

CAPITOLO 4

Formula di Cauchy globale, Singularità, Residui

4.1. La formula di Cauchy per funzioni di classe C^1

Dopo aver dimostrato che le funzioni olomorfe sono di classe C^1 , anzi in effetti di classe C^∞ , possiamo approfittare in pieno della formula di Gauss-Green, che ricordiamo, nella notazione complessa presentata nel Teorema 3.1.7 ci assicura che per un aperto $A \subset \mathbb{C}$ limitato tale che la frontiera ∂A di A è unione disgiunta finita di curve semplici chiuse C^1 a tratti, se $f \in C^1(\overline{A})$ è una funzione a valori complessi, allora

$$\int_{\partial A} f(z) dz = 2i \int_A f_{\bar{z}}(z) dx dy. \quad (4.1.1)$$

e quindi, di conseguenza, implica il Teorema di Cauchy 3.1.8 che asserisce che se $f \in C^1(\overline{A})$ è olomorfa su A , allora

$$\int_{\partial A} f(z) dz = 0. \quad (4.1.2)$$

In particolare dal Teorema 3.1.7 si ottiene la seguente utilissima *formula integrale di Cauchy per funzioni C^1* :

TEOREMA 4.1.1: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato tale che la frontiera ∂A di A sia unione disgiunta finita di curve semplici chiuse C^1 a tratti. Se $f \in C^1(\overline{A})$, allora, denotando $\zeta = \xi + i\eta$, per ogni $z \in A$ si ha*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_A \frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta. \quad (4.1.3)$$

Dimostrazione: Sia $z \in A$ fissato e sia $r > 0$ tale che $\mathbb{D}_r = \mathbb{D}(z, r) \subset \overline{\mathbb{D}(z, r)} \subset A$. Se si definisce $A_r = A \setminus \overline{\mathbb{D}_r}$ allora, come catene, $\partial A_r = \partial A - \partial \mathbb{D}_r$, dove nell'ultima eguaglianza si è tenuto conto dell'orientazione. Allora applicando la formula di Gauss-Green, si ottiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_{A_r} \frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta. \quad (4.1.4)$$

Si osservi che la funzione $\frac{f_{\bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z}$ è continua su A_r per ogni $r > 0$, che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{A_r} \frac{f_{\bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta = \frac{1}{\pi} \int_A \frac{f_{\bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \quad (4.1.5)$$

e che il limite è finito. Inoltre

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = f(z)$$

mentre

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} L(\partial \mathbb{D}_r) \max_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} = \max_{\partial \mathbb{D}_r} |f(\zeta) - f(z)|.$$

Dunque

$$f(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (4.1.6)$$

e quindi, da (4.1.4), (4.1.5), (4.1.6), si ottiene

$$f(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_A \frac{f_{\bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta.$$

□

Dal Teorema 4.1.1 segue immediatamente la *formula integrale di Cauchy per funzioni olomorfe*:

TEOREMA 4.1.2: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato tale che la frontiera ∂A di A sia unione disgiunta finita di curve semplici chiuse C^1 a tratti. Se $f \in C^1(\bar{A})$ è una funzione olomorfa su A , allora per ogni $z \in A$ e $n \geq 0$ si ha*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (4.1.7)$$

4.2. Sviluppi di Laurent

Come, utilizzando la formula di Cauchy per i dischi abbiamo ottenuto lo sviluppo in serie potenze di una funzione olomorfa nel disco, in questo paragrafo, utilizzando la formula di Cauchy più generale nel caso di anelli, faremo vedere come sia possibile ottenere uno sviluppo in serie di potenze in presenza di una singolarità di una funzione olomorfa. L'idea chiave è di cercare uno sviluppo che coinvolga sia potenze con esponente positivo sia potenze con esponente negativo. Siano $a \in \mathbb{C}$ e $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$. Sia

$$A(a, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - a| < r_2\}$$

la corona circolare centrata in a con raggi r_1, r_2 . Utilizzando la formula di Cauchy dimostreremo che una funzione olomorfa f su una corona circolare $A(a, r_1, r_2)$ ammette uno sviluppo in serie di Laurent per $z \in A(a, r_1, r_2)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Precisamente abbiamo il seguente

TEOREMA 4.2.1: *Siano $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ e f una funzione olomorfa sulla corona circolare $A(a, r_1, r_2)$. Allora per $z \in A(a, r_1, r_2)$ si ha*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (4.2.1)$$

dove la serie (4.2.1) converge uniformemente sui compatti contenuti in $A(a, r_1, r_2)$. Inoltre i coefficienti c_n che compaiono in (4.2.1) sono unicamente determinati da

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad (4.2.2)$$

con $r_1 < r < r_2$ arbitrario.

Dimostrazione: Per semplificare le notazioni, diamo la dimostrazione per $a = 0$ e denotiamo $A(r_1, r_2) = A(0, r_1, r_2)$. Preliminarmente osserviamo che i coefficienti c_n definiti in (4.2.2) non dipendono da r . Infatti, dato che la funzione $\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$ è olomorfa su $A(r_1, r_2)$, se $r, r' \in (r_1, r_2)$ con $r' < r$, allora, per il Teorema di Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = 0.$$

Sia $z \in A(r_1, r_2)$. Allora esistono numeri ρ_1, ρ_2 tali che $r_1 < \rho_1 < |z| < \rho_2 < r_2$. Allora, la formula integrale di Cauchy assicura che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Come nel caso degli sviluppi in serie di Taylor, cercheremo di sviluppare in serie gli integrali che appaiono nella formula di Cauchy.

Sia allora $|\zeta| = \rho_2$. Se $|z| < \rho_2 < r_2$ allora $\left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1$ e si ha:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

e la serie converge uniformemente sul compatto $\{|\zeta| = \rho_2\}$. Integrando la serie, possiamo allora concludere che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right] z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

dove la serie converge uniformemente in ogni compatto contenuto in $|z| < \rho_2$ e quindi, dato che $\rho_2 < r_2$ è arbitrario, in ogni compatto contenuto in $|z| < r_2$.

Supponiamo ora che $|\zeta| = \rho_1$. Allora, per $r_1 < \rho_1 < |z|$, si ha $\left|\frac{\zeta}{z}\right| < 1$ e quindi:

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m}{z^{m+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

dove si è posto $n = -m - 1$. Si osservi che la serie converge uniformemente sul compatto $\{|\zeta| = \rho_1\}$. Integrando la serie, possiamo allora concludere che

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_1} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n \right] d\zeta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right] z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n \end{aligned}$$

dove la serie converge uniformemente in ogni compatto contenuto $|z| > \rho_1$ e quindi, dato che $r_1 < \rho_1$ è arbitrario, in ogni compatto contenuto in $|z| > r_1$. Dunque possiamo concludere che per ogni $z \in A(r_1, r_2)$ sia ha

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

dove i c_n sono dati dalla (4.2.2) e che la serie converge uniformemente sui compatti contenuti in $A(r_1, r_2)$.

Rimane da dimostrare che i coefficienti di una serie di Laurent sono unicamente determinati. Supponiamo che lo sviluppo in serie di Laurent di una funzione olomorfa f su $A(r_1, r_2)$ sia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Dato che

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

se $r_1 < r < r_2$, per ogni $m \in \mathbb{Z}$ abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}c_m &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{m+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi r^m} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-im\theta} d\theta \\&= \frac{1}{2\pi r^m} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^n e^{i(n-m)\theta} d\theta \\&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{n-m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = a_m.\end{aligned}$$

□

4.3. Singolarità di funzioni olomorfe e funzioni meromorfe

In questo paragrafo ci occuperemo di funzioni olomorfe con singolarità isolate ossia olomorfe sul complemento di un sottoinsieme discreto di un aperto. Cominciamo definendo la nozione di funzione meromorfa:

DEFINIZIONE 4.3.1: Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una *funzione meromorfa* su A è una funzione olomorfa $f: A \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$, dove E è un sottoinsieme discreto di A , tale che per ogni punto $a \in A$ esistono un disco $\mathbb{D}_a = \mathbb{D}(a, r)$ tale che $\mathbb{D}_a \subset A$ e $\mathbb{D}_a \cap E \subset \{a\}$ e due funzioni g, h olomorfe su \mathbb{D}_a , con h non identicamente nulla, tali che si abbia $hf = g$ su $\mathbb{D}_a \setminus \{a\}$. Gli elementi dell'insieme E si dicono *poli* di f .

In parole povere, una funzione meromorfa è una funzione olomorfa sul complemento di un insieme discreto che localmente si può scrivere come quoziente di due funzioni olomorfe. È inoltre evidente dalla definizione che per verificare che una funzione è meromorfa si procede localmente. Infatti se $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e f è una funzione a valori complessi definita sul complemento in A di un insieme discreto, allora f è una funzione meromorfa se per ogni punto $a \in A$ esiste un intorno aperto V tale che o f ha una estensione olomorfa su tutto V oppure f è meromorfa su V .

Ovviamente una funzione olomorfa è meromorfa: per insieme E dei poli si può scegliere un arbitrario insieme discreto e si prendono $h \equiv 1$ e $g \equiv f$.

Un esempio più interessante è dato dalle funzioni razionali. Siano $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ due polinomi complessi, e supponiamo che $Q(z) = b(z - b_1)^{m_1} \dots (z - b_k)^{m_k}$ dove b_1, \dots, b_k sono gli zeri di Q di molteplicità rispettivamente m_1, \dots, m_k . Allora la funzione $f = \frac{P}{Q}$ è olomorfa sul complemento in \mathbb{C} dell'insieme discreto $E = \{b_1, \dots, b_k\}$. Ovviamente nell'intorno di ogni punto si ha $Qf = P$ e quindi la funzione f è meromorfa su \mathbb{C} con poli esattamente gli zeri del polinomio Q . È inoltre semplice avere informazioni sullo sviluppo di Laurent della funzione f centrato in uno dei poli. Infatti, fissato uno dei suoi poli b_j , sia \mathbb{D} un disco centrato in b_j che non contiene altri poli di f . Allora per $z \in \mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{b_j\}$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{(z - b_j)^{m_j}} g(z)$$

dove g è una funzione olomorfa su \mathbb{D} . Allora, dato che g ha uno sviluppo in serie di Taylor centrato in b_j che converge uniformemente sui compatti contenuti in \mathbb{D} , si ha per $z \in \mathbb{D}^*$:

$$f(z) = \frac{1}{(z - b_j)^{m_j}} g(z) = \frac{1}{(z - b_j)^{m_j}} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{c}_k (z - b_j)^k = \sum_{n=-m_j}^{\infty} c_n (z - b_j)^n$$

dove si è posto $c_n = \hat{c}_{n+m_j}$. In particolare la serie di Laurent di una funzione razionale centrata in un polo ha solo un numero finito di termini con esponente negativo. Questa è una caratteristica precisa dei poli di una funzione meromorfa:

TEOREMA 4.3.1: Sia $a \in \mathbb{C}$, \mathbb{D} un disco centrato in a e $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{a\}$. Sia f una funzione olomorfa su \mathbb{D}^* e sia $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$ il suo sviluppo di Laurent centrato in a . Allora f è meromorfa su \mathbb{D} se e solo se esiste un intero positivo $N \geq 0$ tale che $c_n = 0$ per ogni $n < -N$.

Dimostrazione: Supponiamo che f sia meromorfa su \mathbb{D} . Allora esistono un disco U centrato in a e funzioni olomorfe g, h su U con $h \not\equiv 0$, tali che su $U^* = U \setminus \{a\}$ si ha $hf = g$. Dato che $h \not\equiv 0$, per qualche intero $N \geq 0$ si ha $h(z) = (z - a)^N \phi(z)$ dove ϕ è una funzione olomorfa che, a meno di prendere U con un raggio un po' più piccolo, non ha zeri in U . La funzione $\frac{g}{\phi}$ è olomorfa su U e ha uno sviluppo in serie di Taylor uniformemente convergente sui compatti contenuti in U :

$$\frac{g(z)}{\phi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - a)^k.$$

Dunque, lo sviluppo in serie di Laurent di f su U^* , e quindi su \mathbb{D}^* è dato da

$$f(z) = (z - a)^{-N} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - a)^k = \sum_{n=-N}^{\infty} \tilde{a}_n (z - a)^n$$

dove si è posto $\tilde{a}_n = a_{n+N}$ e quindi la prima implicazione è dimostrata.

Viceversa se, per $z \in \mathbb{D}^*$ vale lo sviluppo $f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z - a)^n$, allora $(z - a)^N f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-N} (z - a)^n$ è una funzione olomorfa su \mathbb{D} e quindi f è meromorfa su \mathbb{D} . \square

Come immediata conseguenza, deduciamo la seguente caratterizzazione delle funzioni meromorfe:

COROLLARIO 4.3.2: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $E \subset A$ un sottoinsieme discreto. Sia $f: A \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora f è una funzione meromorfa se e solo se, per ogni $a \in E$, lo sviluppo in serie di Laurent centrato in a ha solo numero finito di termini con esponente negativo.*

DEFINIZIONE 4.3.2: Sia f una funzione meromorfa e sia a un suo polo. Sia $f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z - a)^n$ il suo sviluppo di Laurent dove $c_{-N} \neq 0$. Il numero $N = \text{ord}_a(f)$ si dice ordine del polo a .

OSSERVAZIONE. Se per un polo a di una funzione meromorfa f si ha $\text{ord}_a(f) = 0$, allora a è una singolarità removibile per f .

Una caratterizzazione delle funzioni meromorfe più esplicita, in termini di limiti di funzioni, si ottiene con un poco più di lavoro:

TEOREMA 4.3.3: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $E \subset A$ un sottoinsieme discreto. Sia $f: A \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora f è una funzione meromorfa se e solo se, per ogni $a \in E$, vale una delle due seguenti condizioni:*

- (i) *Esiste un intorno aperto U di a tale che $f|_{U \setminus \{a\}}$ è una funzione limitata (e in questo caso esiste $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$ e f si estende olomorficamente su tutto U).*
- (ii) $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$.

Dimostrazione: Se si verifica (i) allora, per il Teorema di estensione di Riemann, f ha un'estensione olomorfa su a e quindi in particolare la serie di Laurent di f centrata in a non ha termini con potenze di esponente negativo. Se si verifica (ii) invece, allora esiste un intorno aperto V di a tale che, se $z \in V \setminus \{a\}$, allora $|f(z)| > 1$. Dunque la funzione $g = 1/f$ è olomorfa e limitata su $V \setminus \{a\}$ e quindi si estende a una funzione, che chiamiamo ancora g , olomorfa su tutto V . Ma allora f è meromorfa su V dato che per $z \in V \setminus \{a\}$ si ha $g(z)f(z) = 1$.

Assumiamo viceversa che f sia meromorfa e sia E l'insieme dei poli di f . Se $f \equiv 0$ non vi è nulla da dimostrare. Altrimenti sia $a \in E$; esistono un intorno aperto U di a tale che $U \cap E = \{a\}$ e due funzioni g, h olomorfe su U , con $h \not\equiv 0$, tali che si abbia $hf = g$ su $U^* = U \setminus \{a\}$. Dato che $h \not\equiv 0$ e $f \not\equiv 0$ allora anche $g \not\equiv 0$ e quindi per due interi $h, k \geq 0$ e due funzioni ϕ, ψ olomorfe su U e tali che $\phi(a), \psi(a) \neq 0$, si ha

$$h(z) = (z - a)^l \phi(z) \quad \text{e} \quad g(z) = (z - a)^k \psi(z) \quad \forall z \in U.$$

Ma allora per $z \neq a$ vicino ad a abbiamo

$$f(z) = (z - a)^{k-l} \frac{\psi(z)}{\phi(z)}$$

Se $k - l \geq 0$, allora f è limitata in un intorno di a , mentre, se $k - l < 0$, allora $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$. \square

Per come è stata costruita la topologia sulla sfera di Riemann, dal Teorema 4.3.3 segue immediatamente il seguente:

TEOREMA 4.3.4: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $E \subset A$ un sottoinsieme discreto. Sia $f: A \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora f è una funzione meromorfa se e solo se esiste una funzione continua $\hat{f}: A \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tale che $\hat{f}|_{A \setminus E} \equiv f$*

Vogliamo ora investigare un ultimo tipo di singolarità isolata per una funzione olomorfa.

DEFINIZIONE 4.3.3: Siano A un aperto, $a \in A$ un suo punto e f una funzione olomorfa su $A \setminus \{a\}$. Se f non è meromorfa su A , il punto a si dice *singolarità essenziale* di f .

È immediato riconoscere le singolarità essenziali dalla serie di Laurent: occorre che ci siano infiniti termini con potenze di esponente negativi. Questo fatto suggerisce anche come costruire esempi. Per costruire una funzione con singolarità essenziale nell'origine, basta prendere una funzione trascendente (ossia intera non polinomiale), che quindi ha sviluppo in serie di potenze centrata nell'origine con raggio di convergenza infinito e comporla con l'applicazione $z \mapsto \frac{1}{z}$. Per esempio la funzione $e^{\frac{1}{z}}$ ha singolarità essenziale nell'origine. Infatti, per $z \neq 0$,

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^n}{(-n)!}$$

dove l'ultima serie converge uniformemente sui compatti contenuti in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Come ci si poteva aspettare dall'osservazione appena fatta, il comportamento di una funzione olomorfa in un intorno di una singolarità essenziale è del tutto analogo al comportamento all'infinito di una funzione trascendente descritto nel Teorema 4.2.6. Abbiamo infatti il seguente

TEOREMA 4.3.5: (di Casorati-Weierstass) *Siano A un aperto, $a \in A$ un suo punto e f una funzione olomorfa su $A \setminus \{a\}$. Se a è una singolarità essenziale di f , allora per ogni $r > 0$ tale che $\mathbb{D}(a, r) \subset A$, se $\mathbb{D}_r^* = \mathbb{D}(a, r) \setminus \{a\}$, l'insieme $f(\mathbb{D}_r^*)$ è denso in \mathbb{C} .*

Dimostrazione: Supponiamo che per qualche $r > 0$ tale che $\mathbb{D}(a, r) \subset A$ l'insieme $f(\mathbb{D}_r^*)$ non sia denso in \mathbb{C} . Allora esiste $c \in \mathbb{C}$ e $\delta > 0$, tale che $|f(z) - c| \geq \delta$ per ogni $z \in \mathbb{D}_r^*$. Allora la funzione g definita da $g(z) = \frac{1}{f(z) - c}$ è olomorfa su \mathbb{D}_r^* e limitata dato che, per $z \in \mathbb{D}_r^*$, si ha

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - c|} \leq \frac{1}{\delta}.$$

Allora per il Teorema di estensione di Riemann, la funzione g si estende olomorfa a tutto $\mathbb{D}(a, r)$ e quindi, dato che su \mathbb{D}_r^* , si ha $gf \equiv 1 + cg$, segue, contro l'ipotesi, che f è meromorfa. \square

Alla luce di quanto dimostrato, il comportamento di una funzione olomorfa in un intorno di una sua singolarità si può allora riassumere in questo modo:

TEOREMA 4.3.6: *Siano A un aperto, $a \in A$ un suo punto e f una funzione olomorfa su $A \setminus \{a\}$. Ci sono tre possibilità mutualmente esclusive:*

- (i) *Esiste un intorno aperto U di a tale che $f|_{U \setminus \{a\}}$ è una funzione limitata: in questo caso f si estende olomorficamente su tutto U e a è una singolarità eliminabile per f .*
- (ii) *$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$, f è meromorfa e a è un polo di f .*
- (iii) *Non esiste $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)|$ e a è una singolarità essenziale per f .*

4.4. Il Teorema dei Residui e alcune applicazioni.

In questa sezione diamo la versione più semplice del Teorema dei residui e alcune importanti applicazioni.

Definizione. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $E \subset \Omega$ un insieme discreto. Sia f una funzione olomorfa su $\Omega \setminus E$. Sia $z_0 \in E$ e $r > 0$ tale che per $0 < |z - z_0| < r$ la funzione f abbia lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (4.4.1)$$

Il numero $Res_{z_0}(f) = c_{-1}$ si dice *residuo* di f in z_0 .

Ricordando come si calcolano i coefficienti di una serie di Laurent, abbiamo immediatamente la seguente:

PROPOSIZIONE 4.4.1: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $E \subset \Omega$ un insieme discreto e f una funzione olomorfa su $\Omega \setminus E$. Sia $z_0 \in E$ e $\rho > 0$ tale che $D(z_0, \rho) \subset \overline{D(z_0, \rho)} \subset \Omega$ e $\overline{D(z_0, \rho)} \cap E = \{z_0\}$. Allora*

$$Res_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz. \quad (4.4.2)$$

Per una funzione meromorfa il residuo in un polo si calcola in un modo semplice:

PROPOSIZIONE 4.4.2: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, f una funzione meromorfa su Ω e sia z_0 un polo di ordine N per f . Allora*

$$Res_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(N-1)!} \frac{\partial^{(N-1)}}{\partial z^{(N-1)}} [f(z)(z - z_0)^N]. \quad (4.4.3)$$

Dimostrazione: Se f ha un polo di ordine N in z_0 , f in un intorno di z_0 ha uno sviluppo di Laurent del tipo

$$f(z) = c_{-N}(z - z_0)^{-N} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n \quad (4.4.4)$$

e quindi per il teorema di estensione di Riemann $g(z) = (z - z_0)^N f(z)$ definisce una funzione olomorfa in un intorno di z_0 . Allora, vicino a z_0 , la g ha uno sviluppo di Taylor

$$g(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k \quad (4.4.5)$$

dove $a_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} [g(z)]|_{z=z_0}$. La (4.4.3) segue allora dal confronto di (4.4.4) e (4.4.5). \square

In molti casi è utile anche la seguente immediata osservazione:

LEMMA 4.4.3: Siano g, h due funzioni olomorfe su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ e $z_0 \in A$. Se $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ e $h'(z_0) \neq 0$, allora la funzione $f = g/h$ ha un polo di ordine 1 in z_0 e

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Dimostrazione: Per z sufficientemente vicino z_0 , si ha $h(z) = h'(z_0)(z - z_0) + H(z)(z - z_0)^2$ per qualche funzione H olomorfa in un intorno di z_0 . Dunque la funzione $f = g/h$ ha un polo di ordine 1 in z_0 e, usando (4.4.3), abbiamo

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_0}(f) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h'(z_0)(z - z_0) + H(z)(z - z_0)^2} \\ &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \end{aligned}$$

□

Come conseguenza quasi immediata della formula di Cauchy, possiamo ora dimostrare il Teorema dei Residui in una versione molto semplice ma comunque sufficiente per le applicazioni.

TEOREMA 4.4.4: (dei Residui) Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $E \subset \Omega$ un insieme discreto e f una funzione olomorfa su $\Omega \setminus E$. Sia $D \subset \Omega$ un aperto limitato con $\bar{D} \subset \Omega$ e con frontiera $\Gamma = \partial D$ unione finita di curve C^1 a tratti semplici chiuse disgiunte. Supponiamo che $E \cap \Gamma = \emptyset$ e che $D \cap E = \{z_1, \dots, z_N\}$. Allora si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z_k}(f). \quad (4.4.6)$$

Dimostrazione: Siano $\rho_1, \dots, \rho_N > 0$ tali che si abbia

$$\bar{\mathbb{D}}_k = \overline{\mathbb{D}(z_k, \rho_k)} \subset D$$

per ogni $k = 1, \dots, N$, e

$$\bar{\mathbb{D}}_k \cap \bar{\mathbb{D}}_l = \emptyset$$

per ogni $k, l = 1, \dots, N$ con $k \neq l$. Dunque se $D' = D \setminus \bigcup_{k=1}^N \bar{\mathbb{D}}_k$ e $\Gamma_k = \partial \mathbb{D}_k$ (con l'orientazione positiva), il bordo orientato di D' è dato da $\partial D' = \Gamma - \Gamma_1 - \dots - \Gamma_N$. Dato che f è olomorfa su D' , si ha

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D'} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} f(z) dz$$

e quindi (4.4.6) segue da (4.4.2). □

Il teorema dei residui fornisce uno straordinario strumento per il calcolo di molti integrali reali. Senza alcuna pretesa di voler essere esaustivi, diamo alcuni esempi per indicare il tipo di procedimento.

Esempio 1. Si consideri l'integrale del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad (4.4.7)$$

dove $P(x), Q(x)$ sono polinomi con coefficienti reali tali che Q non ha radici reali e $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$. In particolare allora l'integrale (4.4.7) esiste finito. Sia $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ la funzione razionale che estende a \mathbb{C} la funzione $\frac{P(x)}{Q(x)}$ e siano b_1, \dots, b_N i poli di $f(z)$ contenuti nel semipiano superiore $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}z > 0\}$. Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}_{b_k}(f). \quad (4.4.8)$$

Per dimostrare (4.4.8) si procede nel modo seguente. Siano $\alpha_R: [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$ e $\beta_R: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ le curve definite da

$$\alpha_R(t) = t \quad \text{e} \quad \beta_R(t) = Re^{it}$$

e sia $\gamma_R = \beta_R \alpha_R$ il cammino chiuso ottenuto componendoli. Esiste R_0 tale che per $R > R_0$ i punti b_1, \dots, b_N sono tutti contenuti nell'aperto che ha frontiera parametrizzata da β_R . Allora per il teorema dei residui, per $R > R_0$, si ha

$$\int_{\alpha_R} f(z) dz + \int_{\beta_R} f(z) dz = \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}_{b_k}(f).$$

D'altra parte

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\alpha_R} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Ci è utile la seguente semplice osservazione sul comportamento asintotico dei polinomi:

LEMMA 4.4.5: Sia $p(z) = a_0 + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n$ un polinomio di grado n . Per ogni $1 > \epsilon > 0$ esiste $R_\epsilon \geq 1$ tale che se $|z| \geq R_\epsilon$ si ha

$$(1 - \epsilon)|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq (1 + \epsilon)|a_n||z|^n. \quad (4.4.9)$$

Dimostrazione: Per $n = 0$ la stima è ovvia. Se $n \geq 1$, sia $q(z) = a_0 + \dots + a_{n-1}z^{n-1}$, in modo che $p(z) = q(z) + a_n z^n$. Ovviamente si ha

$$|a_n||z|^n - |q(z)| \leq |p(z)| \leq |a_n||z|^n + |q(z)|.$$

D'altra parte, per $|z| > 1$, si ha

$$|q(z)| \leq |a_0| + \dots + |a_{n-1}||z|^{n-1} \leq (|a_0| + \dots + |a_{n-1}|)|z|^{n-1} = \frac{|a_0| + \dots + |a_{n-1}|}{|z|}|z|^n.$$

Per $\epsilon \in (0, 1)$ si scelga $R_\epsilon = \max \left\{ 1, \frac{|a_0| + \dots + |a_{n-1}|}{\epsilon|a_n|} \right\}$. Allora, se $|z| \geq R_\epsilon$, si ha

$$|q(z)| \leq \frac{|a_0| + \dots + |a_{n-1}|}{|z|}|z|^n \leq \epsilon|a_n||z|^n$$

e quindi

$$(1 - \epsilon)|a_n||z|^n \leq |a_n||z|^n - |q(z)| \leq |p(z)| \leq |a_n||z|^n + |q(z)| \leq (1 + \epsilon)|a_n||z|^n.$$

□

Siano allora $m = \deg(P)$ e $n = \deg(Q)$. Allora, per ipotesi, $n \geq m + 2$. Inoltre, per il Lemma 4.4.5 esiste R_1 tale che, per opportune costanti $C_1, C_2 > 0$, se $|z| > R_1$, si ha

$$|P(z)| \leq C_1 |z|^m \quad \text{e} \quad |Q(z)| \geq C_2 |z|^n.$$

Dunque

$$0 \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\beta_R} f(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \max_{|z|=R} |f(z)| \pi R \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{C_1 \pi}{C_2 R} = 0$$

e quindi (4.4.8) segue.

Esempio 2. Siano $P(x, y), Q(x, y)$ polinomi con coefficienti reali tali che $Q(\cos t, \sin t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e se $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$. mediante il teorema dei residui si può calcolare

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt. \quad (4.4.10)$$

In effetti, se si pone $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$, allora $z^{-1} = \bar{z} = e^{-it} = \cos t - i \sin t$ e quindi

$$\cos t = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) = \frac{z^2 + 1}{2z} \quad \text{e} \quad \sin t = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}) = \frac{z^2 - 1}{2iz}.$$

Dunque

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right) \frac{1}{iz} dz$$

Allora, se $f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right)$ e a_1, \dots, a_N sono i poli della funzione $f(z)$ contenuti nel disco unitario $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, per il teorema dei residui si ha

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}_{a_k}(f). \quad (4.4.11)$$

Esempio 3. Molti altri integrali reali possono essere calcolati utilizzando il teorema dei residui con metodi simili a quelli applicati sopra. Ad esempio, se $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ è una funzione razionale con $P(x), Q(x)$ sono polinomi con coefficienti reali tali che Q non ha radici reali e $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$, Allora gli integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos x dx \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin x dx$$

sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ix} dx. \quad (4.4.12)$$

Sia $f(z) = R(z) e^{iz}$ l'estensione dell'integrando in (4.4.12) a una funzione meromorfa su \mathbb{C} e siano b_1, \dots, b_N i poli di $f(z)$ contenuti nel semipiano superiore \mathbb{H}^+ . Allora, ripetendo parola per parola l'argomento dell'esempio 1, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}_{b_k}(f). \quad (4.4.13)$$

Anche in questo caso, dato che gli integrali si calcolano prendendo i limiti per $R \rightarrow \infty$ dell'integrale $\int_{-R}^R R(x)e^{ix} dx$ dunque facendo il limite su un intervallo simmetrico, è cruciale il fatto che, per l'ipotesi sulla funzione razionale, l'integrale è assolutamente convergente.

Argomenti simili ma applicati con molta più prudenza, si possono adoperare nel caso in cui $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ è una funzione razionale con $P(x), Q(x)$ sono polinomi con coefficienti reali tali che Q non ha radici reali e $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$. Per esemplificare, esaminiamo un caso nel quale si sa che, anche se l'integrale del modulo della funzione, l'integrale esiste come integrale di Riemann improprio. Consideriamo l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (4.4.14)$$

Si osservi per cominciare che l'integrale (4.4.14) esiste finito. Infatti la funzione $\frac{\sin x}{x}$ ha estensione continua su tutto \mathbb{R} e quindi è integrabile su qualunque intervallo limitato. D'altra parte

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\cos x}{x^2} dx$$

e, dato che $|\frac{\cos x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$, l'integrale (4.4.14) esiste come integrale improprio su tutta la retta. Consideriamo la funzione $g(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. La funzione $g(z)$ è una funzione meromorfa su \mathbb{C} con unico polo nell'origine e tale che $\frac{\sin x}{x} = \text{Im } g(z)$. Consideriamo per ogni $R > 0$ le curve

$$\begin{aligned} \alpha_R(t) = t \quad \text{per } t \in [-R, -\frac{1}{R}] & & \beta_R(t) = \frac{e^{it}}{R} \quad \text{per } t \in [\pi, 2\pi] \\ \gamma_R(t) = t \quad \text{per } t \in [\frac{1}{R}, R] & & \delta_R(t) = Re^{it} \quad \text{per } t \in [0, \pi] \end{aligned}$$

e $\phi_R = \delta_R \gamma_R \beta_R \alpha_R$. L'integrale (4.4.14) esiste finito e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \text{Im} \left[\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{\alpha_R} g(z) dz + \int_{\gamma_R} g(z) dz \right) \right].$$

D'altra parte

$$\int_{\alpha_R} g(z) dz + \int_{\beta_R} g(z) dz + \int_{\gamma_R} g(z) dz + \int_{\delta_R} g(z) dz = \int_{\phi_R} g(z) dz = 2\pi i \text{Res}_0(g) = 2\pi i$$

dato che $\text{Res}_0(g) = 1$ come si vede subito dallo sviluppo di Laurent in 0 della funzione $g(z)$:

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^k}{k!} z^k = \frac{1}{z} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i)^{l+1}}{(l+1)!} z^l.$$

Stimiamo ora l'integrale di $g(z)$ lungo δ_R . A tal fine considereremo separatamente i tratti di δ_R contenuti nei semipiani determinati dalla retta $\{\text{Im } z = \sqrt{R}\}$. Sia $\theta_R \in (0, \frac{\pi}{2})$ l'angolo tale che $\sin \theta_R = \frac{\sqrt{R}}{R}$ siano

$$\delta_R^1: [0, \theta_R] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \delta_R^2: [\theta_R, \pi - \theta_R] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \delta_R^3: [\pi - \theta_R, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

definite da $\delta_R^j(t) = Re^{it}$ per $j = 1, 2, 3$. Allora $\delta_R = \delta_R^3 \delta_R^2 \delta_R^1$ e i sostegni di δ_R^1 e δ_R^3 sono contenuti in $\{\text{Im } z \leq \sqrt{R}\}$, mentre il sostegno di δ_R^2 è contenuto in $\{\text{Im } z \geq \sqrt{R}\}$. Per $j = 1, 3$ abbiamo la seguente stima per la lunghezza delle curve δ_R^j :

$$L(\delta_R^1) = L(\delta_R^3) = R\theta_R \leq R \tan \theta_R = \frac{R}{\sqrt{R-1}} \leq 2\sqrt{R}, \quad L(\delta_R^2) \leq L(\delta_R) = \pi R$$

dove la prima stima vale per ogni $R \geq \frac{4}{3}$. Inoltre, dato che $|g(z)| = \frac{e^{-\text{Im } z}}{|z|}$, si ha

$$\max_{\delta_R^1} |g(z)| = \max_{\delta_R^3} |g(z)| = \frac{1}{R} \quad \text{e} \quad \max_{\delta_R^2} |g(z)| = \frac{e^{-\sqrt{R}}}{R}.$$

Per R grande abbastanza, possiamo allora concludere che

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta_R} g(z) dz \right| &\leq \left| \int_{\delta_R^1} g(z) dz \right| + \left| \int_{\delta_R^2} g(z) dz \right| + \left| \int_{\delta_R^3} g(z) dz \right| \\ &\leq \max_{\delta_R^1} |g(z)| L(\delta_R^1) + \max_{\delta_R^2} |g(z)| L(\delta_R^2) + \max_{\delta_R^3} |g(z)| L(\delta_R^3) \\ &\leq \frac{2\sqrt{R}}{R} + \pi R \frac{e^{-\sqrt{R}}}{R} + \frac{2\sqrt{R}}{R} = \frac{4}{\sqrt{R}} + \pi e^{-\sqrt{R}} \end{aligned}$$

e quindi che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\delta_R} g(z) dz \right| = 0.$$

Infine

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\beta_R} g(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{i \frac{e^{it}}{R}}}{\frac{e^{it}}{R}} i \frac{e^{it}}{R} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} i \int_{\pi}^{2\pi} e^{i \frac{e^{it}}{R}} dt = \pi i.$$

Ricapitolando, dunque:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \text{Im} \left[\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{\alpha_R} g(z) dz + \int_{\gamma_R} g(z) dz \right) \right] \\ &= \text{Im} \left[\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{\alpha_R} g(z) dz + \int_{\beta_R} g(z) dz + \int_{\gamma_R} g(z) dz + \int_{\delta_R} g(z) dz \right) - \pi i \right] \\ &= \text{Im} \left[\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{\phi_R} g(z) dz \right) - \pi i \right] = \text{Im} \left[\lim_{R \rightarrow +\infty} (2\pi i) - \pi i \right] = \pi. \end{aligned}$$

La stima che serve per valutare

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\delta_R} g(z) dz \right| = 0.$$

segue facilmente dal seguente lemma utile anche per calcolare altri integrali con il metodo illustrato sopra:

LEMMA 4.4.6: (di Jordan) Si denotino $\overline{\mathbb{H}}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \geq 0\}$ e $\delta_R = \{z = Re^{i\theta} \mid \theta \in [0, \pi]\}$. Per ogni $\alpha > 0$, se h è una funzione olomorfa su un aperto contenente $\overline{\mathbb{H}}_+$ tranne al più che per un numero finito di singolarità. Se

$$\lim_{\overline{\mathbb{H}}_+ \ni z \rightarrow \infty} h(z) = 0,$$

allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\delta_R} e^{i\alpha z} h(z) dz \right| = 0.$$

Dimostrazione: Si ha

$$I_R = \int_{\delta_R} e^{i\alpha z} h(z) dz = \int_0^\pi h(Re^{i\theta}) e^{i\alpha R(\cos \theta + i \sin \theta)} i R e^{i\theta} d\theta.$$

Se $M_R = \max_{\delta_R} |h|$, dall'ipotesi su h , segue che $|M_R| \rightarrow 0$ per $R \rightarrow \infty$. Dunque ricordando che vale la stima $\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin \theta \leq \theta$ se $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, si ha

$$\begin{aligned} |I_R| &\leq RM_R \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta = 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta \leq 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\alpha R 2\theta}{\pi}} d\theta \\ &= 2RM_R \frac{\pi}{2\alpha R} [1 - e^{-\alpha R}] = M_R \frac{\pi}{\alpha} [1 - e^{-\alpha R}] \leq M_R \frac{\pi}{\alpha} \end{aligned}$$

e quindi $|I_R| \rightarrow 0$ per $R \rightarrow \infty$. □

Esempio 4. Un'altra applicazione tipica del calcolo dei residui è la somma di serie numeriche. Illustriamo qui con un esempio il tipo di tecniche che si usano. Si consideri la funzione meromorfa $\cot \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$. Dunque $\cot \pi z$ ha poli esattamente dove $\sin \pi z = 0$ e quindi per $z = n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Dato che $(\sin \pi z)' = \cos \pi z$ non si annulla per $z = n \in \mathbb{Z}$, usando il Lemma 4.4.3 si ha immediatamente che ogni $n \in \mathbb{Z}$ è un polo di ordine 1 per $\cot \pi z$ e che

$$\text{Res}_n(\cot \pi z) = \left[\frac{\cos \pi z}{\pi \cos \pi z} \right]_{z=n} = \frac{1}{\pi}. \quad (4.4.15)$$

La formula (4.4.15), vista nell'ottica del teorema dei residui, suggerisce un "metodo" per sommare serie numeriche del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Sia infatti $f(z)$ una funzione meromorfa tale che $f(n) = a_n$. Allora si vede subito che

$$\text{Res}_n(f(z) \cot \pi z) = \frac{1}{\pi} a_n.$$

Vogliamo usare questo fatto e il teorema dei residui per calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ per interi $k \geq 1$. È necessario un risultato preliminare. Sia Q_N il quadrato di vertici

$$\left(N + \frac{1}{2}\right) - i \left(N + \frac{1}{2}\right), \left(N + \frac{1}{2}\right) + i \left(N + \frac{1}{2}\right)$$

$$-\left(N + \frac{1}{2}\right) + i\left(N + \frac{1}{2}\right), -\left(N + \frac{1}{2}\right) - i\left(N + \frac{1}{2}\right).$$

Si veda Figura 4.1 per un disegno.

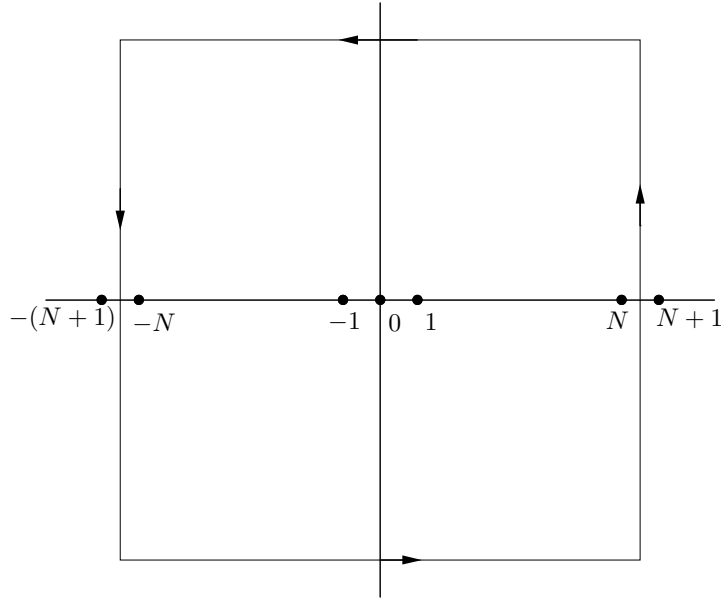


Fig. 4.1

LEMMA 4.4.7: *Esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni intero positivo N per $z \in Q_n$ si ha $|\cot \pi z| \leq M$.*

Dimostrazione: Sia $z = x + iy \in Q_n$ un punto che giace su uno dei lati del quadrato parallelo all'asse reale. Allora $|y| = N + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$. Allora:

$$\begin{aligned} |\cot \pi z| &= \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \leq \left| \frac{|e^{i\pi z}| + |e^{-i\pi z}|}{|e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}|} \right| \\ &= \left| \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{-\pi z} - e^{\pi z}} \right| = \coth |\pi y| \leq \coth \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato $|e^{i\pi z}| = |e^{i\pi x - \pi y}| = e^{-\pi y}$, $|e^{-i\pi z}| = |e^{-i\pi x + \pi y}| = e^{\pi y}$ il fatto che $\coth t$ è monotona decrescente per $t \geq 0$.

Se invece $z = x + iy \in Q_n$ è un punto che giace su uno dei lati del quadrato parallelo all'asse immaginario, allora $|x| = N + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$. Ricordando che in questo caso $e^{i\pi x} = e^{i\pi} = -1$, abbiamo

$$|\cot \pi z| = \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| = \left| \frac{e^{2i\pi z} + 1}{e^{2i\pi z} - 1} \right| = \left| \frac{-e^{-2\pi y} + 1}{-e^{-2\pi y} - 1} \right| = \frac{1 - e^{-2\pi y}}{e^{-2\pi y} + 1} \leq 1:$$

Dunque basta scegliere $M = \max\{1, \coth \frac{\pi}{2}\} = \coth \frac{\pi}{2}$ e il Lemma è dimostrato. \square

Consideriamo ora la funzione meromorfa definita da $g(z) = \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z$. Come già osservato per ogni intero $n \neq 0$ si ha

$$\operatorname{Res}_n(g(z)) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n^{2k}}.$$

Sia

$$\cot \pi z = \sum_{n=-1}^{\infty} b_n z^n$$

lo sviluppo in serie di Laurent di $\cot \pi z$ nell'origine. Dato che $\cot \pi z$ è una funzione dispari, ossia tale che $\cot \pi(-z) = -\cot \pi z$, segue immediatamente che $b_n = 0$ per ogni n pari e quindi

$$\cot \pi z = \sum_{m=-1}^{\infty} b_{2m-1} z^{2m-1}.$$

Inoltre lo sviluppo in serie di Laurent di $g(z) = \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z$ in 0 è dato da

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z = \frac{1}{z^{2k}} \sum_{m=-1}^{\infty} b_{2m-1} z^{2m-1} \\ &= b_{-1} z^{-2k-1} + b_1 z^{-2k+1} + \dots + b_{2k-1} z^{-1} + \sum_{m=k+1}^{\infty} b_{2m-1} z^{2m-2k-1} \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\operatorname{Res}_0(g(z)) = b_{2k-1}.$$

Siamo ora pronti a dimostrare la seguente

PROPOSIZIONE 4.4.8: Per ogni intero $k \geq 1$, se $\cot \pi z = \sum_{m=-1}^{\infty} b_{2m-1} z^{2m-1}$ è lo sviluppo di Laurent di $\cot \pi z$ in 0, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{\pi}{2} b_{2k-1}$$

Dato che

$$\cot \pi z = \frac{1}{\pi z} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi^3}{45} - \frac{2\pi^5}{945} - \dots$$

in particolare si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Dimostrazione: Si osservi che se A_N è l'aperto che ha per frontiera Q_N , per $N \geq 1$, allora la funzione $g(z) = \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z$ ha poli in A_N nei punti $-N, \dots, 0, \dots, N$. Dunque, per il teorema dei residui

$$\int_{Q_N} \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z dz = \sum_{n=-N}^N \operatorname{Res}_n \left[\frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right].$$

D'altra parte, usando il Lemma 4.4.7, e osservando che il perimetro del quadrato Q_N è $4(2N+1)$ e che, se $z \in Q_N$, allora $\frac{1}{|z|^{2k}} \leq \frac{1}{N^{2k}}$, dato che $\mathbb{D}(0, N) \subset A_N$, abbiamo

$$\left| \int_{Q_N} \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z dz \right| \leq \frac{M}{N^{2k}} 4(2N+1).$$

Dunque

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{Q_N} \frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \text{Res}_n \left[\frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right]. \quad (4.4.16)$$

Dunque

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-N}^N \text{Res}_n \left[\frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right] \\ &= \sum_{n=-N}^{-1} \text{Res}_n \left[\frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right] + \text{Res}_0 \left[\frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right] + \sum_{n=1}^N \text{Res}_n \left[\frac{1}{z^{2k}} \cot \pi z \right] \\ &= 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{\pi} \frac{1}{n^{2k}} + b_{2k-1}. \end{aligned}$$

Questo fatto insieme a (4.4.16) implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{\pi}{2} b_{2k-1}.$$

Il resto dell'enunciato si ottiene trovando i primi termini della serie di Laurent di $\cot \pi z$ nell'origine. Ad esempio si può procedere usando metodi elementari, anche se un po' laboriosi, nel modo seguente. Se $(\sin \pi z)^{-1} = \sum_{m=-1}^{\infty} c_{2m-1} z^{2m-1}$ è lo sviluppo di Laurent nell'origine, ricordando lo sviluppo $\sin \pi z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1}$, i primi coefficienti della serie di Laurent di $(\sin \pi z)^{-1}$ si possono calcolare per iterazione moltiplicando e eguagliando i coefficienti dello stesso grado nella relazione:

$$\begin{aligned} 1 &= \sin \pi z (\sin \pi z)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} \right) \left(\sum_{m=-1}^{\infty} c_{2m-1} z^{2m-1} \right) \\ &= \left(\pi z - \frac{\pi^3}{(3)!} z^3 + \frac{\pi^5}{(5)!} z^5 - \dots \right) (c_{-1} z^{-1} + c_1 z^1 + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots) \end{aligned}$$

ottenendo: $c_{-1} = \frac{1}{\pi}$, $c_1 = \frac{\pi}{6}$, $c_3 = \frac{7\pi^3}{360}$, $c_5 = \frac{31\pi^5}{15120}$. Lo stesso metodo applicato a

$$\sum_{m=-1}^{\infty} b_{2m-1} z^{2m-1} = \cot \pi z = \cos \pi z ((\sin \pi z)^{-1})$$

$$= \left(1 - \frac{\pi^2}{2!} z^2 + \frac{\pi^4}{4!} z^4 - \frac{\pi^6}{6!} z^6 + \dots \right) \left(\frac{1}{\pi} z^{-1} + \frac{\pi}{6} z^1 + \frac{7\pi^3}{360} z^3 + \frac{31\pi^5}{15120} z^5 + \dots \right)$$

permette di calcolare i coefficienti b_{-1}, b_1, b_3, b_5 della serie di Laurent di $\cot \pi z$. \square

Osservazione. I coefficienti b_{2k-1} della serie di Laurent di $\cot \pi z$ nell'origine sono correlati alla successione B_n dei numeri di Bernoulli, molto importanti in molti contesti matematici, mediante la formula:

$$b_{2k-1} = \frac{2^{2n}}{(2n)!} \pi^{2k-1} B_{2k}.$$

Esercizi

1. Verificare che

$$a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \frac{5}{6}\pi;$$

$$b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^5} = \frac{8!}{(4!)^2} \frac{\pi}{2^8};$$

$$c) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a^4 + x^4)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{\pi}{a^7} \quad \text{per } a > 0.$$

2. Verificare che

$$a) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{per } a > b > 0;$$

$$b) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{2 + \cos \theta} d\theta = 2\pi \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

3. Sia $f: A \rightarrow A'$ un'applicazione biolomorfa e sia \mathbb{D} un disco arbitrario tale che $\overline{\mathbb{D}} \subset A$. Per ogni $w \in f(\mathbb{D})$ dimostrare che vale la seguente rappresentazione integrale:

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta.$$

Consiglio: Calcolare l'integrale utilizzando il teorema dei residui e osservando che se $g(z) = z \frac{f'(z)}{f(z) - w}$ e $c = f^{-1}(w)$ allora $\text{Res}_c(g) = c$.