

Classificazione affine delle coniche reali

Data una conica reale C di matrice A e matrice della parte quadratica A_2 , sia (p,q) la segnatura di A . Sono invarianti affini di C (ossia invarianti a meno di cambiamento di riferimento affine e di multipli non nulli dell'equazione):

- il rango di A
- il segno del determinante di A_2
- il *valore assoluto* $S = |p - q|$ della segnatura di A

Questi invarianti determinano il tipo affine della conica C e si ha la casistica descritta dalla seguente tabella:

rg (A)	det (A ₂)	S = p-q	Forma Canonica Affine	Nome	Note
3	> 0	1	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	ellisse	non degenerare, a centro
3	> 0	3	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	ellisse immaginaria	non degenerare, a centro, senza punti reali!
3	< 0		$x^2 - y^2 - 1 = 0$	iperbole	non degenerare, a centro
3	0		$x^2 - y = 0$	parabola	non degenerare, paraboloidale
2	< 0		$x^2 - y^2 = 0$	due rette reali incidenti	degenerare, a centro
2	> 0		$x^2 + y^2 = 0$	due rette complesse coniugate incidenti	degenerare, a centro, senza punti reali!
2	0	0	$x^2 - 1 = 0$	due rette reali parallele	degenerare, a centro
2	0	2	$x^2 + 1 = 0$	due rette coniugate parallele	degenerare, a centro, senza punti reali!
1	0		$x^2 = 0$	retta doppia	"doppiamente" degenerare, a centro

Classificazione affine delle quadriche reali

Data una quadrica reale Q di matrice A e matrice della parte quadratica A_3 , siano (p,q) la segnatura di A e la segnatura (p',q') di A_3 . Sono invarianti affini di Q (ossia invarianti a meno di cambiamento di riferimento affine e di multipli non nulli dell'equazione):

il rango di A , il rango di A_3 , il segno del determinante di A , il *valore assoluto* $S = |p - q|$ della segnatura di A e il *valore assoluto* $s = |p' - q'|$ della segnatura di A_3 .

Questi invarianti determinano il tipo affine della quadrica Q e si ha la casistica descritta dalla seguente tabella:

rg (A)	rg (A ₃)	det (A)	S = p-q	s = p'-q'	Forma Canonica Affine	Nome	Note
4	3	< 0	2	3	$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$	ellissoide	non degenerare, a centro
4	3	> 0	4	3	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$	ellissoide immaginario	non degenerare, a centro, senza punti reali!
4	3	< 0	2	1	$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$	iperboloide ellittico	non degenerare, a centro
4	3	> 0	0	1	$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$	iperboloide iperbolico	non degenerare, a centro
4	2	< 0			$x^2 + y^2 - z = 0$	paraboloide ellittico	non degenerare, paraboloide
4	2	> 0			$x^2 - y^2 - z = 0$	paraboloide iperbolico	non degenerare, paraboloide
3	3	0	1	1	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	cono reale	degenerare, a centro
3	3	0	3	3	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	cono immaginario	degenerare, a centro, senza punti reali!
3	2	0	1	2	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	cilindro ellittico	degenerare, a centro
3	2	0	1	0	$x^2 - y^2 - 1 = 0$	cilindro iperbolico	degenerare, a centro
3	1	0			$x^2 + y = 0$	cilindro parabolico	degenerare, paraboloide
3	2	0	3	2	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	cilindro immaginario	degenerare, a centro, senza punti reali!
2	2	0	0	0	$x^2 - y^2 = 0$	due piani incidenti	degenerare, a centro
2	2	0	2	2	$x^2 + y^2 = 0$	due piani complessi incidenti	degenerare, a centro
2	1	0	0	1	$x^2 - 1 = 0$	due piani paralleli	degenerare, a centro
2	1	0	2	1	$x^2 + 1 = 0$	due piani complessi coniugati paralleli	degenerare, a centro, senza punti reali!
1	1	0			$x^2 = 0$	piano doppio	degenerare, a centro