tali che $\Gamma(\gamma_j) = n_j \neq 0$. Allora la catena Γ ha la rappresentazione (unica):

$$\Gamma = \sum_{j=1}^N n_j\gamma_j.$$

Se $\Gamma = \sum_{j=1}^N n_j\gamma_j$ è una catena su A e $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua, l'integrale di f lungo Γ è defINTO da

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^N n_j \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Se Γ_1 e Γ_2 sono catene, $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua, allora

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

Inoltre se $\Gamma = \sum_{j=1}^{N} n_j\gamma_j$ è una catena su A e $f: A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua, allora dalla Proposizione 3.1.2 si ottiene:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq \max_{\cup_j \gamma_j} |f(z)| \sum_{j=1}^{N} |n_j| L(\gamma_j)$$

dove, come al solito, si identifica γ_j con il suo sostegno.

Esempio. Sia $D \subset \mathbb{C}$ un aperto la cui frontiera ∂D sia l'unione disgiunta di un numero finito di (immagini di) curve semplici chiuse regolari a tratti $\gamma_j: I_j \to \mathbb{C}$ per $j = 1, \ldots, N$. Se $\gamma_j(t) = x_j(t) + iy_j(t)$ per $t \in I_j$, allora nei punti dove γ_j è regolare, il vettore $\gamma_j'(t) = x_j'(t) + iy_j'(t)$ è tangente alla curva e il vettore $n_j(t) = -y_j'(t) + ix_j'(t) = i\gamma'(t)$ è normale alla curva. Diremo che γ_j è *positivamente orientata rispetto a* D se per $t \in I_j$ dove γ_j è di classe C^1 esiste $\epsilon > 0$ tale che se $0 < s < \epsilon$ allora $\gamma_j(t) + sn_j(t) \in D$. In parole povere γ_j è positivamente orientata rispetto a D se è orientata in modo che D "giaccia a sinistra" del verso di percorrenza di γ_j. Si supponga che tutte le curve γ_j siano positivamente orientate rispetto a D. La frontiera di D si può allora considerare come una catena: $\partial D = \gamma_1 + \ldots + \gamma_N$. Per definizione chiameremo l'integrale lungo la catena $\partial D = \gamma_1 + \ldots + \gamma_N$ *integrale lungo la frontiera orientata di* D.

Concludiamo la sezione con le versioni dei teoremi di passaggio al limite e di derivazione sotto il segno d'integrale che utilizzeremo nel seguito. Per semplicità gli enunciati sono per integrali lungo curve ma è immediato ossevare che analoghi risultati valgono per integrali lungo catene e quindi, in particolare, lungo frontiere orientate di aperti.

TEOREMA 3.1.3: *Sia* $A \subset \mathbb{C}$ *un aperto e* $f_n: A \to \mathbb{C}$ *una succesione di funzioni continue uniformemente convergente sui compatti di* A *a* $f: A \to \mathbb{C}$. *Se* $\gamma: I \to A \subset \mathbb{C}$ *è una curva* C^1 *a tratti, allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma} f_n(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz.$$

Dimostrazione: Il risultato segue immediatamente osservando che

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z)dz - \int_{\gamma} f(z)dz \right| = \left| \int_{\gamma} [f_n(z) - f(z)]\, dz \right| \leq \max_{\gamma} |f_n - f| L(\gamma).$$

□

TEOREMA 3.1.4: *Sia* $A \subset \mathbb{C}$ *un aperto,* $M \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma: I \to A \subset \mathbb{C}$ *è una curva* C^1 *a tratti e* $f: A \times M \to \mathbb{C}$ *una funzione continua. Allora*

(i) La funzione $F(x) = \int_{\gamma} f(\zeta, x)d\zeta$ *è continua.*

(ii) Se M *è un aperto e esiste continua la derivata parziale* $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta, x)$ *per ogni* $\zeta \in \gamma(I)$, *allora* $F(x)$ *ha derivata continua rispetto a* x_k *e*

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta, x)d\zeta.$$

(iii) Se M è un aperto in $\mathbb{C}$ e per ogni $\zeta \in \gamma(I)$ la funzione $z \to f(\zeta, z)$ è olomorfa di classe C^1, allora F è olomorfa su M e

$$F'(z) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, z) d\zeta.$$

Dimostrazione: (i) Sia $x_0 \in M$ un punto arbitrario e x_n una successione di punti di M convergente a x_0. L'enunciato segue subito dalla stima seguente:

$$|F(x_n) - F(x_0)| = \left| \int_\gamma \left[f(\zeta, x_n) - f(\zeta, x_0) \right] d\zeta \right| \le \max_{\zeta \in \gamma(I)} |f(\zeta, x_n) - f(\zeta, x_0)| L(\gamma).$$

(ii) Sia $x_0 \in M$ un punto arbitrario. Per $|h|$ sufficientemente piccolo sia $v_h = h\mathbf{e}_k$ dove $\mathbf{e}_k$ è il k-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Allora esiste x_1 compreso fra x_0 e $x_0 + v_h$ sul segmento che li congiunge tale che

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + v_h) - F(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \int_\gamma \left[f(\zeta, x_0 + v_h) - f(\zeta, x_0) \right] d\zeta \\ &= \frac{1}{h} \int_\gamma h \frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta, x_1) d\zeta = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta, x_1) d\zeta. \end{aligned}$$

Dato che $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta, x)$ è continua per ogni $\zeta \in \gamma(I)$, la tesi segue dal punto (i).

(iii) Applicando il punto (ii) si ottiene che F è di classe C^1, e dato che $z \to f(\zeta, z)$ è olomorfa, derivando sotto il segno di integrale, si verifica che F soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann e si calcola la derivata complessa. $\square$

APPENDICE: Forme differenziali sul piano e loro integrali.

L'integrazione lungo le curve di funzioni continue che abbiamo definito si colloca nel contesto più generale dell'integrazione delle forme differenziali. Anche per le applicazioni successive è utile ricapitolare le nozioni essenziali della teoria nel caso di $\mathbb{R}^2$ utilizzando notazioni compatibili con la teoria generale e con i nostri scopi.

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto. Una 0–*forma differenziabile* complessa di classe C^k, $k \ge 0$, su A è semplicemente una funzione di classe C^k su A. Denoteremo con $\Lambda^0_k(A)$ lo spazio di tutte le 0–forme differenziabili su A di classe C^k. Scriveremo $\Lambda^0(A) = \Lambda^0_k(A)$ se non è importante sottolineare il grado di differenziabilità.

Sia $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle applicazioni $\mathbb{R}$–lineari su $\mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{C}$. Evidentemente $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ ha dimensione 4. Fissiamo una sua base nel modo seguente. Si considerino le seguenti applicazioni lineari:

$$\begin{array}{cccc} dx\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} & idx\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} & dy\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} & idy\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) \mapsto x & (x,y) \mapsto ix & (x,y) \mapsto y & (x,y) \mapsto iy. \end{array}$$

Si vede subito che sono linearmente indipendenti (come elementi dello spazio vettoriale reale $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$) e quindi $\{dx, idx, dy, idy\}$ è una base di $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. D'altra parte $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ è anche uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbb{C}$. Se si considerano le applicazioni lineari

$$dz = dx + idy: \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \qquad\qquad d\bar{z} = dx - idy: \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C},$$

allora $\{dz, d\bar{z}\}$ è una base di $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Se $A \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto, data un'applicazione $\omega: A \to Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ sono unicamente determinate quattro funzioni $P_1, P_2, Q_1, Q_2: A \to \mathbb{R}$ tali che per ogni $(x, y) \in A$ si ha

$$\begin{aligned}\omega(x, y) &= P_1(x, y)dx + iP_2(x, y)dx + Q_1(x, y)dy + iQ_2(x, y)dy \\ &= (P_1(x, y) + iP_2(x, y))dx + (Q_1(x, y) + iQ_2(x, y))dy\end{aligned}$$

Una 1–*forma differenziabile* complessa di classe C^k, $k \geq 0$, su un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ è un'applicazione $\omega: A \to Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ di classe C^k dove si intende che su $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ si considera la struttura differenziabile ottenuta, fissata la base dx, idx, dy, idy mediante l'identificazione naturale con $\mathbb{R}^4$. In altre parole, se $\omega = (P_1 + iP_2)dx + (Q_1 + iQ_2)dy$, ω è una 1–*forma differenziabile* complessa di classe C^k se e solo se le funzioni $P_1, P_2, Q_1, Q_2: A \to \mathbb{R}$ sono di classe C^k. Denoteremo con $\Lambda^1_k(A)$ lo spazio di tutte le 1–forme differenziabili su A di classe C^k. Scriveremo $\Lambda^1(A) = \Lambda^1_k(A)$ se non è importante sottolineare il grado di differenziabilità.

È utile scrivere le 1-forme utilizzando notazioni complesse. Si considerino le applicazioni lineari reali

$$dz = dx + idy: \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \qquad\qquad d\bar{z} = dx - idy: \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}.$$

Sia

$$\omega = (P_1 + iP_2)dx + (Q_1 + iQ_2)dy$$

una 1–forma differenziabile complessa su un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Allora, posto $P = P_1 + iP_2$ e $Q = Q_1 + iQ_2$, se

$$M = \frac{1}{2}(P - iQ) \qquad\qquad N = \frac{1}{2}(P + iQ),$$

allora

$$\omega = Mdz + Nd\bar{z}.$$

Si consideri ora lo spazio $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ delle forme bilineari alternanti di $\mathbb{R}^2$ a valori complessi. Dunque $L \in \mathcal{A}$ se e solo se è bilineare e $L(v, w) = -L(w, v)$ per ogni $v, w \in \mathbb{R}^2$. La forma

$$dx \wedge dy: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$$

definita, per $v = a_1e_1 + a_2e_2$ e $w = b_1e_1 + b_2e_2$, da

$$dx \wedge dy(v, w) = det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

è evidentemente un elemento non nullo di $\mathcal{A}$. D'altra parte, se $\{e_1, e_2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$, per $L \in \mathcal{A}$, $v = a_1e_1 + a_2e_2$ e $w = b_1e_1 + b_2e_2$ si ha

$$L(v, w) = \sum_{i,j=1,2} L(e_i, e_j)a_ib_j = L(e_1, e_2)(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Dunque $L = L(e_1, e_2)dx \wedge dy$ e quindi possiamo concludere che $\mathcal{A}$ è uno spazio vettoriale di dimensione 1 su $\mathbb{C}$ generato dalla forma $dx \wedge dy$.

Una 2–*forma differenziabile* complessa di classe C^k, $k \geq 0$, su un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ è un'applicazione $\Omega\colon A \to \mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ di classe C^k ossia tale che, se $\Omega = F dx \wedge dy$, la funzione $F\colon A \to \mathbb{C}$ è di classe C^k. Denoteremo con $\Lambda^2_k(A)$ lo spazio di tutte le 2–forme differenziabili su A di classe C^k e, anche in questo caso, scriveremo $\Lambda^2(A) = \Lambda^2_k(A)$ quando non è importante sottolineare il grado di differenziabilità.

Se $\alpha = M dx + N dy, \beta = P dx + Q dy \in \Lambda^1(A)$, il *prodotto esterno* di α e β è definito da

$$\alpha \wedge \beta = (MQ - NP) dx \wedge dy = det \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix} dx \wedge dy.$$

In particolare abbiamo

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0 \ , \quad dy \wedge dx = -dx \wedge dy.$$

Si vede subito che il prodotto esterno definisce un'applicazione bilineare alternante $\wedge\colon \Lambda^1(A) \times \Lambda^1(A) \to \Lambda^2(A)$.

Anche per le 2–forme è conveniente l'espressione in termini di dz e $d\overline{z}$. Basta osservare che

$$dz \wedge d\overline{z} = (dx + i dy) \wedge (dx - i dy) = -2i dx \wedge dy.$$

Dunque se $\Omega = F dx \wedge dy$, allora $\Omega = C dz \wedge d\overline{z}$ dove $C = \frac{i}{2} F$.

Se $k \geq 1$, l'usuale differenziale definisce un'applicazione $d\colon \Lambda^0_k(A) \to \Lambda^1_{k-1}(A)$ tale che

$$d(f + g) = df + dg \ , \quad d(fg) = g df + f dg.$$

Ricordiamo che:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}.$$

Un analogo operatore $d\colon \Lambda^1_k(A) \to \Lambda^2_{k-1}(A)$, chiamato ancora *differenziale*, si definisce richiedendo che:

(i) $\quad d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta \qquad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^1(A)$

(ii) $\quad d(f\alpha) = f d\alpha + df \wedge d\alpha \qquad \forall f \in \Lambda^0(A), \forall \alpha \in \Lambda^1(A)$

(iii) $\quad d(df) = 0 \qquad \forall f \in \Lambda^0(A).$

Sia $\omega = P dx + Q dy \in \Lambda^1_k(A)$, se le proprietà (i),(ii),(iii) sono soddisfatte si ha:

$$\begin{aligned} d\omega = d(P dx + Q dy) &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \\ &\left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

D'altra parte se si definisce il differenziale di $\omega = Pdx + Qdy$ mediante (3.1.5) le proprietà richieste sono soddisfatte. Infine, se $\omega = Mdz + Nd\overline{z} \in \Lambda^1_k(A)$, allo stesso modo, si vede facilmente che deve essere

$$d\omega = \left(\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial \overline{z}}\right) dz \wedge d\overline{z}.$$

Una 1–forma $\omega = Pdx+Qdy = Mdz+Nd\overline{z} \in \Lambda^1_k(A)$, $k \geq 1$, si dice *esatta* se per qualche 0–forma $f \in \Lambda^0_{k+1}(A)$ (ossia funzione di classe C^{k+1}) si ha $\omega = df$. Questa condizione, vista la definizione di ω ovviamente equivale a $f_x = P$ e $f_y = Q$ oppure a $f_z = M$ e $f_{\overline{z}} = N$. Dato che per $f \in \Lambda^0_{k+1}(A)$ si ha $d(df) = 0$, condizione necessaria affinchè una 1–forma ω sia esatta, e che sia *chiusa* ossia vale $d\omega = 0$.

Passiamo ora a definire la nozione di integrazione di forme differenziali.

Sia $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 \colon [a, b] \to A \subset \mathbb{C}$ una curva C^1 a tratti e $\omega = Pdx+Qdy \in \Lambda^1(A)$ allora l'integrale di ω lungo γ è definito da

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_a^b \{P(\gamma(t))\gamma_1'(t) + Q(\gamma(t))\gamma_2'(t)\}dt.$$

Dunque l'integrale di una funzione continua f lungo γ definito nel primo paragrafo di questo capitolo, non è altro che l'integrale secondo questa definizione della forma differenziale $fdz = f(dx + idy)$ lungo γ. Anche per forme differenziali è utile la nozione di integrale lungo una catena. Siano $\Gamma = \sum_{j=1}^N n_j\gamma_j$ una catena su A e $\omega = Pdx + Qdy \in \Lambda^1(A)$. L'integrale di ω lungo Γ è defin to da

$$\int\limits_\Gamma \omega = \sum_{j=1}^N n_j \int\limits_{\gamma_j} \omega.$$

Evidentemente, con semplici adattamenti delle dimostrazioni, anche per gli integrali di 1–forme lungo curve vale l'indipendenza rispetto a cambi di parametrizzazione positivamente orientati e teoremi di passaggio al limite e di derivazione sotto il segno di integrale analoghi al Teorema 3.1.3 e al Teorema 3.1.4. Un risultato molto importante è il seguente

Teorema 3.1.5: (Lemma di Poincaré per 1–forme) *Una forma $\omega \in \Lambda^1_k(A)$, $k \geq 1$, è chiusa se e solo se è localmente esatta ossia per ogni punto $p \in A$ esiste un intorno U_p tale che la restrizione di ω a U_p è esatta su U_p.*

Dimostrazione: Se ω è localmente esatta ovviamente si ha $d\omega = 0$. Supponiamo che $\omega = Pdx + Qdy$ sia chiusa. Per ogni punto $p \in A$ sia U_p un disco centrato in $p = x_0 + iy_0$ contenuto in A. Per $z = x + iy \in U_p$ si consideri la curva $\beta_z \colon [0, 1] \to U_p$ definita da $\beta_z(t) = p + t(z - p)$. Si definisca

$$f(z) = \int_{\beta_z} \omega = \int_0^1 [(x - x_0)P(p + t(z - p)) + (y - y_0)Q(p + t(z - p))]dt$$

Dato che ω è chiusa, si deve avere $P_y = Q_x$ su A. Dunque derivando sotto il segno di integrale, sostituendo e integrando per parti, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(z) = &\int_0^1 P(p+t(z-p))dt \\
&\qquad + \int_0^1 [(x-x_0)\frac{\partial P}{\partial x}(p+t(z-p)) + (y-y_0)\frac{\partial Q}{\partial x}(p+t(z-p))]tdt \\
= &\int_0^1 P(p+t(z-p))dt \\
&\qquad + \int_0^1 [(x-x_0)\frac{\partial P}{\partial x}(p+t(z-p)) + (y-y_0)\frac{\partial P}{\partial y}(p+t(z-p))]tdt \\
= &\int_0^1 P(p+t(z-p))dt + \int_0^1 t\frac{dP(\beta_z)}{dt}(t)dt \\
= &\int_0^1 P(p+t(z-p))dt + [tP(\beta_z(t))]_0^1 - \int_0^1 P(p+t(z-p))dt \\
= &P(\beta_z(1)) = P(z).
\end{aligned}
$$

Allo stesso modo si prova che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = Q(z)$$

e questo completa la dimostrazione. □

Affinchè ogni forma chiusa $\omega \in \Lambda_k^1(A)$ sia esatta su tutto A, occorre che l'aperto A soddisfi delle ipotesi geometriche. Ad esempio se A è un aperto stellato rispetto a un suo punto, la dimostrazione del 3.1.5 si può adattare banalmente per provare che ogni forma chiusa è anche esatta. In generale si dimostra che su un aperto A ogni forma chiusa è esatta se e solo se A è *semplicemente connesso*. Discuteremo questa condizione topologica più tardi.

Siano $\Omega = Fdx \wedge dy \in \Lambda^2(A)$ e $K \subset A$ un sottoinsieme compatto. Allora l'integrale di Ω su K è definito da

$$\int_K \Omega = \int_K Fdxdy$$

dove l'integrale a destra è l'usuale integrale bidimensionale. Come è d'uso se B è un sottoinsieme aperto di A tale che la sua chiusura $\overline{B}$ è compatta e contenuta in A, si scriverà anche

$$\int_B \Omega = \int_{\overline{B}} \Omega.$$

Il risultato fondamentale che ci sarà utile in seguito, è il seguente caso particolare del Teorema di Stokes:

Teorema 3.1.6: (di Gauss-Green) *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato la cui frontiera ∂D sia l'unione disgiunta di un numero finito di (immagini di) curve semplici chiuse* *regolari a tratti disgiunte. Sia* $\omega = Pdx + Qdy$ *una* 1*–forma di classe* C^1 *su un aperto che contiene* $\overline{D}$*. Allora*

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \tag{3.1.6}$$

Non daremo dimostrazione di questo risultato che viene di regola dimostrato nei corsi di Analisi. Invece presentiamo la sua versione in termini di variabile complessa che ci sarà utile in seguito.

TEOREMA 3.1.7: *Sia* $A \subset \mathbb{C}$ *un aperto limitato tale che la frontiera* ∂A *di* A *sia unione disgiunta di un numero finito di curve semplici chiuse regolari a tratti disgiunte. Se* $f \in C^1(\overline{A})$ *è una funzione a valori complessi, allora*

$$\int_{\partial A} f(z)dz = 2i \int_A f_{\overline{z}}(z)\, dxdy. \tag{3.1.7}$$

Dimostrazione: Applicando il Teorema di Gauss-Green alla forma $\omega = fdz$, dato che si ha $d\omega = d(fdz) = f_{\overline{z}}\, d\overline{z} \wedge dz = 2if_{\overline{z}}\, dx \wedge dy$, allora

$$\int_{\partial A} f(z)dz = \int_A d(fdz) = \int_A f_{\overline{z}}\, d\overline{z} \wedge dz = 2i \int_A f_{\overline{z}}\, dx \wedge dy = 2i \int_A f_{\overline{z}}(z)\, dxdy.$$

□

Come conseguenza otteniamo immediatamente una versione del cosiddetto Teorema integrale di Cauchy:

TEOREMA 3.1.8: *Sia* $A \subset \mathbb{C}$ *un aperto limitato tale che la frontiera* ∂A *di* A *sia unione disgiunta di un numero finito di curve semplici chiuse regolari a tratti. Se* $f \in C^1(\overline{A})$ *è olomorfa su* A*, allora,*

$$\int_{\partial A} f(z)dz = 0. \tag{3.1.8}$$

Senza fare ipotesi di regolarità per le funzioni olomorfe, questo risultato non è altrettanto semplice da ottenere. Nel prossimo paragrafo dimostreremo il teorema di Goursat, che per funzioni di classe C^1 è solo un caso speciale del Teorema 3.1.8, e che permette di dimostrare tutte le proprietà di regolarità per le funzioni olomorfe. In particolare sulla sua base riusciremo a provare che le funzioni olomorfe sono rappresentabili mediante formule integrali e che sono analitiche.

Esercizi.

1. Sia $K = \{z = x + iy \mid 1 <\mid x \mid< 2,\ \ 1 <\mid y \mid< 2\}$. Calcolare in due modi diversi $\displaystyle\int_{\partial K} Re(z)\, dz$.

2. Sia $A \in \mathbb{C}$ un aperto e siano f una funzione di classe C^∞ tale che $df \neq 0$ e Ω una 2-forma differenziale di classe C^∞ definite su A. Dimostrare che esiste una una 1-forma differenziale θ di classe C^∞ su A tale che $\Omega = df \wedge \theta$. Trovare tutte le forme θ con questa proprietà. *Consiglio: Dato che* $df \neq 0$ *si ha* $0 \neq |\nabla f|^2 = (f_x)^2 + (f_y)^2$. *Allora dall'eguaglianza*

$$\frac{f_x}{|\nabla f|^2} f_x + \frac{f_y}{|\nabla f|^2} f_y = 1$$

data F *di classe* C^∞ *è facile trovare* P, Q *di classe* C^∞ *tali che* $Qf_x - Pf_y = F$*..... Inoltre se* α *è la differenza fra due soluzioni* θ_0, θ_1 *di* $\Omega = df \wedge \theta$ *allora* $df \wedge \alpha = 0$. *Dimostrare che* $\alpha = gdf$ *per qualche funzione* g*....*

3. Dimostrare che per $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ si ha $dz \wedge d\overline{z}(w_1, w_2) = 2iIm(w_1\overline{w_2})$.

4. Dimostrare che una forma $\omega = fdz$ di classe C^1 su un aperto $A \in \mathbb{C}$ è chiusa se e solo se f è olomorfa su A.

5. Sia f una funzione di classe C^1 su $\mathbb{C}$ che sia nulla nel complemento di un insieme compatto. Dimostrare che

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial f}{\partial z} dxdy = \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dxdy = 0.$$

3.2. I teoremi di Cauchy e Goursat.

Cominciamo introducendo la nozione di primitiva:

Definizione 3.2.1: Sia $f: A \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Una *primitiva olomorfa* $F: A \to \mathbb{C}$ di f è una funzione olomorfa tale che $F' = f$. Si dice che f *ammette primitive olomorfe locali* in A, se per ogni $a \in A$ esiste un intorno aperto $U(a) \subset A$ tale che su $U(a)$ esiste una primitiva olomorfa di $f = f_{|U(a)}$.

Osservazione. Se $A \subset \mathbb{C}$ è un aperto connesso e $F_1, F_2: A \to \mathbb{C}$ sono primitive olomorfe della stessa funzione f, allora F_1 e F_2 differiscono per una costante.

Si vede subito che per una funzione di classe C^1 ammettere primitive olomorfe locali è equivalente a essere olomofa. Precisamente abbiamo la seguente

Proposizione 3.2.1: *Sia $f: A \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) la funzione f è olomorfa;
(ii) la forma $\omega = f dz$ è chiusa;
(iii) la forma $\omega = f dz$ è localmente esatta;
(iv) la funzione f ammette primitive olomorfe locali.

Dimostrazione: La prova è praticamente immediata. Infatti se f è di classe C^1 allora è olomorfa se e solo se soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann $f_{\overline{z}} = 0$ su A. D'altra parte, dato che $d\omega = f_{\overline{z}} d\overline{z} \wedge dz$, questo succede se e solo se ω è chiusa. Per il Lemma di Poincaré questo equivale al fatto che ω sia localmente esatta. Infine quest'ultima affermazione per $\omega = f dz$ equivale, per definizione al fatto che f ammette primitive olomorfe locali. $\square$

In effetti si può estendere la Proposizione 3.2.1 a funzioni continue $f: A \to \mathbb{C}$ sostituendo l'ipotesi che la forma $\omega = f dz$ sia chiusa con una equivalente che abbia senso per forme continue. Risulta cruciale l'integrazione lungo curve chiuse come suggeriscono i prossimi risultati

Proposizione 3.2.2: *Sia $f: A \to \mathbb{C}$ una funzione continua con primitiva olomorfa $F: A \to \mathbb{C}$. Se $\gamma: I \to A \subset \mathbb{C}$ è una curva C^1 a tratti con estremi $z_0 = \gamma(a)$ e $z_1 = \gamma(b)$, allora*

$$\int_\gamma f(z) dz = F(z_1) - F(z_0).$$

In particolare allora, se γ è una curva chiusa

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione: La dimostrazione, che è una semplice applicazione della definizione di integrale lungo una curva e del Teorema fondamentale del Calcolo Integrale, viene lasciata come esercizio al lettore. $\square$

Esempi. Se $n \geq 0$, per ogni costante $c \in \mathbb{C}$, la funzione $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c$ è primitiva olomorfa di $f(z) = z^n$ su $\mathbb{C}$. Segue che ogni polinomio in z ha primitiva olomorfa su $\mathbb{C}$. Se $n < -1$, per ogni costante $c \in \mathbb{C}$, la funzione $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c$ è primitiva olomorfa di $f(z) = z^n$ su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Invece dalla Proposizione 3.2.2 segue che la funzione $f(z) = z^{-1}$ non ha primitiva su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Vale il viceversa della Proposizione 3.2.2. Precisamente si ha

Proposizione 3.2.3: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $f: A \to \mathbb{C}$ una funzione continua tale che per ogni curva chiusa $\gamma: I \to A$ risulti $\int\limits_\gamma f(z)dz = 0$. Allora f ha una primitiva olomorfa su A.*

Dimostrazione: Si fissi $a \in A$. Per ogni $z \in A$ si fissi una curva C^1 a tratti γ_z in A tale che $\gamma_z(0) = a$ e $\gamma_z(1) = z$. Definiamo $F: A \to \mathbb{C}$ mediante

$$F(z) = \int\limits_{\gamma_z} f(z)dz.$$

Si osservi che, per l'ipotesi su f, il valore $F(z)$ non dipende dalla scelta della curva γ_z. Sia $w \in A$ arbitrario; per $z \in A$ sufficientemente vicino a w il segmento che congiunge w con z è tutto contenuto in A. Indicheremo con $[w,z]: [0,1] \to A$ la parametrizzazione di tale segmento definita da $t \mapsto w + t(z-w)$. Si definisca $\gamma = \gamma_w [w,z] \gamma_z^{-1}$. Allora γ è una curva chiusa C^1 a tratti e quindi

$$0 = \int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_{\gamma_w} f(z)dz + \int\limits_{[w,z]} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_z^{-1}} f(z)dz = F(w) + \int\limits_{[w,z]} f(z)dz - F(z).$$

Pertanto

$$F(z) - F(w) = \int\limits_{[w,z]} f(z)dz = (z-w) \int\limits_0^1 f(w + t(z-w))dt.$$

Si definisca per $z \in A$ sufficientemente vicino a w

$$G(z) = \begin{cases} \frac{F(z)-F(w)}{z-w} & \text{se } \ z \neq w \\ f(w) & \text{se } \ z = w. \end{cases}$$

Dunque $G(z) = \int\limits_0^1 f(w + t(z-w))dt$ e quindi

$$\begin{aligned} |G(z) - G(w)| &= \left| \int\limits_0^1 f(w + t(z-w))dt - \int\limits_0^1 f(w)dt \right| \\ &\leq \int\limits_0^1 |f(w + t(z-w)) - f(w)| \, dt \leq \max_{[0,1]} |f(w + t(z-w)) - f(w)| \, . \end{aligned}$$

Dato che
$$\lim_{z\to w}\max_{[0,1]}|f(w+t(z-w))-f(w)|=0,$$
segue che G è continua in w e quindi che
$$\lim_{z\to w}\frac{F(z)-F(w)}{z-w}=G(w)=f(w)$$
ossia che F ha derivata complessa in w e che $F'(w)=f(w)$. Per l'arbitrarietà di $w\in A$, la tesi segue. $\square$

Siano $z_0,z_1,z_2\in\mathbb{C}$ tre punti non allineati. Denoteremo con $\Delta=\Delta(z_0,z_1,z_2)$ il triangolo (orientato) chiuso di vertici z_0,z_1,z_2. Se si denota con $[z,w]$ il segmento orientato da z a w, allora $\partial\Delta=\partial\Delta(z_0,z_1,z_2)=[z_0,z_1][z_1,z_2][z_2,z_0]$. Per domini convessi si può dare la seguente versione della Proposizione 3.2.3:

PROPOSIZIONE 3.2.4: *Sia $A\subset\mathbb{C}$ un aperto convesso e $f\colon A\to\mathbb{C}$ una funzione continua tale che per ogni triangolo chiuso $\Delta\subset A$ risulti $\int_{\partial\Delta}f(z)dz=0$. Allora f ha una primitiva olomorfa su A.*

Dimostrazione: Sia $a\in A$. Dato che A è convesso, per ogni $z\in A$ il segmento che congiunge a a z è contenuto in A. Se si sceglie $\gamma_z=[a,z]$ e si definisce
$$F(z)=\int_{\gamma_z}f(z)dz,$$
si ottiene la tesi ripetendo parola per parola la dimostrazione della Proposizione 3.2.3. $\square$

Dato che per ogni punto di un aperto esiste un intorno convesso tutto contenuto nell'aperto, come conseguenza immediata si ha la seguente parziale estensione della Proposizione 3.2.1:

COROLLARIO 3.2.5: *Sia $A\subset\mathbb{C}$ un aperto e $f\colon A\to\mathbb{C}$ una funzione continua. Se per ogni triangolo chiuso $\Delta\subset A$ risulta $\int_{\partial\Delta}f(z)dz=0$ allora valgono le seguenti equivalenti affermazioni:*
(i) la funzione f ammette primitive olomorfe locali;
(ii) la forma $\omega=f\,dz$ è localmente esatta.

Per completare l'estensione della Proposizione 3.2.1 il primo risultato cruciale è il seguente fondamentale:

TEOREMA 3.2.6: (Teorema di Goursat) *Sia Δ un triangolo chiuso in $\mathbb{C}$ e sia f una funzione olomorfa in un aperto U che contiene Δ. Allora*
$$\int_{\partial\Delta}f(z)dz=0.$$

Dimostrazione: Siano z_0, z_1, z_2 i vertici del triangolo Δ orientati in senso antiorario ossia in modo che il prodotto dei cammini $[z_0, z_1][z_1, z_2][z_2, z_0]$ sia il perimetro $\partial\Delta$ di Δ percorso in senso antiorario a partire dal vertice z_0. Siano c_0, c_1, c_2 i punti medi rispetivamente dei lati $[z_0, z_1], [z_1, z_2], [z_2, z_0]$. Congiungendo i punti c_0, c_1, c_2 si divide il triangolo Δ in quattro triangoli chiusi $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \Delta_1^4$. Ciascuno di questi triangoli è simile a Δ con fattore di similitudine uguale a $\frac{1}{2}$. Orientando positivamente la frontiera di questi triangoli rispetto al loro interno, si ha

$$\partial\Delta_1^1 = [z_0, c_0][c_0, c_2][c_2, z_0], \quad \partial\Delta_1^2 = [c_0, z_1][z_1, c_1][c_1, c_0]$$

$$\partial\Delta_1^3 = [c_1, z_2][z_2, c_2][c_2, c_1], \quad \partial\Delta_1^4 = [c_0, c_1][c_1, c_2][c_2, c_0].$$

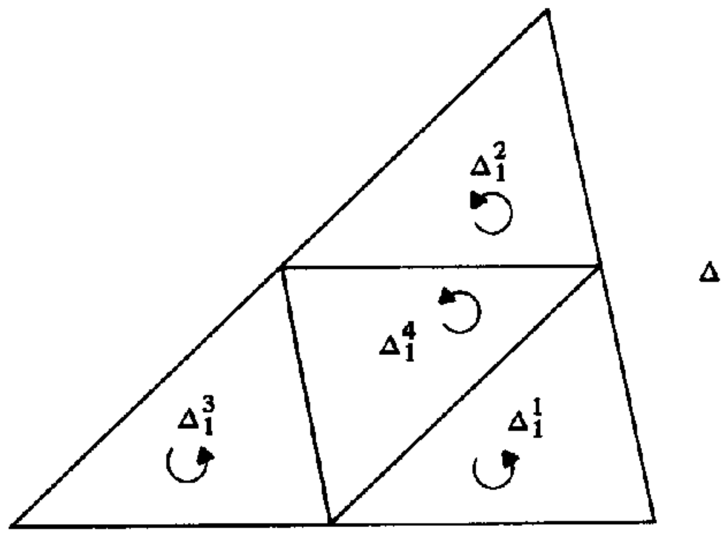

Fig. 3.1

Dunque da (3.1.3) e (3.1.4) segue allora che

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^k} f(z)dz$$

e quindi

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq \sum_{k=1}^{4} \left| \int_{\partial\Delta_1^k} f(z)dz \right| \leq 4 \max_{k=1,\ldots,4} \left| \int_{\partial\Delta_1^k} f(z)dz \right|$$

Sia Δ_1 il triangolo fra $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \Delta_1^4$ per il quale il modulo dell'integrale lungo il perimetro di f sia massimo. Possiamo allora concludere che

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz \right|$$

L'argomento illustrato si può ovviamente iterare e si ottiene, per induzione, una successione di triangoli Δ_n con

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \ldots$$

e tali che per ogni $n \geq 0$ risulti:

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right|$$

e

$$L(\partial\Delta_n) = 2^{-1}L(\partial\Delta_{n-1}) = \ldots = 2^{-n}L(\partial\Delta).$$

Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} diam(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} diam(\Delta) = 0$$

e quindi per il Teorema di Cantor (vedi l'Appendice a questa sezione) per qualche $z_0 \in \Delta$ si ha

$$\bigcap_{n\geq 0} \Delta_n = \{z_0\}.$$

Si fissi $\epsilon > 0$ arbitrario. Dato che f è olomorfa, esiste $\delta > 0$ tale che se $0 < |z - z_0| < \delta$ si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon$$

e quindi per $|z - z_0| < \delta$

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon |z - z_0|.$$

Sia n grande abbastanza in modo che $diam(\Delta_n) < \delta$. La funzione affine definita da $z \to f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ ha primitiva olomorfa su $\mathbb{C}$ e quindi ha integrale nullo lungo $\partial\Delta_n$. Dunque

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| &= \left| \int_{\partial\Delta_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]dz \right| \leq \epsilon \int_{\partial\Delta_n} |z - z_0| dz \\ &\leq \epsilon \max_{\partial\Delta_n} |z - z_0| L(\partial\Delta_n) \leq \epsilon [L(\partial\Delta_n)]^2 = \epsilon 4^{-n} [L(\partial\Delta)]^2. \end{aligned}$$

e possiamo concludere

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| \leq 4^n \epsilon 4^{-n} [L(\partial\Delta)]^2 = \epsilon [L(\partial\Delta)]^2.$$

Per l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$ la tesi è dimostrata. $\square$

Nelle applicazioni è utile la seguente versione (apparentemente più forte) del Teorema di Goursat 3.2.6:

Proposizione 3.2.7: *Siano Δ un triangolo chiuso in $\mathbb{C}$, $a \in \Delta$ e $U \supset \Delta$ un aperto. Se $f\colon U \to \mathbb{C}$ è una funzione continua su U e olomorfa su $U \setminus \{a\}$, allora*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Dimostrazione: Siano z_0, z_1, z_2 i vertici del triangolo Δ.

I Caso. Il punto a coincide con uno dei vertici di Δ.

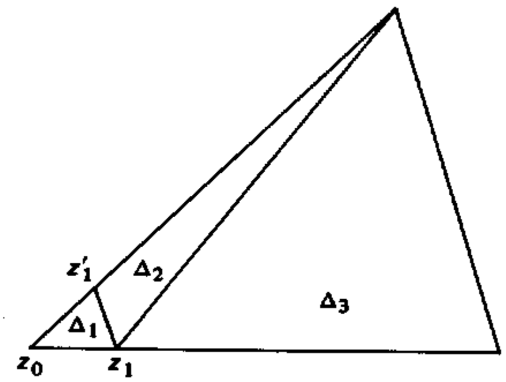

Fig. 3.2

Supponiamo ad esempio che $a = z_0$. Siano z_3, z_4 punti scelti rispettivamente sui segmenti $[z_0, z_1]$ e $[z_0, z_2]$ (esclusi gli estremi). Siano Δ_1, Δ_2 e Δ_3 i triangoli chiusi rispettivamente di vertici z_1, z_2, z_3, z_2, z_4, z_3 e z_0, z_3, z_4. Allora

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| &= \left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)dz\right| \\ &= \left|\int_{\partial\Delta_3} f(z)dz\right| \le \max_{\Delta_3} |f| L(\partial\Delta_3).\end{aligned}$$

Dato che per $z_3, z_4 \to z_0$ si ha $L(\partial\Delta_3) \to 0$, in questo caso, la tesi segue immediatamente.

II Caso. Il punto a è interno a uno dei lati di Δ.

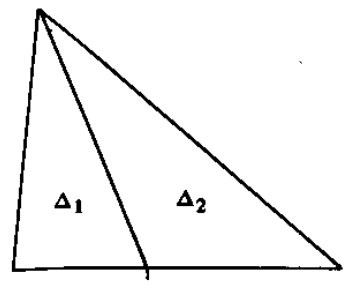

Fig. 3.3

Sia, ad esempio, $a \in [z_0, z_1]$. Se Δ_1 e Δ_2 sono i triangoli chiusi rispettivamente di vertici z_0, a, z_2 e a, z_1, z_2, allora

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz$$

e quindi la tesi segue applicando due volte il caso precedente.

III Caso. Il punto a è interno al triangolo Δ.

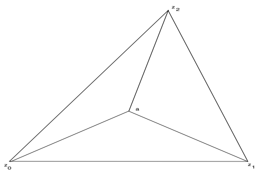

Fig. 3.4

Siano Δ_1 il triangolo chiuso di vertici z_0, z_1, a, Δ_2 il triangolo chiuso di vertici a, z_1, z_2 e Δ_3 il triangolo chiuso di vertici z_2, z_0, a. Dato che

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)dz,$$

la tesi segue di nuovo dal primo caso.

$\square$

Come conseguenza, utilizzando la Proposizione 3.2.4 e il Corollario 3.2.5, otteniamo immediatamente

PROPOSIZIONE 3.2.8: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto convesso e $a \in A$. Se $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua su A ed olomorfa su $A \setminus \{a\}$, allora f ha una primitiva olomorfa su A.*

COROLLARIO 3.2.9: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $M \subset A$ un insieme discreto. Se $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua su A ed olomorfa su $A \setminus M$, allora f ammette primitive olomorfe locali in A.*

Abbiamo osservato già che la funzione $f(z) = \frac{1}{z}$ non ha primitive olomorfe su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. D'altra parte segue dal Corollario 3.2.9 che ammette primitive olomorfe locali.

Dalla Proposizione 3.2.8 e dalla Proposizione 3.2.2 segue una versione del Teorema integrale di Cauchy nel caso di domini convessi:

TEOREMA 3.2.10: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto convesso e $a \in A$. Se $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua su A ed olomorfa su $A \setminus \{a\}$, allora, per ogni curva C^1 a tratti chiusa $\gamma\colon I \to A$ si ha*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Osservazione 3.2.11: Si può dimostrare facilmente (esercizio!) che se A è un aperto, M una suo sottoinsieme discreto e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione continua e olomorfa su $A \setminus M$, allora, per ogni triangolo chiuso $\Delta \subset A$ risulta

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Infatti, dato che M è discreto, l'insieme $\Delta \cap M$ è un insieme finito e quindi, in modo simile a quanto fatto nella dimostrazione della Proposizione 3.2.7, si può decomporre in un'unione finita di triangoli chiusi ciascuno dei quali intersechi al più in un punto $\Delta \cap M$ e siano a due a due disgiunti o hanno un lato in comune o hanno un vertice in comune. L'integrale lungo $\partial\Delta$ di f è la somma degli integrali lungo le frontieria dei triangoli ottenuti in questo modo e ciascuno di questi, per la Proposizione 3.2.7 è nullo. Grazie a questa osservazione, segue immediatamente che, se $A \subset \mathbb{C}$ è un aperto convesso, $M \subset A$ un insieme discreto e $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua su A ed olomorfa su $A \setminus M$, allora f ammette primitiva olomorfa su A.

Il Teorema 3.2.10 permette di provare la seguente della formula di Cauchy per i dischi:

Teorema 3.2.12: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se $z_0 \in A$ e $\overline{\mathbb{D}} = \overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subset A$, per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{3.2.1}$$

Dimostrazione: Dato che $\overline{\mathbb{D}} \subset A$, esiste $\epsilon > 0$ tale che $\overline{\mathbb{D}} \subset U = \mathbb{D}(z_0, r+\epsilon) \subset A$. Per $\zeta \in U$ si definisca:

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \text{se } \zeta \neq z \\ f'(\zeta) & \text{se } \zeta = z \end{cases}.$$

Allora la funzione g è continua su U e olomorfa su $U \setminus \{z\}$. Allora per il Teorema di Cauchy 3.2.10 abbiamo

$$0 = \int_{\partial\mathbb{D}} g(\zeta)d\zeta = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Rimane allora da dimostrare che $\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$.

Per $z \in \mathbb{D}$, sia $h(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$. Allora il calcolo diretto prova che $h(z_0) = 2\pi i$. Inoltre dal Teorema 3.1.4 segue che h è olomorfa in $\mathbb{D}$ e

$$h'(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \tag{3.2.2}$$

Dato che, in un intorno aperto di $\partial\mathbb{D}$, la funzione $l(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - z)^2}$ ha primitiva olomorfa $L(\zeta) = -\frac{1}{\zeta - z}$, l'integrale in (3.2.2) è nullo e quindi $h'(z) = 0$. Dato che D è connesso, allora $h(z) = 2\pi i$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. $\square$

Utilizzando la formula di Cauchy e derivando sotto il segno d'integrale, possiamo concludere

Teorema 3.2.13: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora $f \in C^\infty(A)$, tutte le derivate di f sono funzioni olomorfe e, se $z_0 \in A$ e $\overline{\mathbb{D}} = \overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subset A$, per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha:*

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \tag{3.2.3}$$

Dimostrazione: Il risultato si dimostra applicando il Teorema 3.1.4 a (3.2.1). □

Dato che la derivata di una funzione olomorfa è una funzione olomorfa, possiamo finalmente enunciare l'estensione a funzioni continue della Proposizione 3.2.1:

Teorema 3.2.14: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) f è olomorfa;
(ii) per ogni triangolo chiuso $\Delta \subset A$ risulta $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$;
(iii) la forma $\omega = f dz$ è localmente esatta;
(iv) la funzione f ammette primitive olomorfe locali in A.

Dimostrazione: La dimostrazione a questo punto è immediata. Il fatto che $(i) \Longrightarrow (ii)$ è il teorema di Goursat; nel Corollario 3.2.5 abbiamo osservato che (ii) implica le due affermazioni equivalenti (iii) e (iv); infine se vale (iv) la funzione f, nell'intorno di ogni punto, è la derivata di una funzione olomorfa ed è quindi olomorfa su A per il Teorema 3.2.13. □

L'implicazione $(ii) \Longrightarrow (i)$ è nota in letteratura come Teorema di Morera ed è molto utile nelle applicazioni. Ne illustreremo una al termine di questo paragrafo. Presentiamo ora alcuni esempi che appartengono a una classe di risultati che vengono chiamati in letteratura di "rimovibilità di singolarità" per funzioni olomorfe. Il primo, molto semplice, di fatto l'abbiamo già dimostrato. Lo enunciamo perchè ci sarà comodo dopo:

Proposizione 3.2.15: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $M \subset A$ un insieme discreto. Se una funzione continua $f\colon A \to \mathbb{C}$ è olomorfa su $A \setminus M$, allora f è olomorfa su A.*

Dimostrazione: Di nuovo una funzione che soddisfa l'ipotesi ha primitive olomorfe locali in A. □

Possiamo ora dimostrare l'importante Teorema di Estensione di Riemann:

Teorema 3.2.16: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $z_0 \in A$. Sia $f\colon A\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa limitata su $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Allora esiste una funzione olomorfa $\hat{f}\colon A \to \mathbb{C}$ tale che $\hat{f}_{|A\setminus\{z_0\}} = f$.*

Dimostrazione: Per $z \in A$ si definisca

$$F(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & \text{se} \;\; z \neq z_0 \\ 0 \;\; \text{se} \;\; z = z_0 \end{cases}.$$

Allora F è continua su A e olomorfa su $A \setminus \{z_0\}$ e quindi è olomorfa su A. Si definisca per $z \in A$

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} & \text{se} \;\; z \neq z_0 \\ F'(z_0) \;\; \text{se} \;\; z = z_0 \end{cases}.$$

Allora $\hat{f}$ è continua su A e olomorfa su $A \setminus \{z_0\}$ e quindi è olomorfa su A. D'altra parte $\hat{f}_{|A\setminus\{z_0\}} = f$. □

Nella situazione del Teorema di Estensione di Riemann 3.2.16, il punto z_0 si dice *singolarità removibile* per f.

Concludiamo il paragrafo con un altro risultato di estensione di funzioni olomorfe, il Principio di riflessione di Schwarz. Cominciamo con un'osservazione tecnica che ha interesse proprio dato che fornisce un altro risultato di rimovibilità di singolarità nel caso di funzioni continue:

PROPOSIZIONE 3.2.17: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e L una retta in $\mathbb{C}$. Sia f una funzione continua su A e olomorfa $A \setminus L$. Allora*

(i) Per ogni triangolo chiuso Δ contenuto in A con un lato contenuto in L, si ha $\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = 0$.

(ii) La funzione f è olomorfa su A.

Dimostrazione: (i) La funzione f è continua su A e quindi uniformemente continua sul compatto $\Delta \subset A$. Sia inoltre $M = \max_{\Delta} |f|$. Siano z_0, z_1, z_2 i vertici di Δ, con $z_0, z_1 \in L$, $w_n = z_0 + \frac{1}{n}(z_2 - z_0)$ e $z_n = z_1 + \frac{1}{n}(z_2 - z_1)$. Sia Δ_n il triangolo di vertici w_n, z_n, z_2. Allora per il Teorema di Goursat l'integrale lungo $\partial\Delta_n$ è zero per ogni n. Allora

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = \int_{[z_0,z_1]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z_1,z_n]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z_n,w_n]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[w_n,z_0]} f(\zeta)d\zeta.$$

Si fissi $\epsilon > 0$ arbitrario. Allora se $n > N_1 = \max\left\{\frac{4M|z_1-z_0|}{\epsilon}, \frac{4M|z_2-z_0|}{\epsilon}\right\}$

$$\left|\int_{[z_1,z_n]} f(\zeta)d\zeta\right| \leq M\frac{|z_1 - z_0|}{n} < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{e} \quad \left|\int_{[w_n,z_0]} f(\zeta)d\zeta\right| \leq M\frac{|z_2 - z_0|}{n} < \frac{\epsilon}{4}.$$

Usando il fatto che $z_n - w_n = (z_1 - z_0) - \frac{1}{n}(z_1 - z_0)$, e posto

$$h_n(t) = [f(z_0 + t(z_1 - z_0)) - f(w_n + t(z_n - w_n))](z_1 - z_0),$$

abbiamo inoltre

$$\left| \int_{[z_n,w_n]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z_0,z_1]} f(\zeta)d\zeta \right| = \left| \int_{[z_0,z_1]} f(\zeta)d\zeta - \int_{[w_n,z_n]} f(\zeta)d\zeta \right|$$
$$\leq \left| \int_0^1 h_n(t)dt \right| + \left| \int_0^1 f(w_n + t(z_n - w_n)) \frac{z_1 - z_0}{n} dt \right|.$$

Per $n > N_2 = \frac{4M|z_1 - z_0|}{\epsilon}$

$$\left| \int_0^1 f(w_n + t(z_n - w_n)) \frac{z_1 - z_0}{n} dt \right| \leq M \frac{|z_1 - z_0|}{n} < \frac{\epsilon}{4}.$$

D'altra parte, per l'uniforme continuità di f su Δ, per ogni $\epsilon > 0$ esiste δ tale che per $a, b \in \Delta$ con $|a - b| < \delta$ si ha $|f(a) - f(b)| < \frac{\epsilon}{4}$. Dato che, ancora per $n > N_3 = \frac{|z_1 - z_0| + |z_n - z_0|}{\delta}$, si ha

$$|z_0 + t(z_1 - z_0) - (w_n + t(z_n - w_w))| \leq \frac{|z_2 - z_0| + t|z_1 - z_0|}{n} \leq \frac{|z_2 - z_0| + |z_1 - z_0|}{n} < \delta$$

allora $|h_n(t)| < \frac{\epsilon}{4}$ e $\left| \int_0^1 h_n(t)dt \right| < \frac{\epsilon}{4}$ per $n > N_3 = \frac{|z_1 - z_0|}{\delta}$.

Riassumendo allora, per $n > \max\{N_1, N_2 N_3\}$, si ha

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta \right| \leq \left| \int_{[z_0,z_1]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z_n,w_n]} f(\zeta)d\zeta \right| + \left| \int_{[z_1,z_n]} f(\zeta)d\zeta \right| + \left| \int_{[w_n,z_0]} f(\zeta)d\zeta \right|$$
$$< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$, possiamo concludere che $\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = 0$ come desiderato.

Il punto (ii) segue immediatamente dal Teorema di Morera e dal punto (i). I dettagli sono lasciati al lettore. □

E ora l'annunciato risultato di estensione:

Teorema 3.2.18: (Principio di riflessione di Schwarz) *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto simmetrico rispetto all'asse reale ossia tale che se $z \in A$ allora $\overline{z} \in A$. Sia f una funzione continua su $\{z \in A \mid Im\,(z) \geq 0\}$, olomorfa su $\{z \in A \mid Im\,(z) > 0\}$ e che assume valori reali su $\{z \in A \mid Im\,(z) = 0\}$. Dimostrare che la funzione $\hat{f}\colon A \to \mathbb{C}$ definita da*

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) \text{ se } Im\,(z) \geq 0 \\ \overline{f(\overline{z})} \text{ se } Im\,(z) \leq 0 \end{cases}$$

è olomorfa su A.

Dimostrazione: La funzione $\hat{f}(z)$ è continua dato che, è ben definita ed è continua su $A^+ = \{z \in A \mid Im\,(z) \geq 0\}$ e su $A^- = \{z \in A \mid Im\,(z) \leq 0\}$ che sono due chiusi di A la cui unione è A. Il fatto che $\hat{f}(z)$ è olomorfa è allora conseguenza del Lemma 3.2.17. Infatti $\hat{f}(z)$ è olomorfa su $A^+ \setminus \mathbb{R}$ per ipotesi ed è olomorfa su $A^- \setminus \mathbb{R}$ dato che ivi è di classe C^1 e soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann (i semplici dettagli sono lasciati al lettore). $\square$

APPENDICE

Per la dimostrazione del Teorema di Goursat 3.2.6, è necessario il seguente Teorema di Cantor:

Teorema 3.2.19: *Uno spazio metrico (X, d) è completo se e solo se per ogni successione di chiusi non vuoti $\{F_n\}_{n\geq 0}$ con $F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$ e $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$ esiste $x \in X$ tale che si abbia*

$$\bigcap_{n\geq 0} F_n = \{x\}.$$

Dimostrazione: Supponiamo che (X, d) sia uno spazio metrico completo. Se $\{F_n\}_{n\geq 0}$ è una successione di chiusi non vuoti con $F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$ e $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$, si scelga $x_n \in F_n$ per ogni $n \geq 0$. Dato che se $n, m \geq N$ si ha $x_m, x_n \in F_N$, allora

$$0 \leq \lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) \leq \lim_{N\to\infty} diam(F_N) = 0$$

e quindi la successione $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy. Dunque esiste

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X.$$

Dato che per ogni N se $n \geq N$ si ha $x_n \in F_n \subset F_N$ e F_N è chiuso, allora $x \in F_N$ per ogni N e quindi $x \in \bigcap_{N\geq 0} F_N$. Se infine $x' \in \bigcap_{n\geq 0} F_n$, allora per ogni n si ha $x, x' \in F_n$ e $0 \leq d(x, x') \leq diam(F_n) \to 0$ da cui segue che $d(x, x') = 0$.

Supponiamo viceversa che per ogni successione di chiusi non vuoti $\{F_n\}_{n\geq 0}$ con $F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$ e $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$ esista $x \in X$ tale che si abbia

$$\bigcap_{n\geq 0} F_n = \{x\}$$

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy. Per ogni n si definisca $F_n = \overline{\{x_k\}_{k\geq n}}$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste N tale che se $m, n > N$ si ha $d(x_m, x_n) < \epsilon$ e quindi se $n > N$ si ha $diam(F_n) = diam(\{x_k\}_{k\geq n}) < \epsilon$ e quindi $diam(F_n) \to 0$ per $n \to \infty$. Dato che per costruzione $F_n \supset F_{n+1}$ per ogni n, allora $\bigcap_{n\geq 0} F_n = \{x\}$ per qualche $x \in X$. Dato che $x \in F_n$ per ogni n allora $d(x, x_n) \leq diam(F_n) \to 0$. $\square$

Esercizi.

1. Sia f una funzione olomorfa in un aperto contente un disco chiuso $\overline{D}$. Calcolare $\int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ per $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$. *Consiglio: La funzione* $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ *è olomorfa su un disco* A *che contiene* $\overline{D}$ *e non contiene* z. *Allora per il Teorema 3.2.10....*

2. Dimostrare che una funzione continua f è olomorfa su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ se e solo se per ogni rettangolo chiuso $R \subset A$ si ha $\int\limits_{\partial R} f(z)dz = 0$. *Consiglio: la parte cruciale è dimostrare che se l'integrale sulla frontiera di un qualunque rettangolo in* A *è zero, allora la funzione ha primitive olomorfe locali. Questo si dimostra come nelle Proposizione 3.2.2 e Proposizione 3.2.4 osservando che in un disco si possono sempre congiungere due punti mediante spezzate composte di segmenti paralleli agli assi reale e immaginario.*

3. Fornire i dettagli della dimostrazione delle affermazioni contenute nell'Osservazione 3.2.11

4. Completare la dimostrazione del punto (ii) del Lemma 3.2.17.

5. Fornire i dettagli mancanti alla dimostrazione del Teorema 3.2.18.

6. Dimostrare la seguente variante del Principio di riflessione di Schwarz: Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto simmetrico rispetto all'asse reale ossia tale che se $z \in A$ allora $\overline{z} \in A$. Sia f una funzione continua non nulla su $\{z \in A \mid Im(z) \geq 0\}$, olomorfa su $\{z \in A \mid Im(z) > 0\}$ e tale che se $z \in \{z \in A \mid Im(z) = 0\}$ si ha $|f(z)| = 1$. Allora la funzione $\hat{f}\colon A \to \mathbb{C}$ definita da

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) \text{ se } Im(z) \geq 0 \\ \\ \frac{1}{\overline{f(\overline{z})}} \text{ se } Im(z) \leq 0 \end{cases}$$

è olomorfa su A.

7. Dimostrare questa ulteriore variante del Principio di riflessione di Schwarz: Sia f una funzione continua sulla chiusura disco unitario $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ olomorfa sul disco $\mathbb{D}$ e tale che per ogni $z \in \partial\mathbb{D}$ risulti $|f(z)| = 1$. Allora esiste un aperto $A \subset \mathbb{C}$ contenente $\overline{\mathbb{D}}$ e una funzione olomorfa $\hat{f}\colon A \to \mathbb{C}$ che estende f ossia tale che $\hat{f}(z) = f(z)$ per ogni $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

3.3. Sviluppi in serie e prolungamento analitico.

In questo paragrafo dimostreremo che ogni funzione olomorfa di può sviluppare localmente in serie di potenze e trarremo da questo fatto alcune immediate conseguenze.

Cominciamo esaminando da vicino il nucleo integrale $\frac{1}{\zeta - z}$ che compare nell'integrale di Cauchy. Fissato z_0, per qualche $r > 0$, siano $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$ e $\zeta \in \partial\mathbb{D}(z_0, r)$. Si ha allora,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \frac{1}{\zeta - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Se f è una funzione olomorfa su un aperto contenente $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$ allora

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \tag{3.3.1}$$

dove, dato che f è limitata su $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$ e $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$, la convergenza in (3.3.1) è uniforme sul compatto $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$. Allora utilizzando la formula di Cauchy e scambiando serie e integrale si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right] d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Posto allora

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

si ha per $|z - z_0| < r$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{3.3.2}$$

e, per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie (3.3.2) ha raggio di convergenza $\geq r$. Riassumendo abbiamo dimostrato il seguente

Teorema 3.3.1: *Sia f una funzione olomorfa su un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Se $z_0 \in A$ e $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subset A$, allora*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{3.3.3}$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

e il raggio di convergenza di (3.3.3) è $\geq r$.

Grazie al teorema 3.3.1 possiamo concludere la seguente caratterizzazione delle funzioni olomorfe:

Teorema 3.3.2: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f\colon A \to \mathbb{C}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti*
(i) f *è olomorfa su* A*;*
(ii) f *ammette primitive olomorfe locali in* A*;*
(iii) f *è analitica complessa su* A*;*
(iv) f *è di classe* C^1 *e soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann su* A*.*

Conconcludiamo il paragrafo con una importante conseguenza del Teorema 3.3.1.

Definizione 3.3.1: Sia $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Si dice che f ha uno *zero di ordine* $n > 0$ (oppure che ha *molteplicità* $n > 0$) in $a \in A$ se

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ e } f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Diremo che f ha uno *zero di ordine* ∞ in $a \in A$ se $f^{(n)}(a) = 0$ per ogni n.

Teorema 3.3.3: *Sia $f\colon A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) f *ha uno zero di ordine* n *in* $a \in A$*;*
(ii) se $\mathbb{D}(a, r) \subset A$ *e* $z \in \mathbb{D}(a, r)$*, allora* $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^k$ *e* $a_n \neq 0$*;*
(iii) esiste una funzione olomorfa $g\colon A \to \mathbb{C}$ *tale che* $g(a) \neq 0$ *e* $f(z) = (z-a)^n g(z)$ *per ogni* $z \in A$*.*

Dimostrazione: Esercizio! □

E' molto semplice dimostrare che due polinomi di una variabile complessa sono uguali se e solo se assumono lo stesso valore in un numero abbastanza grande (finito!) di punti oppure se e solo se in un punto hanno le derivate, fino a un ordine sufficientemente alto, coincidenti. Questa proprietà si può opportunamente estendere alle funzioni olomorfe. Abbiamo il seguente importante risultato come *Principio del Prolungamento Analitico*:

Teorema 3.3.4: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e f, g due funzioni olomorfe su A. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) $f(z) = g(z)$ *per ogni* $z \in A$*;*
(ii) esiste $a \in A$ *tale che* $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ *per ogni* n*;*
(iii) esiste un sottoinsieme $N \subset A$ *con un punto d'accumulazione* $a \in A$ *tale che* $f(z) = g(z)$ *per ogni* $z \in N$*.*

Dimostreremo la seguente formulazione equivalente del Teorema 3.3.4:

Teorema 3.3.5: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e f una funzione olomorfa su A. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) $f(z) = 0$ *per ogni* $z \in A$*;*
(ii) esiste $a \in A$ *tale che* f *ha uno zero di ordine* ∞ *in* a*;*
(iii) esiste un sottoinsieme $E \subset A$ *con un punto d'accumulazione* $a \in A$ *tale che* $f(z) = 0$ *per ogni* $z \in E$*.*

Dimostrazione: Evidententemente $(i) \Longrightarrow (iii)$. Dimostriamo $(iii) \Longrightarrow (ii)$. Sia $a \in A$ un punto di accumulazione per un insieme $E \subset A$ tale che $f(z) = 0$ per ogni

$z \in E$. Esiste allora una successione z_n di punti di E con $z_n \to a$ e $z_n \neq a$ per ogni n. Allora $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$. Dunque in un disco centrato in a vale lo sviluppo

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z-a)^k. \tag{3.3.4}$$

Per dimostrare che vale (ii) proveremo per induzione che $a_k = 0$ per ogni k. Supponiamo che $a_0 = \ldots = a_{N-1} = 0$. Allora

$$f(z) = \sum_{k=N}^{\infty} a_k (z-a)^k = (z-a)^N (a_N + a_{N+1}(z-a) + \ldots)$$

e quindi, per n sufficientemente grande affinché in z_n valga lo sviluppo (3.3.4),

$$0 = f(z_n) = (z_n - a)^N (a_N + a_{N+1}(z_n - a) + \ldots).$$

Dunque

$$0 = (a_N + a_{N+1}(z_n - a) + \ldots)$$

da cui segue che $a_N = 0$ passando al limite per $n \to \infty$.

Rimane da dimostrare che $(ii) \implies (i)$. Sia a uno zero di ordine ∞. Allora $f^{(k)}(a) = 0$ per ogni k. Sia

$$M = \{z \in A \mid f^{(k)}(z) = 0 \; \forall\, k \geq 0\}.$$

Allora M è non vuoto dato che $a \in M$. Inoltre, dato che è intersezione di chiusi, M è un chiuso. Sia $z_0 \in M$. Allora in un disco aperto $\mathbb{D}$ centrato in z_0 e contenuto in A vale lo sviluppo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

e quindi $\mathbb{D} \subset M$ e, per l'arbitrarietà di $z_0 \in M$, segue che M è aperto. Ma allora dato che M è un sottoinsieme aperto e chiuso non vuoto del connesso A, deve essere $A = M$.

$\square$

Concludiamo sottolineando un'importante conseguenza del Principio del Prolungamento Analitico sulla struttura dell'insieme degli zeri di una funzione olomorfa:

Corollario 3.3.6: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e f una funzione olomorfa su A non identicamente nulla. L'insieme degli zeri di f è discreto.*

Esercizi.

1. Dimostrare il Teorema 3.3.3.

2. Sia f una funzione intera. Dimostrare che assume valori reali su $\mathbb{R}$, ossia $f(x) \in \mathbb{R}$ se $x \in \mathbb{R}$ se, e solo se, $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

3. Sia $\sum\limits_{k\geq 0} b_k z^k$ una serie di potenze uniformemente convergente sui compatti del disco $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ per qualche $r > 0$ e, per $z \in \mathbb{D}$, sia $f(z)$ la sua somma. Se per qualche $\delta \in (0, r)$ si ha $f(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in (-\delta, \delta)$, dimostrare che $b_k \in \mathbb{R}$ per ogni $k \geq 0$.

4. Se f è una funzione intera pari, ossia tale che $f(z) = f(-z)$ per ogni z, e $f(z) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k z^k$ è il suo sviluppo in serie di potenze nell'origine, dimostrare che $a_{2k+1} = 0$ per ogni k. Se, invece, f è una funzione intera dispari, ossia tale che $f(z) = -f(-z)$ per ogni z, e $f(z) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k z^k$ è il suo sviluppo in serie di potenze nell'origine, dimostrare che $a_{2k} = 0$ per ogni k.

5. a) Siano f e g due funzioni olomorfe in un intorno di un punto z_0. Dimostrare che

$$\frac{(fg)^{(n)}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!} \frac{g^{(n-k)}}{(n-k)!}.$$

b) Siano f e g due funzioni olomorfe su un disco $\mathbb{D} = \mathbb{D}(z_0, r)$ e siano $f(z) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k z^k$ e $g(z) = \sum\limits_{k\geq 0} b_k z^k$ i loro sviluppi in serie di potenze su $\mathbb{D}$. Se $f(z)g(z) = \sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ è lo sviluppo in serie di potenze nell'origine del prodotto, dimostrare che $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

6. Dimostrare che non esiste una funzione olomorfa f definita sul disco $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ tale che per ogni intero $n \geq 2$ si abbia

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} = f\left(-\frac{1}{n}\right).$$

7 a) Dimostrare che non esiste una funzione olomorfa f sul disco unitario $\mathbb{D}$ tale che per ogni intero $n \geq 2$ si abbia $f(\frac{1}{n}) = e^{-n}$. *(Consiglio: cercare di capire come si dovrebbe comportare f in* 0*)*

b) Trovare tutte le funzioni olomorfe g sul disco unitario $\mathbb{D}$ tale che per ogni intero $n \geq 2$ si abbia $\left|g(\frac{1}{n})\right| \leq e^{-n}$.