GEOMETRIA I, c.d.L. in Matematica, Prova Scritta 18 luglio 2011, A.A. 2010-2011

NON SI POSSONO UTILIZZARE CALCOLATRICI NÉ CONSULTARE LIBRI O APPUNTI - Fila 1

NOME E COGNOME: ____

Numero di matricola o data di nascita: ________________________________

1) DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO.

1a) VALE 2 PUNTI. Dire se il seguente sottoinsieme è un sottospazio vettoriale. Inoltre se lo è, indicare una base, se non lo è, dare un controsempio o alla chiusura per la somma o alla chiusura per il prodotto per uno scalare:

$\mathcal{Z} = \{v \in \mathbf{R}^3 |\ (v, w) < 0\}$ dove $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $(\ ,\ )$ è il prodotto scalare standard.

1b) VALE 4 PUNTI. Trovare, se esistono, A e $B \in M(2 \times 2, \mathbf{R})$ tali che $\begin{pmatrix} C & A \\ B & D \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} C & A \\ B & D' \end{pmatrix}$ siano di rango 3, dove:

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $D' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1c) VALE 3 PUNTI. Trovare l'equazione cartesiana del piano nello spazio euclideo passante per $P = (0, 1, 2)$ e perpendicolare alla retta $x - z - 1 = x + y = 0$.

1d) VALE 3 PUNTI. Dare la classificazione affine della conica di equazione $x^2 + 2y^2 - 3xy + 2y = 0$

2) Rispondere (con precisione) alle seguenti domande:
2a) VALE 5 PUNTI. Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbf{K}$ finitamente generati, e sia $T: V \to W$ un'applicazione lineare.
a) Dire cosa vuol dire che T è un isomorfismo.
b) Dimostrare che se T è biettiva, T^{-1} è lineare.
c) Dimostrare che esiste un isomorfismo $T: V \to W$ se e solo se V e W hanno la stessa dimensione

2b) VALE 5 PUNTI. Sia V uno spazio vettoriale metrico.
a) Dare la definizione di endomorfismo autoaggiunto $T: V \to V$.
b) Dimostrare che dimostrare che autovettori di un endomorfismo autoaggiunto associati a autovalori distinti sono ortogonali.
c) Dimostrare la proiezione ortogonale su un sottospazio di V è un endomorfismo autoaggiunto.

3) RISPONDERE, MOTIVANDO, ALLE SEGUENTI DOMANDE CIASCUNA DELLE QUALI VALE 6 PUNTI.

3a) VALE 6 PUNTI. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ di dimensione 3. Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare non nulla tale che $f^2 = 0$.
i) Dimostrare che non esistono due basi di V, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{P}$, tali che la matrice associata a f nelle basi di partenza $\mathcal{P}$ e di arrivo $\mathcal{A}$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
ii) Dimostrare che esistono due basi di V, $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{P}'$, tali che la matrice associata a f nelle basi di partenza $\mathcal{P}'$ e di arrivo $\mathcal{A}'$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3b) VALE 6 PUNTI. Sia $\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la forma quadratica cui è associata rispetto alla base canonica la matrice

$$A = \begin{pmatrix} h & h+1 & 0 \\ h+1 & h & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Dire qual'è la segnatura di ϕ se $h = 0$.
ii) Discutere la segnatura di ϕ al variare del parametro h.
iii) Se $h = 0$ trovare una matrice ortogonale B tale che $B^T AB$ sia diagonale.