CAPITOLO 5

Omotopia, numero d'avvolgimento, Logaritmi

5.1. La versione omotopica della formula di Cauchy, il numero d'avvolgimento.

Cominciamo ricordando la nozione di omotopia di cammini. Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e siano $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a, b] \to A$ due cammini (ossia due applicazioni continue) tali che

(i) γ_0, γ_1 hanno gli stessi estremi ossia $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ e $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$
oppure

(ii) γ_0, γ_1 sono cammini chiusi ossia $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$ e $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$.

I cammini γ_0, γ_1 si dicono *omotopi (in A)* se esiste una *omotopia da γ_0 a γ_1* ossia un'applicazione continua $H \colon [0, 1] \times [a, b] \to A$ tale che nel caso (i) sia una *omotopia con estremi fissati*

$$\begin{cases} H(0,t) = \gamma_0(t) \quad \text{e} \quad H(1,t) = \gamma_1(t) \quad \text{per} \quad t \in [a,b] \\ \\ H(s,a) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a) \quad \text{e} \quad H(s,b) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b) \quad \text{per} \quad s \in [0,1] \end{cases} \tag{5.1.1}$$

e nel caso (ii) sia una *omotopia di cammini chiusi*

$$\begin{cases} H(0,t) = \gamma_0(t) \quad \text{e} \quad H(1,t) = \gamma_1(t) \quad \text{per} \quad t \in [a,b] \\ \\ H(s,a) = H(s,b) \quad \text{per} \quad s \in [0,1]. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Diremo che un cammino $\gamma \colon [a, b] \to A$ è *omotopo a costante* se per qualche punto $z \in A$ il cammino $\gamma \colon [a, b] \to A$ è omotopo al cammino costante $\gamma_z \colon [a, b] \to A$ definito da $\gamma_z(t) = z$. Lasciamo per esercizio la (facile) dimostrazione della seguente

Proposizione 5.1.1: *L'omotopia è una relazione d'equivalenza.*

La seguente definizione è fondamentale:

Definizione 5.1.1: Una aperto connesso $A \subset \mathbb{C}$ si dice *semplicemente connesso* se ogni cammino chiuso $\gamma \colon [a, b] \to A$ è omotopo a costante in A.

Non è facile dare in modo rigoroso una caratterizzazione geometrica degli aperti semplicemente connessi. Intuitivamente il fatto che ogni cammino chiuso sia omotopo a costante suggerisce che il suo sostegno sia deformabile con continuità a un punto. A sua volta questo suggerisce che l'aperto A "non può avere buchi" ossia che il suo complemento $\mathbb{C} \setminus A$ non ha componenti connesse limitate. Questo fatto si può infatti dimostrare utilizzando la teoria delle funzioni olomorfe che stiamo presentando. Per il momento ci accontentiamo di osservare che ogni aperto convesso $A \subset \mathbb{C}$ è semplicemente connesso. Questo si vede facilmente nel modo seguente. Siano $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to A$ due cammini di un aperto $A \subset \mathbb{C}$ chiusi tali che per ogni $t \in [a,b]$ il segmento $[\gamma_0(t)\gamma_1(t)]$ sia contenuto in A. Allora γ_0 e γ_1 sono omotopi mediante *l'omotopia lineare* $H \colon [0,1] \times [a,b] \to A$ definita da

$$H(s,t) = \gamma_0(t) + s(\gamma_1(t) - \gamma_0(t)).$$

Se dunque A è convesso ogni cammino chiuso è omotopo a costante mediante un'omotopia lineare.

In questa sezione vogliamo studiare a meno della relazione di omotopia l'integrale di funzioni olomorfe lungo le curve. Una difficoltà che si incontra subito nel confrontare integrali lungo curve C^1 a tratti omotope è che l'omotopia è una nozione "continua" e quindi la nostra definizione di integrale lungo una curva non sembra essere adeguata. Uno dei modi per risolvere questo problema si basa su un risultato di interpolazione. Prima di tutto una definizione. Diciamo che un cammino (continuo) $\alpha \colon [a,b] \to A$ è *lineare a tratti* se esiste una partizione $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$ dell'intervallo $[a,b]$ tale che per ogni $j = 0, \ldots, n-1$ la restrizione $\alpha_{|[t_j, t_{j+1}]}$ è la restrizione di una funzione affine ossia $\alpha_{|[t_j,t_{j+1}]}(t) = tz_j + w_j$ per opportuni z_j e w_j. È immediato osservare che un cammino lineare a tratti è una curva C^1 a tratti.

Teorema 5.1.2: *Siano $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to A$ due cammini omotopi. Allora esiste un numero finito di cammini $\alpha_0, \ldots, \alpha_N \colon [a,b] \to A$ tali che*
(i) $\alpha_0 = \gamma_0$ e $\alpha_N = \gamma_1$*;*
(ii) α_j *è lineare a tratti per ogni* $j = 1, \ldots, N-1$*;*
(iii) α_j *è linearmente omotopa a* α_{j+1} *per ogni* $j = 0, \ldots, N-1$.

Dimostrazione: Sia $H \colon [0,1] \times [a,b] \to A$ un'omotopia fra i cammini γ_0 e γ_1. Dato che $[0,1] \times [a,b]$ è compatto allora H è uniformemente continua e $H([0,1] \times [a,b])$ è un compatto contenuto in A. Allora

$$r = \frac{1}{2} dist(H([0,1] \times [a,b]), \mathbb{C} \setminus \overline{A}) = \frac{1}{2} \min\{dist(H(s,t), \mathbb{C} \setminus \overline{A}) \mid (s,t) \in [0,1] \times [a,b]\} > 0$$

e esiste un intero positivo n tale che, per $(s,t), (s',t') \in [0,1] \times [a,b]$ con $|s - s'| < \frac{1}{n}$ e $|t - t'| < \frac{1}{n}$, risulti

$$|H(s,t) - H(s',t')| < r.$$

Siano $s_0 = 0 < s_1 < \ldots, s_N = 1$ e $t_0 = a < t_1 < \ldots, t_N = b$ partizioni rispettivamente di $[0,1]$ e $[a,b]$ tali che $|s_j - s_{j+1}| < \frac{1}{n}$ e $|t_j - t_{j+1}| < \frac{1}{n}$ per ogni $j = 0, \ldots, N-1$. Infine per $0 \leq j,k \leq N$ si definiscano $z_{j,k} = H(s_j, t_k)$ e per $0 \leq j,k \leq N-1$ siano $Q_{j,k} = [s_j, s_{j+1}] \times [t_k, t_{k+1}]$. Allora

$$H(Q_{j,k}) \subset \mathbb{D}(z_{j,k}, r) \subset A.$$

Per ogni $0 < j < N$ sia $\alpha_j \colon [a,b] \to A$ il cammino a lineare a tratti ottenuto componendo successivamente i segmenti $[z_{j,k}, z_{j,k+1}]$ per $k = 0, \ldots, N-1$. Inoltre poniamo $\alpha_0 = \gamma_0$ e $\alpha_N = \gamma_1$.

Per ogni $j, k = 0, \ldots, N-1$ i quattro punti $a_j(t_k) = z_{j,k}$, $a_j(t_{k+1}) = z_{j,k+1}$, $a_{j+1}(t_k) = z_{j+1,k}$, $a_{j+1}(t_{k+1}) = z_{j+1,k+1}$ sono tutti nel disco $D(z_{j,k}, r)$ che è convesso. Dunque per ogni $j, k = 0, \ldots, N-1$ se $t \in [t_k, t_{k+1}]$ il segmento che congiunge $a_j(t)$ a $a_{j+1}(t)$ è tutto contenuto nel disco $\mathbb{D}(z_{j,k}, r)$ e quindi in A. Dunque per ogni $t \in [a, b]$ il segmento che congiunge $a_j(t)$ a $a_{j+1}(t)$ è tutto contenuto in A. Come già osservato allora i cammini α_j e a_{j+1} sono omotopi mediante un'omotopia lineare.

$\square$

Utilizziamo ora questo processo di interpolazione lineare dell'omotopia per dimostrare il risultato principale di questo paragrafo.

Teorema 5.1.3: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a, b] \to A$ due cammini C^1 a tratti omotopi (come cammini chiusi o con estremi fissati). Allora se $f \colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa, si ha*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz. \tag{5.1.3}$$

Dimostrazione: Grazie al Teorema 5.1.2 possiamo ridurci al caso in cui che esista un'omotopia lineare fra γ_0 e γ_1. In fatti se il risultato è vero in questo caso, siano $\alpha_0 = \gamma_0, \ldots, \alpha_N = \gamma_1$ i cammini a due a due linearmente omotopi trovati grazie al Teorema 5.1.2; allora

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\alpha_0} f(z)dz = \int_{\alpha_1} f(z)dz = \ldots = \int_{\alpha_N} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Assumiamo dunque γ_0 e γ_1 siano omotopi mediante l'omotopia lineare H definita, per $(s, t) \in [0, 1] \times [a, b]$, da

$$H(s, t) = \gamma_0(t) + s(\gamma_1(t) - \gamma_0(t)).$$

Posto $\gamma_s(t) = H(s, t) = \gamma_0(t) + s(\gamma_1(t) - \gamma_0(t))$, allora $\gamma_s \colon [a, b] \to A$ è una curva C^1 a tratti per ogni $s \in [0, 1]$. Per semplicità denotiamo $\delta(t) = \gamma_1(t) - \gamma_0(t)$ e quindi avremo $\gamma_s(t) = H(s, t) = \gamma_0(t) + s\delta(t)$. Se definiamo per $s \in [0, 1]$

$$\phi(s) = \int_{\gamma_s} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma_s(t))\gamma_0'(t)dt + s\int_a^b f(\gamma_s(t))\delta'(t)dt,$$

dimostriamo ora che ϕ è costante da cui ovviamente segue il risultato. La funzione ϕ è continua su $[0, 1]$ e derivabile su $(0, 1)$ e la derivata si calcola differenziando sotto il segno di integrale e osservando che $\frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t) = \delta(t)$:

$$\begin{aligned}
\phi'(s) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}[f(\gamma_s(t))\gamma_0'(t)]dt + \int_a^b f(\gamma_s(t))\delta'(t)dt + s\int_a^b \frac{\partial}{\partial s}[f(\gamma_s(t))\delta'(t))]dt \\
&= \int_a^b f'(\gamma_s(t))\delta(t)\gamma_0'(t)dt + \int_a^b f(\gamma_s(t))\delta'(t)dt + s\int_a^b f'(\gamma_s(t))\delta(t)\delta'(t)dt \\
&= \int_a^b \delta(t)f'(\gamma_s(t))\gamma_s'(t)dt + \int_a^b f(\gamma_s(t))\delta'(t)dt \\
&= \int_a^b [\delta(t)\frac{d}{dt}f(\gamma_s(t)) + f(\gamma_s(t))\delta'(t)]dt = \int_a^b \frac{d}{dt}[\delta(t)f(\gamma_s(t))]dt \\
&= \delta(b)f(\gamma_s(b)) - \delta(a)f(\gamma_s(a)).
\end{aligned}$$

Se γ_0 e γ_1 sono due curve con estremi coincidenti allora

$$\delta(a) = \gamma_1(a) - \gamma_0(a) = 0 \quad \text{e} \quad \delta(b) = \gamma_1(b) - \gamma_0(b) = 0.$$

Se γ_0 e γ_1 sono due curve chiuse allora H è un'omotopia tra tra curve chiuse. Allora posto $z_s = H(s,a) = H(s,b)$ per ogni $s \in [0,1]$ si ha

$$\delta(b)f(\gamma_s(b)) - \delta(a)f(\gamma_s(a)) = (z_1 - z_0)f(z_s) - (z_1 - z_0)f(z_s) = 0.$$

In tutti i casi concludiamo $\phi'(s) = 0$ e quindi che ϕ è costante. □

Come corollario si ottiene immediatamente la versione omotopica del Teorema di Cauchy:

TEOREMA 5.1.4: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $\gamma\colon [a,b] \to A$ un cammino chiuso C^1 a tratti omotopo a costante. Allora se $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa, si ha*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0. \tag{5.1.4}$$

In particolare allora la (5.1.4) vale per ogni cammino chiuso γ se A è semplicemente connesso.

Dal Teorema 5.1.4 segue la seguente importante osservazione:

TEOREMA 5.1.5: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso e sia f una funzione olomorfa su A. Allora f ha una primitiva olomorfa su A ossia esiste F olomorfa su A tale che $F' = f$. La funzione F è unica a meno di costanti. In altre parole per ogni funzione f una funzione olomorfa su un aperto semplicemente connesso A, la forma fdz è esatta.*

Dimostrazione: È una conseguenza immediata della Proposizione 3.2.2 e del Teorema di Cauchy 5.1.4 (per aperti convessi si veda la Proposizione 3.2.4). Dato che due funzioni olomorfe su un aperto connesso con derivata coincidente differiscono per una costante, è immediato ossevare che la primitiva è unica a meno di costanti. □

Come abbiamo già osservato, l'intuizione suggerisce che un dominio in $A \subset \mathbb{C}$ è semplicemente connesso se e solo se il suo complemento $\mathbb{C} \setminus A$ non ha componenti connesse limitate. Questo si può effettivamente dimostrare e lo faremo più tardi.

Definizione 5.1.2: Siano $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva chiusa C^1 a tratti e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ un punto non appartenente al sostegno di γ. Il *numero d'avvolgimento* (o *indice*) di γ rispetto a z_0 è definito da

$$n(z_0, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta. \tag{5.1.5}$$

Se $\Gamma = \sum_{j=1}^{n} m_j \gamma_j$ è una catena e z_0 è nel complemento di ogni curva γ_j, si definisce il *numero d'avvolgimento* (o *indice*) di Γ rispetto a z_0 il numero

$$n(z_0, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = \sum_{i=1}^{n} m_j n(z_0, \gamma_j). \tag{5.1.6}$$

Il numero di avvolgimento ha un importante significato geometrico. Conta, tenendo conto del verso di percorrenza, il numero di volte che si "gira attorno" z_0 mentre si percorre la curva γ. Per convicersi di questo si può procedere nel modo seguente. Per ζ che varia lungo il sostegno della curva γ si ponga

$$\zeta = z_0 + \rho(\zeta) e^{i\theta(\zeta)} = z_0 + \rho e^{i\theta}$$

dove evidentemente

$$\rho = \rho(\zeta) = |\zeta - z_0| \quad \text{e} \quad e^{i\theta} = e^{i\theta(\zeta)} = \frac{\zeta - z_0}{|\zeta - z_0|}.$$

Dunque differenziando

$$d\zeta = e^{i\theta} d\rho + i\rho e^{i\theta} d\theta = \frac{\zeta - z_0}{|\zeta - z_0|} d(|\zeta - z_0|) + i(\zeta - z_0) d\theta$$

e quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} d \log(|\zeta - z_0|) + \frac{1}{2\pi} d\theta.$$

Integrando, allora,

$$n(z_0, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma d \log(|\zeta - z_0|) + \frac{1}{2\pi} \int_\gamma d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma d\theta$$

e l'ultimo integrale in effetti misura l'angolo totale spazzato dal segmento che congiunge z_0 al punto che varia lungo tutto il percorso della curva γ.

L'argomento che abbiamo presentato, pur suggestivo, non è però rigoroso. Infatti abbiamo utilizzato la funzione argomento θ con grande disinvoltura senza preoccuparci del fatto che non è ben definita su un qualunque aperto. In realtà la forma differenziale $d\theta$ si può definire anche quando la funzione θ non è ben definita e questo fatto rende ragionevole quello che abbiamo fatto. Piuttosto che seguire questa direzione di lavoro, dimostreremo le proprietà del numero di avvolgimento in modo diverso e più semplice. Prima di tutto osserviamo che è un intero:

TEOREMA 5.1.6: *Sia* $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ *un cammino chiuso* C^1 *a tratti e sia* $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$. *Allora*

$$n(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0}d\zeta \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre la funzione $n(\bullet,\gamma): \mathbb{C}\setminus\gamma([a,b]) \to \mathbb{Z}$ *è continua ed è quindi costante su ogni componente connessa di* $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$. *In particolare* $n(\bullet,\gamma)$ *è identicamente nulla sulla componente connessa illimitata di* $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$. *Infine se* $\gamma_1,\gamma_2: [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ *sono cammini chiusi* C^1 *a tratti omotopi (in* $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$*) allora* $n(z_0,\gamma_1) = n(z_0,\gamma_2)$.

Dimostrazione: Si definisca per $x \in [a,b]$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}dt. \tag{5.1.7}$$

Dato che

$$n(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}dt,$$

dobbiamo dimostrare che $F(b) \in \mathbb{Z}$. La funzione F definita da (5.1.7) è continua su $[a,b]$ e ha derivata (nei punti dove γ è di classe C^1):

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\gamma'(x)}{\gamma(x) - z_0}.$$

Allora la funzione G definita su $[a,b]$ da

$$G(x) = e^{-2\pi i F(x)}(\gamma(x) - z_0)$$

è continua e, nel complemento in $[a,b]$ del numero finito di punti dove γ non è di classe C^1 ha derivata data da:

$$G'(x) = -2\pi i F'(x)e^{-2\pi i F(x)}(\gamma(x) - z_0) + e^{-2\pi i F(x)}\gamma'(x) = 0.$$

Allora G è continua e costante a tratti e quindi è costante. In particolare possiamo concludere che

$$e^{-2\pi i F(b)}(\gamma(b) - z_0) = G(b) = G(a) = e^{-2\pi i F(a)}(\gamma(a) - z_0) = \gamma(a) - z_0.$$

Dato che $\gamma(a) = \gamma(b) \neq z_0$, allora segue che $e^{2\pi i F(b)} = 1$ da cui segue la tesi.

La funzione $n(\bullet,\gamma)$ è continua dato che l'integrando $\frac{1}{\zeta - z}$ è continuo in z per $z \notin \gamma([a,b])$. Inoltre la funzione continua $n(\bullet,\gamma)$ a valori in $\mathbb{Z}$ necessariamente è costante sulle componenti connesse del suo dominio di definizione. Infine si osservi che, dato che $\gamma([a,b])$ è un compatto, esiste un disco $\mathbb{D}(0,R)$ tale che $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{D}(0,R)$. Dunque la componente connessa U di $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$ che contiene $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}(0,R)$ è l'unica illimitata. Sia allora $z \in U$ con $|z| > R$. Allora per $\zeta \in \gamma([a,b])$ si deve avere

$$|\zeta - z| \geq |z| - R$$

e quindi

$$|n(z,\gamma)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}d\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{L(\gamma)}{|z| - R}$$

da cui segue che $|n(z,\gamma)| \to 0$ per $|z| \to \infty$. Questo può succedere solo se $n(z,\gamma) = 0$ per ogni $z \in U$. Infine il Teorema 5.1.3 implica immediatamente che $n(z_0,\gamma_1) = n(z_0,\gamma_2)$ se $\gamma_1,\gamma_2: [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ sono cammini chiusi C^1 a tratti omotopi in $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$. $\square$

Per le frontiere di aperti limitati il numero di avvolgimento ha la seguente semplice interpretazione:

TEOREMA 5.1.7: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato con frontiera ∂A unione finita di curve semplici chiuse C^1 a tratti a due a due disgiunte. Allora, inteso che si integra lungo la frontiera orientata ∂A di A,*

$$n(z, \partial A) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{A} \\ 1 & \text{se } z \in A. \end{cases}$$

Dimostrazione: Si osservi che il risultato è immediato nel caso in cui $A = \mathbb{D}$ sia un disco. Sia A arbitrario e sia $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{A}$. Allora esiste un aperto U con $A \subset U$ e con $z \notin U$. Allora la funzione $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ è olomorfa su U e quindi dal Teorema di Cauchy segue che:

$$n(z, \partial A) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial A} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

Supponiamo che $z \in A$. Allora sia $r > 0$ tale che $\mathbb{D} = \mathbb{D}(z, r) \subset \overline{\mathbb{D}(z, r)} \subset A$ e si definisca $A' = A \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Allora $z \notin A'$ e $\partial A' = \partial A - \partial \mathbb{D}$ e quindi possiamo concludere

$$0 = n(z, \partial A') = n(z, \partial A) - n(z, \partial \mathbb{D}) = n(z, \partial A) - 1$$

e quindi la tesi segue. □

Come conseguenza del Teorema di Cauchy 5.1.4, si dimostra la seguente versione della formula di Cauchy:

TEOREMA 5.1.8: *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $\gamma\colon [a, b] \to A$ un cammino chiuso C^1 a tratti omotopo a costante in A. Allora se $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa, per ogni $z \in A \setminus \gamma([a, b])$ si ha*

$$n(z, \gamma) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta. \tag{5.1.8}$$

Dimostrazione: Si fissi $z \in A \setminus \gamma([a, b])$ e si definisca una funzione F su A mediante

$$F(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{se } \ w \neq z \\ \\ f'(z) & \text{se } \ w = z. \end{cases}$$

Allora, per costruzione, F è continua e olomorfa per $w \neq z$. Segue allora che F è olomorfa su A e, per il Teorema di Cauchy, si ha

$$0 = \int\limits_{\gamma} F(\zeta) d\zeta = \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int\limits_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta,$$

da cui segue la tesi. □

5.2. Logaritmi e radici

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso. Una funzione $f \in C^0(\Omega)$ si dice *ramo di logaritmo* (o semplicemente un *logaritmo*) in Ω se si ha

$$e^{f(z)} = z \qquad \forall z \in \Omega. \tag{5.2.1}$$

Evidentemente, dato che $e^{f(z)} \neq 0$, è necessario supporre che $0 \notin \Omega$. Vedremo che questa condizione necessaria non è affatto sufficiente, ma intanto alcune osservazioni preliminari indispensabili. E' evidente, per cominciare, che a causa della periodicità della fuzione esponenziale, non si ha "unicità" del logaritmo. Infatti se vale (5.2.1) per $f \in C^0(\Omega)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ la funzione $f + 2k\pi i$ è un logaritmo. D'altra parte questa è l'unica possibile indeterminatezza se Ω è connesso. Infatti se $f, g \in C^0(\Omega)$ sono due logaritmi allora

$$e^{f(z)-g(z)} = \frac{e^{f(z)}}{e^{g(z)}} = 1$$

per ogni $z \in \Omega$ e quindi

$$\frac{1}{2\pi i}(f(z) - g(z)) \in \mathbb{Z}.$$

Dunque $\frac{1}{2\pi i}(f - g)$ è una funzione continua su un connesso a valori in $\mathbb{Z}$ e pertanto costante. In conclusione deve essere $g = f + 2k\pi i$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

Cerchiamo ora di definire un logaritmo su una parte di $\mathbb{C}$ che sia più estesa possibile.

Definizione. L'*argomento principale* di $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è l'unico numero $Arg(z) = \theta \in (-\pi, \pi]$ tale che $z = |z|e^{i\theta}$.

Si vede subito che la funzione Arg non è continua su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma è di classe C^∞ su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Se per $r \in (0, +\infty)$ denotiamo con $\log r$ l'usuale logaritmo naturale, è immediato verificare che la funzione definita da

$$Log\, z = \log|z| + iArg(z) \tag{5.2.2}$$

è un ramo di logaritmo su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Ci riferiremo alla funzione Log definita in (5.2.2) come *logaritmo principale*. Si osservi che il logaritmo principale è di classe C^∞. Evidentemente allo stesso modo si può definire un ramo di logaritmo sul complemento di ogni semiretta uscente dall'origine. A tal fine basta definire l'argomento in modo che assuma valori compresi in $(\alpha - 2\pi, \alpha]$, dove α è l'angolo fra l'asse reale e la semiretta in questione. Procedendo come prima si ottiene un altro ramo di logaritmo. In generale abbiamo la seguente:

PROPOSIZIONE 5.2.1: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un aperto connesso e $f \in C^0(\Omega)$ un logaritmo. Allora f è una funzione olomorfa con derivata $f'(z) = \frac{1}{z}$. Fissato $a \in \Omega \setminus (-\infty, 0]$, esiste una costante $k \in \mathbb{Z}$ tale che per ogni $z \in \Omega$, si ha*

$$f(z) = Log\, a + \int_{\gamma_z} \frac{dz}{z} + 2k\pi i \tag{5.2.3}$$

dove Log è il logaritmo principale e γ_z è una qualunque curva C^1 a tratti con primo estremo in a e secondo in z.

Dimostrazione: Per definizione la funzione $f\colon \Omega \to f(\Omega)$ è biettiva con inversa la funzione esponenziale. Siano $z, z_0 \in \Omega$ e $w = f(z), w_0 = f(z_0)$. Allora per $z \neq z_0$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{w \to w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}.$$

Per concludere la dimostrazione basta osservare che per qualche intero k si deve avere $f(a) = Log\, a + 2k\pi i$ e che, dato che f è una primitiva olomorfa di $\frac{1}{z}$, allora $f(z) = f(a) + \int_{\gamma_z} \frac{dz}{z}$. □

Il seguente risultato caratterizza gli aperti sui quali è definito un ramo di logaritmo:

TEOREMA 5.2.2: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un aperto connesso, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) Esiste un ramo di logaritmo su Ω.
(ii) La funzione $\frac{1}{z}$ ha una primitiva olomorfa su Ω.
(iii) per ogni curva chiusa C^1 a tratti γ con sostegno in Ω si ha $n(\gamma, 0) = 0$.

In particolare, se Ω è semplicemente connesso, allora esiste un ramo di logaritmo su Ω.

Dimostrazione: In Proposizione 5.2.1 è dimostrato che (i) ⇒ (ii). Dimostriamo che che (ii) ⇒ (i): Se g è una primitiva olomorfa di $\frac{1}{z}$ su Ω, allora

$$(ze^{-g(z)})' = e^{-g(z)} - zg'(z)e^{-g(z)} = 0$$

e quindi, dato che $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ è connesso, $ze^{-g(z)}$ è una funzione costante non nulla. Allora per qualche c su Ω si ha $ze^{-g(z)} = e^c$ da cui segue che $f(z) = g(z) + c$ è un ramo di logaritmo.

Se vale la (iii) ovviamente $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$ per ogni curva chiusa C^1 a tratti γ con sostegno in Ω. Quest'ultimo fatto sappiamo che implica l'esistenza di una primitiva olomorfa di $\frac{1}{z}$ su Ω ossia a (ii).

Infine se Ω è semplicemente connesso allora ogni curva chiusa C^1 a tratti γ con sostegno in Ω è omotopa a costante in Ω e quindi si ha $n(\gamma, 0) = 0$. □

Più in generale su un aperto semplicemente connesso esiste sempre un logaritmo olomorfo di una funzione olomorfa che non si annulla:

TEOREMA 5.2.3: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso o tale che $\mathbb{C} \setminus \Omega$ non ha componenti connesse limitate e sia $f\colon \Omega \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una funzione olomorfa. Allora esiste una funzione olomorfa $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ tale che $e^g = f$*

Dimostrazione: Se f non si annulla mai, allora la funzione olomorfa $h = f'/f$ ha una primitiva olomorfa F su Ω per il Teorema 5.1.5. Dato che Ω è connesso e che $(fe^{-F})' = 0$ si ha che $fe^{-F} = k \neq 0$ per qualche costante k. Se $k = e^c$ allora $f = e^{c+F}$ e quindi $g = c + F$. □

Si osservi che, nel caso in cui sull'immagine $f(\Omega)$ della funzione f sia definito un ramo di logaritmo $Log\, z$, allora come logaritmo olomorfo della funzione f si può scegliere semplicemente $g = Log \circ f$. D'altro canto il Teorema 5.2.3 si può applicare a situazioni più generali. Ad esempio alla funzione $f(z) = z^2$ definita sul complemento dell'asse reale negativo $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ si applica il Teorema 5.2.3 mentre su $\mathbb{C}^* = f(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ non è definito alcun ramo di logaritmo.

Esattamente come si procede per definire le potenze reali di esponente arbitrario, una volta in possesso di una buona nozione di logaritmo, si può provare a definire potenze con esponente complesso arbitrario.

Siano $a \in C^*$, e $b \in \mathbb{C}$. Se $Log\, a$ è un qualsiasi valore del logaritmo di a, definiamo *un valore della potenza b-esima di a* il numero complesso

$$a^b = e^{bLog\, a}. \tag{5.2.4}$$

Naturalmente, dato che $Log\, a$ è determinato a meno di multipli interi di $2\pi i$, il numero a^b definito da (5.2.4) è determinato a meno di un fattore del tipo $e^{2kb\pi i}$ per qualche intero k. A causa di questo fatto occorre essere prudenti nell'utilizzare la definizione (5.2.4). Ad esempio se $b \in \mathbb{Z}$ è un intero, allora vi è un solo valore per a^b e questo è l'usuale potenza b-esima di a. Nel caso in cui $b \in \mathbb{Q}$ è razionale, allora vi sono un numero finito di valori per a^b. Per convincersene basta considerare il caso $b = \frac{1}{n}$ per n intero positivo. In questo caso si ha

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} = e^{\frac{2k'b\pi i}{n}} \iff k - k' = 0 \pmod{n}$$

e $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ può assumere esattamente n valori distinti, le radici n-esime dell'unità:

$$\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \zeta_n^2 = e^{\frac{4k\pi i}{n}}, \dots, \zeta_n^{n-1} = e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}, \zeta_n^n = 1$$

Pertanto $a^{\frac{1}{n}}$ assume n valori:

$$e^{\frac{Log\, a}{n}}, \zeta_n e^{\frac{log\, a}{n}}, \dots, \zeta_n^{n-1} e^{\frac{Log\, a}{n}}$$

dove $Log\, a$ è un qualunque valore del logaritmo di a. In questo caso allora, come ci si poteva aspettare la potenza con esponente $\frac{1}{n}$ è esattamente la radice n-esima di un numero complesso. Se invece $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è un numero irrazionale, allora, al variare di $k \in \mathbb{Z}$ l'esponenziale $e^{2kb\pi i}$ assume infiniti valoti e quindi, in questo caso vi sono infiniti valori per a^b.

Ricordiamo infine che per un intero positivo $b = 1, 2, \dots$ si ha $0^b = 0$ e che si pone $0^0 = 1$. Chiariti questi preliminari è possibile considerare funzioni definite per mezzo di potenze. La *funzione esponenziale $z \mapsto a^z$ con base $a \in \mathbb{C}^*$* è definita su tutto $\mathbb{C}$ ed è olomorfa con derivata data da $(a^z)' = Log\, a\, a^z$. Si osservi che, dalle proprietà dell'esponenziale, segue immediatamente che $a^{z+w} = a^z a^w$.

Come si può intuire dalla discussione fatta sopra, è più delicato dare una definizione appropriata di funzione potenza b-esima. Ci aiuteremo con la costruzione fatta per i logaritmi. Sia $b \in \mathbb{C}$ fissato e sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto su cui è definito un ramo di logaritmo $Log\, z$. La funzione definita f su A da $f(z) = e^{bLog\, z}$ si dice *ramo della potenza b-esima*. Se non ci sono ambiguità scriveremo semplicemente $f(z) = z^b$ per un ramo di potenza b-esima. Qualunque ramo di potenza è una funzione olomorfa e per la derivata si ha:

$$(z^b)' = \frac{b}{z} e^{bLog\, z} = be^{(b-1)Log\, z} = bz^{b-1}$$

dove evidentemente z^{b-1} è il ramo della potenza $(b-1)$-esima definito su A dallo stesso ramo di logaritmo che definisce z^b. Si osservi che l'usuale relazione $(zw)^b = z^b w^b$ non vale per tutti i rami di potenza b-esima ma solo se per il ramo di logaritmo utilizzato nella definizione si ha $Log(zw) = Log\, z + Log\, w$.

Naturalmente in generale bisogna aspettarsi molti rami per la stessa potenza, il più delle volte infiniti. Per un esponente intero, dalla discussione fatta, segue che c'è un solo ramo di potenza che è esattamente la funzione $z \mapsto z^n$ usuale. È utile sottolineare il caso delle radici ossia delle potenze $\frac{1}{n}$-esime per n intero positivo. Se come prima denotiamo $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, fissato su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ un ramo $Logz$ di logaritmo, allora

$$e^{\frac{Log\, z}{n}}, \zeta_n e^{\frac{Log\, z}{n}}, \ldots, \zeta_n^{n-1} e^{\frac{Log\, z}{n}} \tag{5.2.5}$$

definiscono n rami della potenza $z^{\frac{1}{n}}$

Proposizione 5.2.4: *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso sul quale è definito un ramo di logaritmo $Log\, z$. Se $f\colon A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua tale che $(f(z))^n = z$ per ogni $z \in A$, allora f è una delle funzioni definite in (5.2.5).*

Dimostrazione: Sia $r_0(z) = e^{\frac{Log\, z}{n}}$. Allora per ogni $z \in A$ si ha $\left(\frac{f(z)}{r_0(z)}\right)^n = 1$. Dunque per qualche $j = 0, \ldots, n-1$ si ha $\frac{f(z)}{r_0(z)} = \zeta_n^j$. In altre parole la fuzione continua $\frac{f(z)}{r_0(z)}$ definita su un aperto connesso à valori nello spazio discreto $\{1, \zeta_n, \ldots, \zeta_n^{n-1}\}$. Dunque $\frac{f(z)}{r_0(z)}$ è costante e quindi f è una delle funzioni definite in (5.2.5). $\square$

Concludiamo con un'osservazione che ci sarà utile più tardi:

Proposizione 5.2.5: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto tale che per ogni funzione olomorfa che non si annulla ammette un logaritmo olomorfo. Allora ogni funzione olomorfa su Ω che non si annulla ammette una radice n-esima olomorfa ossia per ogni funzione olomorfa g su Ω con $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$, esiste h olomorfa su Ω con $h^n = g$. L'ipotesi vale se Ω è semplicemente connesso o se $\mathbb{C} \setminus \Omega$ non ha componenti connesse limitate.*

Dimostrazione: Se g non si annulla mai, sia f la funzione olomorfa su Ω con $g = e^f$. Allora $h = e^{f/n}$ è la radice n-esima olomorfa cercata. $\square$

Esercizi

1. Dimostrare che l'argomento principale non ha estensione continua su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma è di classe C^∞ su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

2. Dimostrare che, per $|z| < 1$, vale il seguente sviluppo di Taylor:

$$Log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k.$$