GEOMETRIA I, c.d.L. in Matematica, compito del 10 maggio 2011, A.A. 2010-2011 — Fila B

NON SI POSSONO UTILIZZARE COLCOLATRICI NÉ CONSULTARE LIBRI O APPUNTI

NOME E COGNOME: ____

Numero di matricola o data di nascita: ________________________________

1) DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO. OGNI RISPOSTA ESATTA VALE 3 PUNTI

1a) Nel piano, al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$, determinare per quale b le rette $\mathbf{r} : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = bt \end{cases}$ e $\mathbf{s} : x - by - b = 0$ sono (i) incidenti, (ii) parallele, (iii) ortogonali.

1b) Sia $A \in M_n(\mathbf{R})$, μ un suo autovalore e $v \in \mathbf{R}^n$ un autovettore di A relativo a μ. Se $C = A^2 + 2A = A \cdot A + 2A$, dire se v è un autovettore di C e, in caso affermativo, dire relativamente a quale autovalore. Se A è simile a una matrice diagonale D, dire se C è simile a una matrice diagonale e in caso positivo dire a quale.

1c) Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di $\mathbf{R}^3$ che consideriamo con il prodotto scalare canonico. Determinare i vettori di lunghezza 1 ortogonali a $v_1 = -3e_1 + e_2$ e $v_2 = 2e_1 + e_3$

1d) Nello spazio euclideo, calcolare la distanza tra il piano $\pi : x + 2y - z = 2$ e la retta $\ell : \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}$.

2) Rispondere (con precisione) alle seguenti domande:

2a) **(Vale 4 punti)** Dare la definizione di base ortonormale di uno spazio vettoriale metrico. Data una base ortonormale per uno spazio vettoriale metrico esprimere in somma di Fourier un qualunque vettore dello spazio e dimostrare la formula.

2b) **(Vale 3 punti)** Dare la definizione di autovalore e autovettore di un endomorfismo $T: V \to V$ di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbf{K}$.

2c) **(Vale 3 punti)** Sia $T: V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio vettoriale metrico e siano v_1, v_2 autovettori di T relativi ad autovalori $\mu_1, \ldots, \mu_2$ distinti. Dimostrare che v_1, v_2 sono ortogonali.

3) RISPONDERE, MOTIVANDO, ALLE SEGUENTI DOMANDE.

3a) **(Vale 5 punti)** Considerare l'applicazione lineare $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che:

$$T(e_1) = T(e_2) = T(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^3$.
i) Stabilire, dando motivazione, se T è diagonalizzabile e se è diagonalizzabile rispetto a una base ortonormale.
ii) Se T è diagonalizzabile, trovare una matrice diagonale associata a T, una base diagonalizzante e, nel caso sia possibile, una base diagonalizzante ortonormale.

3b) **(Vale 7 punti)** Nel piano euclideo con riferimento cartesiano $\mathcal{R} = RC(O, x, y)$ si consideri la conica

$$\mathcal{C} \quad : \quad -5x^2 - 6\sqrt{3}xy + y^2 + 2\sqrt{3}y = 1.$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è una conica a centro e calcolare le coordinate del centro.
ii) Trovare la forma canonica affine di $\mathcal{C}$.
iii) Trovare la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$ e il relativo cambiamento di base.
iv) Scrivere l'equazioni cartesiane degli assi di $\mathcal{C}$ rispetto al riferimento $\mathcal{R}$.