

CAPITOLO 8

Principio dell'argomento e Biolomorfismi

8.1. Il Principio dell'argomento.

Una conseguenza molto importante del Teorema dei Residui è il seguente

TEOREMA 8.1.1: (Principio dell'argomento) $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e f una funzione meromorfa in Ω . Sia $D \subset \Omega$ un aperto limitato con $\overline{D} \subset \Omega$ e con frontiera ∂D unione finita di curve C^1 a tratti semplici chiuse disgiunte. Se f non ha zeri nè poli su ∂D , si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P \quad (8.1.1)$$

dove N è la somma delle molteplicità degli zeri di f in D e P è la somma degli ordini dei poli di f in D .

Dimostrazione: In D la funzione f ha un numero finito di zeri a_1, \dots, a_r di molteplicità μ_1, \dots, μ_r rispettivamente e un numero finito di poli b_1, \dots, b_s di ordine ν_1, \dots, ν_s rispettivamente. Dunque esiste una funzione h olomorfa su un aperto contenente \overline{D} che non si annulla in alcun punto di D tale che per $z \in D$

$$f(z) = \frac{(z - a_1)^{\mu_1} \dots (z - a_r)^{\mu_r}}{(z - b_1)^{\nu_1} \dots (z - b_s)^{\nu_s}} h(z). \quad (8.1.2)$$

Dato che per funzioni olomorfe ϕ e ψ , ovunque abbia senso, si ha

$$\frac{(\phi\psi)'}{\phi\psi} = \frac{\phi'}{\phi} + \frac{\psi'}{\psi} \quad (8.1.3)$$

e, per $\nu \in \mathbb{Z}$, se $\alpha(z) = (z - c)^\nu$, si ha

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\nu}{z - c}. \quad (8.1.4)$$

Dunque, da (8.1.2), (8.1.3) e (8.1.4), segue

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^r \frac{\mu_k}{z - a_k} - \sum_{h=1}^s \frac{\nu_h}{z - b_h} + \frac{h'(z)}{h(z)}. \quad (8.1.5)$$

Da (8.1.5) segue che $\frac{f'}{f}$ è una funzione meromorfa con poli semplici esattamente dove f si annulla e dove f ha un polo. Un calcolo immediato dimostra che dove f ha uno zero $\frac{f'}{f}$ ha residuo pari alla molteplicità dello zero e dove f ha un polo $\frac{f'}{f}$ ha per residuo l'opposto dell'ordine del polo. Dunque (8.1.1) segue dal Teorema dei Residui. \square

Una importante applicazione è il Teorema di Rouché che afferma che il numero degli zeri di una funzione olomorfa su un aperto limitato non cambia se le si aggiunge una funzione olomorfa sul dominio che ha modulo sul bordo dominato dal modulo della prima.

TEOREMA 8.1.2: (di Rouché) *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato. Se $g, h \in C^0(\overline{\Omega})$ sono funzioni olomorfe in Ω tali che*

$$|g(z)| < |h(z)| \quad \forall z \in \partial\Omega. \quad (8.1.6)$$

Allora le funzioni h e $f = g + h$ hanno lo stesso numero di zeri in Ω .

Dimostrazione: Dato che vale (8.1.6) e $g, h \in C^0(\overline{\Omega})$, esiste un aperto $A \supset \partial\Omega$ tale che su $A \cap \overline{\Omega}$ si ha $|g| < |h|$. Dunque

$$h(z) \neq 0 \quad \text{e} \quad f(z) = h(z) + g(z) \neq 0 \quad \forall z \in A \cap \overline{\Omega}.$$

Infatti se esistesse $z_0 \in A \cap \overline{\Omega}$ con $h(z_0) = 0$ allora si avrebbe $0 = |h(z_0)| > |g(z_0)| \geq 0$ e se esistesse $z_1 \in A \cap \overline{\Omega}$ con $f(z_1) = 0$ allora si avrebbe $h(z_1) = -g(z_1)$ e quindi $|h(z_1)| = |g(z_1)| < |h(z_1)|$.

Sia $\Omega' = \Omega \setminus \overline{A}$. Allora Ω' è un aperto tale che $\overline{\Omega'}$ è un compatto che contiene tutti gli zeri di f e di h . Sia D un aperto con frontiera unione finita di curve C^1 a tratti semplici chiuse disgiunte tale che $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset D \subset \overline{D} \subset \Omega$. Dato che h e f sono olomorfe su D e non hanno zeri su ∂D , applicando il principio dell'argomento, basta dimostrare che

$$\int_{\partial D} \frac{f'}{f} dz = \int_{\partial D} \frac{h'}{h} dz. \quad (8.1.7)$$

A tal fine si definisca una funzione meromorfa q su Ω mediante $f = hq$ ossia ponendo

$$q(z) = 1 + \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Dunque q è meromorfa con singolarità (eventualmente eliminabili) dove h ha zeri. Allora

$$\frac{f'}{f} = \frac{h'}{h} + \frac{q'}{q}.$$

Dunque per dimostrare la (8.1.7) basterà provare che $\int_{\partial D} \frac{q'}{q} dz = 0$. Su $A \cap \overline{\Omega}$ si ha $|g| < |h|$ e quindi anche $|q(z) - 1| = |g(z)/h(z)| < 1$. Allora per $z \in A \cap \Omega$ si ha $|q(z)| < 2$ e quindi q è una funzione olomorfa su $A \cap \Omega$ con $q(A \cap \Omega) \subset D(1, 1) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Allora una funzione olomorfa è definita per $z \in A \cap \Omega$ da $Q(z) = \text{Log}(q(z))$, dove Log è il logaritmo principale definito su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Per $i = 1, \dots, N$, siano $\alpha_i: [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{C}$ curve semplici chiuse C^1 a tratti tali che $\partial D = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$. Dato che $Q'(z) = q'(z)/q(z)$ su $A \cap \Omega$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \frac{q'(z)}{q(z)} dz &= \int_{\partial D} Q'(z) dz = \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} Q'(\alpha_i(t)) \alpha_i'(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \frac{d}{dt} (Q(\alpha_i(t))) dt = \sum_{i=1}^N Q(\alpha(b_i)) - Q(\alpha(a_i)) = 0. \end{aligned}$$

□

Il teorema di Rouché permette di dare un'altra semplice dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra:

COROLLARIO 8.1.3: (Teorema fondamentale dell'algebra) *Un polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi ha esattamente n radici complesse contate con la loro molteplicità.*

Dimostrazione: Basta dimostrare che il risultato vale per $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ per $n \geq 1$. Dato che

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{p(z)}{z^n} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} = 1,$$

allora per qualche $R > 0$ se $|z| = R$ si deve avere

$$\left| \frac{p(z)}{z^n} - 1 \right| < 1$$

o, in altre parole, $|p(z) - z^n| < |z^n|$. Per il teorema di Rouché segue che $p(z) = (p(z) - z^n) + z^n$ ha esattamente n zeri nel disco di centro 0 e raggio R . \square

Il teorema di Rouché può essere usato per stimare dove sono situati gli zeri di un polinomio.

Esempio. Si consideri il polinomio $p(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$. Si ponga

$$h(z) = -4z^5 \quad \text{e} \quad g(z) = z^8 + z^2 - 1.$$

Su $|z| = 1$ si ha $|h(z)| > |g(z)|$ visto che

$$|h(z)| = |4z^5| = 4 \quad \text{e} \quad |g(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leq |z^8| + |z^2| + |1| \leq 3.$$

Per il teorema di Rouché segue che $p(z) = h(z) + g(z)$ ha 5 radici nel disco $|z| < 1$. D'altro canto se si pone

$$l(z) = z^8 \quad \text{e} \quad m(z) = -4z^5 + z^2 - 1,$$

su $|z| = 2$ si ha $|l(z)| > |m(z)|$ visto che

$$|l(z)| = |z^8| = 256 \quad \text{e} \quad |m(z)| = |-4z^5 + z^2 - 1| \leq |4z^5| + |z^2| + |1| \leq 128 + 4 + 1 = 133.$$

Per il teorema di Rouché segue che $p(z) = l(z) + m(z)$ ha 8 radici nel disco $|z| < 2$ e quindi $p(z)$ ha 3 radici nella corona $1 \leq |z| < 2$.

Un'altra applicazione del Teorema di Rouché è il seguente:

TEOREMA 8.1.4: (Teorema di Hurwitz) *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe convergente uniformemente sui compatti di Ω a f . Siano $f \not\equiv 0$, $a \in \Omega$ e, per $r > 0$ opportuno, $\mathbb{D} = \mathbb{D}(a, r) \subset \overline{\mathbb{D}(a, r)} \subset \Omega$ in modo che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial\mathbb{D}$. Allora esiste N tale che se $n > N$ le funzioni f e f_n hanno*

lo stesso numero di zeri in \mathbb{D} . In particolare segue che se per ogni n le funzioni f_n non si annullano in alcun punto di Ω o f non si annulla in alcun punto di Ω o $f \equiv 0$.

Dimostrazione: Se $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial\mathbb{D}$ sia

$$d = \min\{|f(z)| \mid z \in \partial\mathbb{D}\} > 0.$$

Dato che f_n converge uniformemente a f su $\partial\mathbb{D}$, esiste N tale che se $n > N$ per $z \in \partial\mathbb{D}$ si deve avere

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{1}{2}d < |f(z)|.$$

Il teorema di Rouché allora implica che $f_n(z) = f_n(z) - f(z) + f(z)$ ha lo stesso numero di zeri di f su \mathbb{D} . \square

APPENDICE: Il Teorema delle Funzioni implicite.

Diamo ora una dimostrazione della versione olomorfa del Teorema delle Funzioni implicite in due variabili complesse che utilizza le nozioni e le idee introdotte in questo paragrafo:

TEOREMA 8.1.5: Sia $B \subset \mathbb{C}^2$ un aperto e $F: B \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1 . Supponiamo che per ogni $(z_0, w_0) \in B$ esistano aperti $A_{z_0} \subset \mathbb{C}$ contenente z e $A_{w_0} \subset \mathbb{C}$ contenente w_0 tali che $A_{z_0} \times A_{w_0} \subset B$ e che

$$\begin{array}{ccc} F(\cdot, w): A_{z_0} \rightarrow \mathbb{C} & & F(z, \cdot): A_{w_0} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto F(z, w) & & w \mapsto F(z, w) \end{array}$$

sono funzioni olomorfe rispettivamente per ogni $w \in A_{w_0}$ e $z \in A_{z_0}$. Allora:

- (i) Se per $(z_0, w_0) \in Z_F$ la funzione $F_w = \frac{\partial F(z, \cdot)}{\partial w}$ non si annulla in (z_0, w_0) , allora esistono un disco \mathbb{D}_{z_0} centrato in z_0 , un disco \mathbb{D}_{w_0} centrato in w_0 e una funzione olomorfa $\phi: \mathbb{D}_{z_0} \rightarrow \mathbb{D}_{w_0}$ tale che $\phi(z_0) = w_0$ e

$$Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0}) = \{(z, \phi(z)) \mid z \in \mathbb{D}_{z_0}\}.$$

- (ii) Se per $(z_0, w_0) \in Z_F$ la funzione $F_z = \frac{\partial F(\cdot, w)}{\partial z}$ non si annulla in (z_0, w_0) , allora esistono un disco \mathbb{D}_{z_0} centrato in z_0 , un disco \mathbb{D}_{w_0} centrato in w_0 e una funzione olomorfa $\psi: \mathbb{D}_{w_0} \rightarrow \mathbb{D}_{z_0}$ tale che $\psi(w_0) = z_0$ e

$$Z_F \cap (\mathbb{D}_{z_0} \times \mathbb{D}_{w_0}) = \{(\psi(w), w) \mid w \in \mathbb{D}_{w_0}\}.$$

Dimostrazione: Naturalmente basterà dimostrare la parte (i) dell'enunciato, l'altra è completamente equivalente. Sia f_z la funzione olomorfa definita su A_{w_0} ponendo $f_z(z) = F(z, w)$. Dato che per ipotesi $\frac{\partial F(z, \cdot)}{\partial w}$ non si annulla in (z_0, w_0) , allora $f'_{z_0}(w_0) \neq 0$. Dunque esiste un disco \mathbb{D}_{w_0} centrato in w_0 tale che w_0 sia l'unico zero di f_{z_0} su $\overline{\mathbb{D}_{w_0}}$. Dunque per qualche $d > 0$ si ha $|f_{z_0}(w)| > 2d$ per ogni $w \in \partial\mathbb{D}_{w_0}$. Esiste allora, per continuità, un disco \mathbb{D}_{z_0} centrato in z_0 tale che se $z \in \mathbb{D}_{z_0}$ allora

$|f_z(w)| > d$ per ogni $w \in \partial\mathbb{D}_{w_0}$. Allora, per il Principio dell'Argomento, il numero n di radici dell'equazione $f_z(w) = 0$ è dato da

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_{w_0}} \frac{f'_z(\omega)}{f_z(\omega)} d\omega.$$

Dato che per $z = z_0$, si $n = 1$, per continuità si ha $n = 1$ per ogni $z \in \mathbb{D}_{z_0}$. Sia $\phi(z) \in \mathbb{D}_{w_0}$ l'unica radice in \mathbb{D}_{z_0} dell'equazione $f_z(w) = 0$. Con un argomento simile a quello suggerito nell'Esercizio **3** al termine del Paragrafo **1** di questo capitolo, si dimostra che deve essere:

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_{w_0}} \omega \frac{f'_z(\omega)}{f_z(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_{w_0}} \omega \frac{1}{F(z, \omega)} \frac{\partial F}{\partial z}(z, \omega) d\omega$$

da cui segue che ϕ è olomorfa dato che l'integrando è olomorfo nella variabile z . \square

8.2. Biolomorfismi.

Concludiamo il capitolo con una importante proprietà delle funzioni olomorfe che si ottiene come elegante corollario dei risultati ottenuti. Dimosteremo in particolare che l'inversa di una funzione olomorfa è necessariamente olomorfa e che quindi una applicazione olomorfa biettiva è necessariamente un biolomorfismo. Sarà necessario il seguente risultato di cui ripetiamo la dimostrazione per comodità del lettore.

TEOREMA 8.2.1: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, f una funzione olomorfa su Ω e $z_0 \in \Omega$. Se $f'(z_0) \neq 0$ esiste un aperto U con $z_0 \in U \subset \Omega$ tale che la restrizione $f|_U: U \rightarrow f(U) = V$ è biettiva e l'inversa $f^{-1}: V \rightarrow U$ è olomorfa.*

Dimostrazione: Siano u e v la parte reale e immaginaria della funzione $f: f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Allora, dato che f è olomorfa, si ha $f' = f_x$, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ e quindi

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = (u_x + iv_x)(u_x - iv_x) = f' \overline{f'} = |f'|^2.$$

Se $f'(z_0) \neq 0$, la funzione f , per il teorema dell'applicazione inversa per applicazioni di classe C^1 su aperti di \mathbb{R}^2 ammette una inversa $f^{-1}: V \rightarrow U$ di classe C^1 . Dato che $f'(z_0) \neq 0$, restringendo eventualmente U , si può supporre che $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in U$. Dunque derivando l'eguaglianza $z = f^{-1}(f(z))$, posto $w = f(z)$ si ha

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (f^{-1}(f(z))) = \frac{\partial f^{-1}}{\partial \bar{z}}(w) \overline{f'(z)}$$

e quindi $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f^{-1}) \equiv 0$ su U .

□

Persino per funzioni di classe C^ω l'invertibilità non garantisce che l'inversa conservi le proprietà di regolarità. L'esempio della funzione $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $u(x) = x^3$ chiarisce bene la situazione: u è un omeomorfismo ma u^{-1} non è derivabile in 0 dato che $u'(0) = 0$. Per funzioni olomorfe invece l'invertibilità locale garantisce che la derivata non si annulli mai e quindi che l'inversa sia olomorfa.

PROPOSIZIONE 8.2.2: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, f una funzione olomorfa su Ω e $z_0 \in \Omega$. Allora $f'(z_0) \neq 0 \iff$ esiste un aperto U con $z_0 \in U \subset \Omega$ tale che la restrizione $f|_U$ di f a U è iniettiva.*

Dimostrazione: In una direzione il risultato è immediata conseguenza del Teorema 8.2.1. Supponiamo che per $z_0 \in \Omega$ e per $r_1 > 0$ tale che $\mathbb{D} = \mathbb{D}(z_0, r_1) \subset \Omega$ si abbia che f è iniettiva su \mathbb{D} . Per assurdo supponiamo che $f'(z_0) = 0$. Dato che gli zeri di funzioni olomorfe sono isolati, per qualche r con $0 < r < r_1$, si ha $f'(z) \neq 0$ per ogni z tale che $0 < |z - z_0| < r$. D'altro canto per $|z - z_0| < r$, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2 + O(|z - z_0|^3) \\ &= f(z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2 + O(|z - z_0|^3) \end{aligned}$$

e quindi

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2 + O(|z - z_0|^3).$$

Allora la funzione $f - f(z_0)$, per l'iniettività di f su \mathbb{D} , ha in $\mathbb{D}(z_0, r)$ un unico zero in z_0 di molteplicità $\mu \geq 2$. Di conseguenza, per il principio dell'argomento, posto $\Gamma_r = \{z \mid |z - z_0| = r\}$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz = \mu \geq 2.$$

Sia $\delta = \min\{|f(z) - f(z_0)| \mid z \in \Gamma_r\} > 0$ e si consideri la funzione $\Phi: \mathbb{D}(f(z_0), \delta) \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da

$$\Phi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz.$$

Dunque $\Phi(w)$, per il principio dell'argomento, è uguale alla somma delle molteplicità degli zeri della funzione $f - w$ nel disco $|z - z_0| < r$ e quindi assume solo valori interi. Inoltre è semplice verificare che Φ è continua. Infatti se $w_n \rightarrow w_0$ allora, passando al limite sotto il segno d'integrale si vede subito che $\Phi(w_n) \rightarrow \Phi(w_0)$. Dunque la Φ è costante:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \Phi(w) = \Phi(f(z_0)) = \mu \geq 2 \quad (8.2.1)$$

per ogni $w \in \mathbb{D}(f(z_0), \delta)$. Per il principio dell'argomento (8.2.1) implica che il numero degli zeri, contati con la loro molteplicità, della funzione $f(z) - w$ sul disco $\mathbb{D}(z_0, r)$ è maggiore o uguale a 2. D'altro canto, dato che $f'(z) \neq 0$ per ogni z tale che $0 < |z - z_0| < r$, se $w \in \mathbb{D}(f(z_0), \delta) \setminus \{f(z_0)\}$, la funzione $f(z) - w$ può avere solo zeri semplici sul disco $\mathbb{D}(z_0, r)$. Dunque per ogni $w \in \mathbb{D}(f(z_0), \delta) \setminus \{f(z_0)\}$ esisterebbero almeno due punti $z_1, z_2 \in \mathbb{D}(z_0, r)$ tali che

$$f(z_1) = w = f(z_2).$$

Questo contraddice il fatto che f sia iniettiva su $\mathbb{D} = \mathbb{D}(z_0, r_1)$. □

I risultati precedenti danno immediatamente il seguente

TEOREMA 8.2.3: *Siano Ω e Ω' due aperti di $\hat{\mathbb{C}}$ e $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ una applicazione olomorfa. Allora f è un biolomorfismo $\iff f$ è biettiva.*

Dimostrazione: Per definizione, se f è un biolomorfismo è una funzione biettiva. Supponiamo che f sia olomorfa e biettiva. Sia $z \in \Omega$ arbitrario e $w = f(z) \in \Omega'$. Basterà dimostrare che f^{-1} è olomorfa in un intorno di w . Se $z, w \in \mathbb{C}$, allora allora la Proposizione 8.2.2 implica che f' non si annulla in un intorno aperto di z . In questo caso Teorema 8.2.1 garantisce che f^{-1} è olomorfa in un intorno di w . Se $z \in \mathbb{C}$ e $w = \infty$ o $z = \infty$ e $w \in \mathbb{C}$ o Se $z = w = \infty$, si usa lo stesso argomento rispettivamente alle funzioni $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$, $z \mapsto f(\frac{1}{z})$, $z \mapsto \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$. □

8.2. Il Teorema di rappresentazione di Riemann.

Scopo di questo paragrafo è di dimostrare il teorema di rappresentazione di Riemann: un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ connesso, semplicemente connesso con $\Omega \neq \mathbb{C}$ è biolomorfo al disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. La dimostrazione sarà divisa in vari segmenti anche per permettere di enunciare il risultato in modo più preciso. Cominciamo ricordando una proprietà fondamentale delle funzioni oloedre dimostrate nel Capitolo 5:

PROPOSIZIONE 8.2.1: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso semplicemente connesso e sia f una funzione oloedra su Ω . Allora f ha una primitiva oloedra su Ω ossia esiste F oloedra su Ω tale che $F' = f$. La funzione F è unica a meno di costanti.*

Utilizzeremo anche delle seguenti osservazioni di fatto già fatte nel Capitolo 5:

LEMMA 8.2.2: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto tale che per ogni funzione oloedra f su Ω esiste una primitiva oloedra su Ω . Allora ogni funzione oloedra su Ω che non si annulla ammette un logaritmo oloedro ossia per ogni funzione oloedra g su Ω con $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$, esiste h oloedra su Ω con $e^h = g$.*

Dimostrazione: Se g non si annulla mai, allora la funzione oloedra $f = g'/g$ ha una primitiva oloedra F su Ω . Dato che Ω è connesso e che $(ge^{-F})' = 0$ si ha che $ge^{-F} = k \neq 0$ per qualche costante k . Se $k = e^c$ allora $g = e^{cF}$ e quindi $h = cF$. \square

LEMMA 8.2.3: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto tale che per ogni funzione oloedra che non si annulla ammette un logaritmo oloedro. Allora ogni funzione oloedra su Ω che non si annulla ammette una radice quadrata oloedra ossia per ogni funzione oloedra g su Ω con $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$, esiste h oloedra su Ω con $h^2 = g$.*

Dimostrazione: Se g non si annulla mai, sia f la funzione oloedra su Ω con $g = e^f$. Allora $h = e^{f/2}$ è la radice quadrata oloedra cercata. \square

Il Teorema di Riemann sarà immediata conseguenza del seguente

LEMMA 8.2.4: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ con $\Omega \neq \mathbb{C}$ un aperto tale che ogni funzione oloedra su Ω che non si annulla ammette una radice quadrata oloedra. Sia $z_0 \in \Omega$. Esiste una funzione oloedra F su Ω tale che*

- (i) $F(z_0) = 0$ e $F'(z_0) > 0$;
- (ii) F è iniettiva;
- (iii) $F(\Omega) = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Dimostrazione: Denotiamo con $Hol(\Omega)$ l'insieme di tutte le funzioni oloedre definite su Ω e sia

$$\Lambda = \{f \in Hol(\Omega) \mid f \text{ è iniettiva, } f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0 \text{ e } f(\Omega) \subset \mathbb{D}\}.$$

Dunque se $f \in \Lambda$ si ha $\sup\{|f(z)| \mid z \in \Omega\} < 1$ e quindi, per il teorema di Montel, se è non vuota, Λ è una famiglia normale ossia ogni successione contenuta in Λ ammette una sottosuccessione uniformemente convergente sui compatti. In particolare allora la chiusura $\bar{\Lambda}$ è un compatto nella topologia della convergenza uniforme sui compatti.

I Passo: $\Lambda \neq \emptyset$.

Dato che $\Omega \neq \mathbb{C}$, esiste $b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Sia $g \in \text{Hol}(\Omega)$ tale che $g^2(z) = z - b$ per ogni $z \in \Omega$. E' chiaro allora che g è iniettiva visto che se $g(z_1) = g(z_2)$ si deve avere $z_1 - b = z_2 - b$. Inoltre, essendo non costante, g è aperta e quindi, per qualche $r > 0$ si deve avere $\mathbb{D}(g(z_0), r) \subset g(\Omega)$. Si ha

$$\mathbb{D}(-g(z_0), r) \cap g(\Omega) = \emptyset. \quad (8.2.1)$$

Infatti se esistesse $z \in \Omega$ con $g(z) \in \mathbb{D}(-g(z_0), r)$ allora

$$|-g(z) - g(z_0)| = |g(z) + g(z_0)| < r.$$

Dunque si avrebbe $-g(z) \in \mathbb{D}(g(z_0), r) \subset g(\Omega)$ e quindi $-g(z) = g(w)$ per qualche $w \in \Omega$. Ma allora si avrebbe anche $z - b = (g(z))^2 = (g(w))^2 = w - b$ ossia $z = w$. Pertanto seguirebbe che $g(z) = -g(z)$. Ma questo è possibile solo se $g(z) = 0$ che implica che $b = z \in \Omega$ contro l'ipotesi che $b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Se $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ denota la sfera di Riemann, da (8.2.1) si ha che

$$g(\Omega) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}(-g(z_0), r).$$

Sia T una trasformazione di Möbius tale che $T(\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}(-g(z_0), r)) = \mathbb{D}$ e si definisca $g_1 = T \circ g$. Se $g_1(z_0) = c \in \mathbb{D}$, sia ϕ_c un automorfismo di \mathbb{D} tale che $\phi_c(c) = 0$. Si consideri $g_2 = \phi_c \circ g_1 = \phi_c \circ T \circ g$. Evidentemente g_2 è olomorfa su Ω con $g_2(\Omega) \subset \mathbb{D}$ e $g_2(z_0) = 0$. Dato che g è iniettiva e $\phi_c \circ T$ è un biolomorfismo, g_2 è iniettiva. Infine, usando la Proposizione 7.3.2, si ha che $g_2'(z_0) = \rho e^{i\theta} \neq 0$. Allora $g_3 = e^{-i\theta} g_2 \in \Lambda$ e il **I Passo** è dimostrato.

II Passo: $\bar{\Lambda} = \Lambda \cup \{0\}$.

La topologia sullo spazio delle funzioni olomorfe è quella della convergenza uniforme sui compatti e quindi basterà dimostrare che se f_n è una successione in Λ uniformemente convergente sui compatti di Ω a f , allora o $f \in \Lambda$ o $f \equiv 0$. Sia dunque f_n una successione in Λ uniformemente convergente sui compatti di Ω a f . Allora f è olomorfa per il teorema di Weierstrass, e, dato che $f_n \in \Lambda$ per ogni n ,

$$f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(z_0) \geq 0.$$

Sia $z_1 \in \Omega$ arbitrario e si definiscano

$$\zeta = f(z_1) \quad \text{e} \quad \zeta_n = f_n(z_1) \quad \forall \quad n.$$

Per $z_2 \in \Omega \setminus \{z_1\}$, sia $K = \overline{\mathbb{D}(z_2, r)} \subset \Omega \setminus \{z_1\}$. Si osservi che, dato che f_n è iniettiva per ogni n , si ha per ogni $z \in K$

$$f_n(z) - \zeta_n = f_n(z) - f_n(z_1) \neq 0. \quad (8.2.2)$$

Dato che f_n converge uniformemente sui compatti di Ω a f , per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che se $n > N$ si ha

$$\sup_K |f_n - f| < \epsilon/2 \quad \text{e} \quad |f_n(z_1) - f(z_1)| < \epsilon/2$$

e quindi per $z \in K$ e $n > N$

$$\begin{aligned} |(f_n(z) - \zeta_n) - (f(z) - \zeta)| &= |(f_n(z) - f_n(z_1)) - (f(z) - f(z_1))| \\ &\leq |f_n(z) - f(z)| + |f_n(z_1) - f(z_1)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Dunque $f_n - \zeta_n$ converge uniformemente a $f - \zeta$ su K . Da (8.2.2) e dal Teorema di Hurwitz segue che o $f(z) - \zeta \neq 0$ per ogni $z \in K$ o $f \equiv \zeta$. Se $f \equiv \zeta$ su K allora f è costante per il teorema del prolungamento analitico e dato che $f(z_0) = 0$ deve essere $f \equiv 0$. Se invece $f(z) - \zeta \neq 0$ per ogni $z \in K$ allora, in particolare $f(z_1) \neq f(z_2)$. Ripetendo l'argomento per ogni $z_2 \neq z_1$, si ha che in questo caso f è iniettiva e che quindi $f'(z_0) > 0$. Infine, dato che per ogni n si ha $f_n(\Omega) \subset \mathbb{D}$, segue che $f(\Omega) \subset \overline{\mathbb{D}}$. D'altra parte $f(\Omega) \cap \partial\mathbb{D} = \emptyset$ perché altrimenti, per il principio del massimo modulo, f dovrebbe essere costante. Pertanto $f(\Omega)$ è un aperto contenuto in \mathbb{D} e quindi $f \in \Lambda$.

Possiamo dunque concludere la dimostrazione. Sia $\Phi: Hol(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ l'applicazione definita da $\Phi(f) = f'(z_0)$. Evidentemente la funzione Φ è continua nella topologia della convergenza uniforme sui compatti. Inoltre Φ assume su $\overline{\Lambda}$ solo valori reali. Dato che è una famiglia normale ed è un chiuso, allora $\overline{\Lambda}$ è compatto nella topologia della convergenza uniforme sui compatti. Dunque Φ assume massimo su $\overline{\Lambda}$: esiste $F \in \overline{\Lambda}$ tale che

$$F'(z_0) = \Phi(F) \geq \Phi(g) = g'(z_0) \quad \forall g \in \overline{\Lambda}. \quad (8.2.3)$$

Dal **I Passo** e dal **II Passo**, segue che non può essere $F \equiv 0$ e quindi si deve avere che F è iniettiva, con $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) > 0$ e $F(\Omega) \subset \mathbb{D}$. Grazie al Teorema 7.3.3 basterà dimostrare che $F(\Omega) = \mathbb{D}$.

Supponiamo per assurdo che esista $w \in \mathbb{D} \setminus F(\Omega)$. Ovviamente $w \neq 0$. Allora

$$h(z) = \frac{F(z) - w}{1 - \overline{w}F(z)}$$

definisce una funzione olomorfa su Ω con $h(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$. Sia H una radice quadrata olomorfa di h . Dato che $F(\Omega) \subset \mathbb{D}$ e che h è ottenuta da F mediante composizione con un automorfismo di \mathbb{D} si ha $h(\Omega) \subset \mathbb{D}$ e che h è iniettiva. Quindi anche $H(\Omega) \subset \mathbb{D}$ e H è iniettiva. Inoltre da $H^2 = h$ otteniamo

$$2H(z_0)H'(z_0) = (1 - |w|^2)F'(z_0) > 0 \quad (8.2.4)$$

e quindi, in particolare, che $H(z_0) \neq 0$ e $H'(z_0) \neq 0$. Sia $G \in Hol(\Omega)$ la funzione definita da

$$G(z) = \frac{|H'(z_0)|}{H'(z_0)} \frac{H(z) - H(z_0)}{1 - \overline{H(z_0)}H(z)}.$$

Allora $G(z_0) = 0$ e, dato che G è ottenuta componendo H con un automorfismo di \mathbb{D} , si ha che G è iniettiva e $G(\Omega) \subset \mathbb{D}$. Dato che da (8.2.4) segue che

$$H'(z_0) = \frac{(1 - |w|^2)F'(z_0)}{2H(z_0)}$$

e che $|H(z_0)|^2 = |h(z_0)| = |w|$, abbiamo

$$\begin{aligned} G'(z_0) &= \frac{|H'(z_0)|}{1 - |H(z_0)|^2} = \frac{(1 - |w|^2)F'(z_0)}{2\sqrt{|w|}} \frac{1}{1 - |w|} = \frac{1 + |w|}{2\sqrt{|w|}} F'(z_0) \\ &= \left(1 + \frac{(1 - \sqrt{|w|})^2}{2\sqrt{|w|}}\right) F'(z_0) > F'(z_0). \end{aligned}$$

Ma allora $G \in \Lambda$ e $\Phi(G) > \Phi(F)$ contro l'ipotesi che F è un massimo su $\overline{\Lambda}$ per Φ . \square

Possiamo ora enunciare

TEOREMA 8.2.5: (di rappresentazione di Riemann) *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso semplicemente connesso con $\Omega \neq \mathbb{C}$. Per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste una unica applicazione biolomorfa $F: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ tale che $F(z_0) = 0$ e $F'(z_0) > 0$.*

Dimostrazione: L'esistenza della funzione F è conseguenza della Proposizione 8.2.1 e dei Lemmi 8.2.2, 8.2.3 e 8.2.4. Rimane dunque da dimostrare solo l'unicità. Questa è una semplice conseguenza del Lemma di Schwartz. Infatti siano $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ applicazioni biolomorfe con $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $f'(z_0), g'(z_0) > 0$, allora $f \circ g^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ è un automorfismo di \mathbb{D} con $f \circ g^{-1}(0) = 0$. Dunque $f \circ g^{-1}(z) = cz$ con c numero complesso con $|c| = 1$. D'altro canto deve essere $(f \circ g^{-1})'(0) > 0$ e quindi $c = 1$ da cui segue che $f = g$. \square

Infine si ricava immediatamente la seguente classificazione:

TEOREMA 8.2.6: *Sia $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ un aperto connesso semplicemente connesso. Allora vale una delle seguenti mutualmente esclusive affermazioni:*

- (i) $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$;
- (ii) Ω è biolomorfo a \mathbb{C} ;
- (iii) Ω è biolomorfo al disco unitario.

Dimostrazione: Il fatto che (i), (ii), (iii) siano mutualmente esclusivi è ovvio dato che $\hat{\mathbb{C}}$ è compatto e che \mathbb{C} , per il teorema di Liouville, non può essere biolomorfo al disco unitario.

Se $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$ allora vale (i). Supponiamo che $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega = \{a\}$. Se $a = \infty$ allora $\Omega = \mathbb{C}$. Se $a \neq \infty$, si consideri la trasformazione di Möbius T definita da $T(z) = \frac{1}{z-a}$. Allora $T(\Omega) = \mathbb{C}$ e quindi vale (ii). Infine supponiamo che $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ contenga almeno due punti distinti a, b . Se uno di essi è ∞ , allora $\Omega \subset \mathbb{C}$ è un aperto semplicemente connesso con $\Omega \neq \mathbb{C}$ e quindi vale (iii). Se $a \neq \infty$ e $b \neq \infty$, si consideri la trasformazione di Möbius S definita da $S(z) = \frac{1}{z-b}$. Allora $\hat{\mathbb{C}} \setminus S(\Omega)$ contiene almeno due punti e uno di questi è ∞ e pertanto $S(\Omega)$ e quindi Ω sono biolomorfi al disco unitario. Anche in questo caso vale (iii). \square

8.3. Domini semplicemente connessi in \mathbb{C}

Riassumiamo alcune conseguenze topologiche di quello che abbiamo dimostrato riguardo gli aperti semplicemente connessi in \mathbb{C} :

TEOREMA 8.3.1: $\Omega \subset \mathbb{C}$, un aperto connesso. *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- (i) Ω è semplicemente connesso;
- (ii) ogni $f \in \text{Hol}(\Omega)$ ha una primitiva olomorfa;
- (iii) ogni $f \in \text{Hol}(\Omega)$ con $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$ ha un logaritmo olomorfo;
- (iv) ogni $f \in \text{Hol}(\Omega)$ con $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$ ha una radice quadrata olomorfa;

(v) Ω è omeomorfo al disco unitario.

Dimostrazione: Abbiamo dimostrato praticamente tutto:

(i) \Rightarrow (ii) è la Proposizione 8.2.1;

(ii) \Rightarrow (iii) è il Lemma 8.2.2;

(iii) \Rightarrow (iv) è il Lemma 8.2.3;

(iv) \Rightarrow (v) Segue dal Lemma 8.2.4 se $\Omega \neq \mathbb{C}$. Sia $\Omega = \mathbb{C}$. Allora ad esempio l'applicazione $\phi(z) = \frac{z}{1+|z|}$ è un omeomorfismo (ovviamente non olomorfo!);

(v) \Rightarrow (i) È immediato. □

Con (un bel po'!!) più di fatica si può dimostrare che le condizioni elencate nel Teorema 8.3.1 sono equivalenti alle seguenti più geometriche proprietà:

(vi) $\mathbb{C} \setminus \Omega$ non ha componenti connesse compatte (ossia Ω non ha "buchi");

(vii) $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ è connesso.

Per dimostrazioni che (vi) e (vii) equivalgono a (i), si può consultare ad esempio una fra queste fonti:

- J.B. Conway, Functions of one complex variable, Springer
- Narasimhan, Complex analysis in one complex variable, Birkäuser
- W. Rudin, Analisi reale e complessa, Boringhieri.

