GEOMETRIA I, c.d.L. in Matematica, compito del 12 gennaio 2011, A.A. 2010-2011, FILA I

NON SI POSSONO UTILIZZARE CALCOLATRICI NÉ CONSULTARE LIBRI O APPUNTI

NOME E COGNOME: ______________________________

Numero di matricola o data di nascita: ______________________________

1) DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO. OGNI RISPOSTA ESATTA VALE 3 PUNTI

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

1a) Trovare una base di $Ker\ L_A$

1b) Trovare una base di $Im\ L_A$

1c) Trovare un'espressione cartesiana dell'immagine di L_A

1d) Trovare una base di $Ker\ L_A \cap \{x \in \mathbf{R}^4 |\ x_2 + x_3 = 0\}$

1e) Dire per quali valori di t, s, u in $\mathbf{R}$ esiste un'applicazione lineare $g : \mathbf{R^4} \to \mathbf{R}^3$ tale che $g(A^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g(A^{(2)}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g(A^{(3)}) = \begin{pmatrix} t \\ s \\ u \end{pmatrix}$.

2) Rispondere (con precisione) alle seguenti domande ciascuna delle quali vale 3 punti

2a) Dare la definizione di base di uno spazio vettoriale (finitamente generato).

2b) Enunciare la formula di Grassmann.

2c) Enunciare il teorema della dimensione.

3) RISPONDERE, MOTIVANDO, ALLE SEGUENTI DOMANDE CIASCUNA DELLE QUALI VALE 5 PUNTI.

3a) Trovare due matrici $A, B \in M(3 \times 3, \mathbf{R})$ tali che
$$\left(\begin{array}{cccccc} & & & 5 & 1 & 0 \\ & A & & 0 & 6 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 1 & & & \\ 0 & 2 & 0 & & B & \\ 3 & 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$
sia di rango 4.

3b) Siano n un numero naturale maggiore o uguale a 1 e $\mathbf{K}$ un campo. Dire per quali $k \in \mathbf{N}$, l'insieme $Z_k := \{A \in M(n \times n, \mathbf{K}) |\ rg(A) \leq k\}$ è un sottospazio vettoriale di $M(n \times n, \mathbf{K})$ (quando lo è, dimostrare che lo è, quando non lo è dare un controesempio a una delle due chiusure).