GEOMETRIA I, c.d.L. in Matematica, Prova Scritta 3 maggio 2011, A.A. 2010-2011 - Fila 2

NON SI POSSONO UTILIZZARE COLCOLATRICI NÉ CONSULTARE LIBRI O APPUNTI

NOME E COGNOME: ____

Numero di matricola o data di nascita: ________________________________

1) DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO. OGNI RISPOSTA ESATTA VALE 3 PUNTI

1a) Dire se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali. Inoltre se lo sono, indicare una loro base, se non lo sono, dare un controsempio o alla chiusura per la somma o alla chiusura per il prodotto per uno scalare:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 |\ x_1 + 2x_2 - 1 = 0 \right\} \qquad \mathcal{B} = \left\{ A \in M(2 \times 2, \mathbf{R}) |\ A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = {}^t A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1b) Se $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, trovare la matrice associata a L_A nelle basi di partenza $\mathcal{B} = \{e_3, e_4 - e_3, e_1 - e_2, e_1\}$ e di arrivo $\mathcal{C} = \{e_1 - e_2, e_1, e_3, e_4 - e_3\}$.

1c) Calcolare la distanza tra il punto $P = (0, 2, 1)$ e la retta $r : x - z - 1 = x + y - z = 0$.

1d) Dire se la funzione $f : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da $f(v, w) = \langle v \wedge w, w \wedge e_2 \rangle$ costituisce una forma bilineare. In caso affermativo scrivere la matrice associata rispetto alla base canonica. In caso negativo fornire un controesempio ad una delle proprietà della bilinearità.

2) Rispondere (con precisione) alle seguenti domande:

2a) **(Vale 5 punti)** Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbf{K}$, $T\colon V \to W$ un'applicazione lineare e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ basi rispettivamente di Vdi W.
(i) Definire la matrice A di T relativamente alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$
(ii) Dimostrare che T è inettiva se e solo se A ha rango n.
(iii) Definire un isomorfismo fra lo spazio $\mathcal{L}(V, W)$ delle applicazioni lineari da V in W e lo spazio di matrici $M_{m,n}(\mathbf{K})$.

2b) **(Vale 5 punti)** Sia V uno spazio vettoriale metrico.
(i) Dare la definizione di isometria $T\colon V \to V$.
(ii) Dimostrare che una isometria trasforma una base ortonormale in una base ortonormale
(iii) Sia $\lambda \in \mathbf{R}$ un autovalore reale di un'isometria T. Dimostrare che $\lambda = \pm 1$.

3) RISPONDERE, MOTIVANDO, ALLE SEGUENTI DOMANDE CIASCUNA DELLE QUALI VALE 6 PUNTI.

3a) **(Vale 6 punti)** Una matrice A quadrata si dice nilpotente se esiste un intero positivo n tale che A^n è la matrice nulla.
i) Dimostrare che se A è una matrice nilpotente, allora $det(A) = 0$.

ii) Sia $A_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & y & y \\ 0 & y & 0 & z \\ y & y & x & 0 \end{pmatrix}$. Calcolare il determinante di $A_{x,y,z}$ al variare di x, y e z in $\mathbf{R}$.

iii) Dire per quali valori di x, y e z in $\mathbf{R}$ la matrice $A_{x,y,z}$ è nilpotente.
iv) Dire, motivando, per quali y e z in $\mathbf{R}$ la matrice $A_{x,0,z}$ è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$.

3b) **(Vale 6 punti)**
Al variare del parametro $b \in \mathbf{R}$ si consideri la conica

$$\mathcal{C}_b : x^2 + 6xy - by^2 + 2x + 2by = 0$$

(i) Dare la classificazione affine di $\mathcal{C}_b$ al variare di b.

(ii) Verificare che $\mathcal{C}_b$ è una iperbole per $b = -1$ e trovare la classificazione euclidea di $\mathcal{C}_{-1}$.

(iii) Trovare le equazioni degli assi di $\mathcal{C}_{-1}$.