Il determinante.

Queste note, basate sugli appunti delle lezioni, riepilogano rapidamente la definizione e le proprietà del determinante. Vengono inoltre illustrati i metodi di calcolo e alcune dimostrazioni. Per una trattazione completa si veda ad esempio il Capitolo 9 del testo Abate - de Fabritiis, Geometria analitica con elementi di algebra lineare.

1. Definizione e calcolo del determinante.

Lo scopo della teoria dei determinanti è di definire una funzione, chiamata *determinante*, sullo spazio delle matrici quadrate di ordine n, per ogni n, calcolabile facendo somme e prodotti delle entrate delle matrici. In particolare si desidera che il determinante di una matrice sia non nullo se e solo se la matrice è invertibile.

Per $n = 1$, ossia per matrici di ordine 1, lo scopo si ottiene semplicemente assegnando alla matrice (a) il valore $\det(a) = a$ per ogni scalare a. Si osservi che in questo caso alla matrice unità $I_1 = (1)$ si associa il numero $\det(I_1) = 1$.

Nel caso $n = 2$, ossia per matrici di ordine 2, osserviamo che richiedere che una matrice sia invertibile è equivalente a richiedere che sue righe non siano proporzionali. Dunque

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

è non singolare se e solo se le righe (a_{11}, a_{12}) e (a_{21}, a_{22}) non sono proporzionali e questo succede se e solo se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Tenendo conto di quanto detto sopra, sembra ragionevole associare alla matrice A il numero $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Si osservi che anche in questo caso questa funzione associa alla matrice unità I_2 il numero 1. Il determinante delle matrici quadrate di ordine 2 definito in questo modo ha una semplice interpretazione geometrica. Su $\mathbb{R}^2$ si considerino due vettori v, w. I vettori v, w individuano un parallelogramma che denotiamo $P(v, w)$. Se in termini della base canonica $\{e_1, e_2\}$ si ha $v = v_1e_1 + v_2e_2$ e $w = w_1e_1 + w_2e_2$ e

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix},$$

allora, con una semplice verifica geometrica, si dimostra (vedi Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pg. 145) che

$$\det(A) = \begin{cases} Area(P(v,w)) & \text{se si passa da } v \text{ a } w \text{ ruotando in senso antiorario} \\ \\ -Area(P(v,w)) & \text{se si passa da } v \text{ a } w \text{ ruotando in senso orario.} \end{cases}$$

In questo modo si ritrova geometricamente che se le righe della matrice di A sono proporzionali allora il determinate si annulla dato che in questo caso il parallelogramma $P(v, w)$ degenera a un segmento o a un punto.

Con queste motivazioni e con l'esempio delle matrici di ordine 2 in mente, diamo ora una definizione formale. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e si denoti $M_n = M_{n,n}(\mathbb{K})$ lo spazio delle matrice quadrate di ordine n con elementi in $\mathbb{K}$. Se $A \in M_n$ allora si può cosiderare A come collezione di n righe $A = (A_1, \dots, A_n)$ oppure come collezione di n colonne $A = (A^1, \dots, A^n)$

Definizione. Per ogni $n \geq 1$ un *determinante* è una funzione $d_n \colon M_n \to \mathbb{K}$ che ha le seguenti proprietà

(A) d_n si annulla sulle matrici che hanno due righe uguali, ossia

$$d_n(A_1, \dots, A_n) = 0 \text{ se } A_i = A_j \text{ per } i \neq j.$$

(B) d_n è lineare in ciascuna riga, ossia fissato $j \in \{1, \dots, n\}$ si deve avere

$$d_n(A_1, \dots, A_j + A'_j, \dots, A_n) = d_n(A_1, \dots, A_j, \dots, A_n) + d_n(A_1, \dots, A'_j, \dots, A_n)$$
$$d_n(A_1, \dots, \lambda A_j, \dots, A_n) = \lambda d_n(A_1, \dots, A_j, \dots, A_n).$$

(C) $d_n(I_n) = 1$.

È facile controllare che il determinante che abbiamo definito per le matrici di ordine 2 verifica le condizioni (A), (B), (C) della definizione. Prima di enunciare il risultato di esistenza per matrici di ordine arbitrario, dobbiamo introdurre una notazione.

Definizione. Se $A \in M_n$, si dice *minore* (i, j) di A la matrice $A_{ij} \in M_{n-1}$ ottenuta da A togliendo la i-esima riga e la j-esima colonna.

Teorema 1.1: *Per ogni $n \geq 1$ esiste un'unica funzione determinante $d_n\colon M_n \to \mathbb{K}$ che verifica le proprietà (A), (B), (C) e vale la seguente formula per ricorrenza per ogni matrice $A = (a_{ij}) \in M_n$:*

$$d_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} d_{n-1}(A_{i1}). \tag{1.1}$$

Non è difficile provare che il risultato è vero per $n = 2$. Il caso generale segue argomentando per induzione (per la dimostrazione si veda Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pgg. 152-53)). Si osservi che il determinante di matrici di qualunque ordine ha un significato geometrico che generalizza quello per matrici di ordine 2. In particolare si può dimostrare che per vettori u, v, w di $\mathbb{R}^3$, se in termini della base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ si ha $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$, $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ e $w = w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3$ e

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix},$$

allora $|\det(A)|$ è il volume del parallelogramma definito dai vettori u, v, w (vedi Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pgg. 239-40)

Qui ci limitiamo a fare qualche osservazione sul calcolo del determinante e sulle sue proprietà. Infatti la formula (1.1) diventa sempre più complicata al crescere di n e, d'altra parte, non abbiamo ancora verificato che la funzione determinante costruita in questo modo è in grado di "riconoscere" le matrici invertibili. Da questo momento in poi denoteremo funzione determinante con il simbolo det e per $A \in M_n$ scriveremo $\det(A) = d_n(A)$. Abbiamo la seguente

Proposizione 1.2: *Sia $A = (A_1, \ldots, A_n) \in M_n$ una matrice quadrata di ordine n. Allora*

(i) *Se A ha una riga nulla allora $\det(A) = 0$.*

(ii) *Il valore del determinante non cambia se si somma a una riga un multiplo di un'altra, ossia per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e per indici $i \neq j$ si ha*

$$\det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_i + \lambda A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n).$$

(iii) *Il valore del determinante cambia segno se si scambiano due righe:*

$$\det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = -\det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n).$$

(iv) *Se S è una matrice triangolare superiore ottenuta da A mediante una riduzione di Gauss che comporta σ scambi di righe, allora*

$$\det(A) = (-1)^{\sigma} \det(S).$$

(v) *Se A ha le righe linearmente dipendenti allora $\det(A) = 0$.*

(vi) *Se S è una matrice triangolare superiore e siano $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{K}$ gli elementi sulla diagonale di S, allora*

$$\det(S) = p_1 \ldots p_n.$$

(vii) *A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$.*

Dimostrazione: (i) Si ha $\det(A) = \det(A_1, \ldots, A_{j-1}, 0, A_{j+1}, \ldots, A_n) = 0$ dato che det è lineare in ciascuna riga a valori in $\mathbb{K}$ e quindi vale 0 sul vettore nullo.

(ii) Ancora utilizzando la linearità su ciascuna riga e la proprietà (A) dei determinanti, se $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha

$$\begin{aligned}\det(A_1, \ldots, A_i + \lambda A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) &= \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \\ &\quad + \lambda \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \\ &= \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \det(A).\end{aligned}$$

(iii) Si ha

$$\begin{aligned}0 &= \det(A_1, \dots, A_i + A_j, \dots, A_i + A_j, \dots, A_n)\\ &= \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_i + A_j, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i + A_j, \dots, A_n)\\ &= \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n)\\ &\qquad + \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_j, \dots, A_n)\\ &= \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n)\end{aligned}$$

e quindi (iii) segue.

(iv) È immediata da (ii) e(iii).

(v) Se A ha le righe linearmente dipendenti, allora una sua qualunque riduzione a scala ha una riga nulla e quindi (v) segue da (i) e (iv).

(vi) Usando la linearità del determinante nella prima riga si ha

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Dato che $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix}$ ha le righe linearmente dipendenti, usando (v) e, ripetendo l'argomento, si ha

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix} &= a_{11}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix}\\ &= a_{11}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix}\\ &\quad + a_{11}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix}\\ &= a_{11}a_{22}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix} = \dots\\ &= a_{11}a_{22}\dots a_{nn}\det(I_n) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.\end{aligned}$$

(vii) Una matrice A è invertibile se e solo se una sua qualunque riduzione a scala ha tutti i pivot non nulli. Per (vi) questo succede se e solo se è non nullo il determinante di una qualunque riduzione a scala di A, che per (iv) ha valore assoluto uguale al valore assoluto del determinante di A. $\square$

Il punto (vi) della Proposizione 1.2 fornisce un metodo di calcolo molto efficace per il determinante: è sufficiente ridurre a scala la matrice mediante una riduzione di Gauss tenendo il conto degli scambi di righe! Infatti se S è un'arbitraria riduzione a scala di A ottenuta mediante σ scambi di righe e $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{K}$ sono gli elementi sulla diagonale di S, allora, (vi) e (vi) della Proposizione 1.2 implicano che

$$\det(A) = (-1)^{\sigma} p_1 \ldots p_n.$$

C'è un altro metodo di calcolo per i determinanti, i cosiddetti sviluppi di Laplace che generalizzano la formula (1.1). Precisamente abbiamo il seguente

Teorema 1.3: *Sia $A = (a_{ij}) \in M_n$ una matrice quadrata di ordine n.*

(i) *per ogni $j_0 = 1, \ldots, n$ fissato, vale la seguente formula detta sviluppo di Laplace del determinante lungo la colonna j_0-esima:*

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} det(A_{ij_0}). \tag{1.2}$$

(ii) *per ogni $i_0 = 1, \ldots, n$ fissato, vale la seguente formula detta sviluppo di Laplace del determinante lungo la riga i_0-esima:*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} det(A_{i_0 j}). \tag{1.3}$$

Per una dimostrazione si veda Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pgg. 155-56. Argomentando per induzione (vedi Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pg. 156), dal Teorema 1.3 segue (quasi) immediatamente:

Teorema 1.4: *Sia $A \in M_n$ una matrice quadrata di ordine n. Allora* $\det(A) = \det(A^T)$.

Il Teorema 1.4 implica che gli enunciati riguardanti il determinante espressi in termini di righe si possono riformulare in termini di colonne. In particolare il determinante è una funzione lineare in ciascuna colonna e vale la seguente:

Proposizione 1.5: *Sia $A = (A^1, \ldots, A^n) \in M_n$ una matrice quadrata di ordine n.*

(i) *Se A ha una colonna nulla allora* $\det(A) = 0$.

(ii) *Il valore del determinante non cambia se si somma a una colonna un multiplo di un'altra, ossia per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e per indici $i \neq j$ si ha*

$$\det(A^1, \ldots, A^i, \ldots, A^j, \ldots, A^n) = \det(A^1, \ldots, A^i + \lambda A^j, \ldots, A^j, \ldots, A^n).$$

(iii) *Il valore del determinante cambia segno se si scambiano due colonne:*

$$\det(A^1, \ldots, A^i, \ldots, A^j, \ldots, A^n) = -\det(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^i, \ldots, A^n).$$

Concludiamo il paragrafo calcolando in due modi diversi il determinante di una matrice.

Esempio. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A riducendola a scala mediante un'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{scambio}\\ \text{di righe}}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{scambio}\\ \text{di righe}}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}.$$

Dunque, utilizzando Proposizione 1.2 e osservando che nella riduzione a scala abbiamo operato 2 scambi di righe, possiamo concludere che

$$\det(A) = (-1)^2(1 \cdot -1 \cdot 1 \cdot -2 \cdot 21) = 42.$$

Calcoliamo ora il determinante di A combinando le altre tecniche che abbiamo introdotto:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{sommando alle altre}\\ \text{multipli prima riga}}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{sviluppo di Laplace}\\ \text{prima colonna}}}{=} (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ -5 & -5 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{sottraendo prima}\\ \text{colonna alla seconda}}}{=} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -5 & 0 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{sviluppo di Laplace}\\ \text{seconda colonna}}}{=} (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -5 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{sommando terza}\\ \text{riga alla seconda}}}{=} -\det \begin{pmatrix} -5 & -6 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{sottraendo prima}\\ \text{colonna alla terza}}}{=} -\det \begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{sviluppo di Laplace}\\ \text{seconda riga}}}{=} -(-1)^{1+2}(-2) \det \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (-2)(-18-3) = 42.$$

2. Determinante e prodotto di Matrici.

Il determinante rispetta la struttura moltiplicativa delle matrici. Vale infatti il seguente importante:

Teorema 2.1: (di Binet) *Siano* $A, B \in M_n$. *Allora* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Dimostrazione: Se $\det(B) = 0$ la tesi è immediata. In questo caso infatti la matrice B non è invertibile e quindi esiste un vettore $v \neq 0_n$ in $\mathbb{K}^n$ tale che $Bv = 0_n$. Dunque si ha anche $ABv = 0_n$ e quindi la matrice AB non è invertibile e $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$. Supponiamo allora che $\det(B) \neq 0$. Si definisca la funzione $D\colon M_n \to \mathbb{K}$ mediante

$$D(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}.$$

La tesi seguirà anche in questo caso provando che $D(A) = \det(A)$. A tal fine basterà dimostrare che la funzione D verifica le condizioni (A), (B), (C) della definizione di determinante. Dato che $D(I_n) = \frac{\det(I_nB)}{\det(B)} = \frac{\det(B)}{\det(B)} = 1$

e quindi (C) è immediata. Se la matrice A ha due righe uguali, ossia $A = (A_1, \dots A_i, \dots A_j, \dots, A_n)$ con $A_i = A_j$ per $i \neq j$, allora, dato che

$$AB = (A_1 B, \dots, A_i B, \dots, \dots A_j B, \dots, A_n B),$$

anche AB ha due righe uguali e quindi $D(A) = 0$. Infine, dato che

$$\begin{aligned} det[(A_1, \dots, (A_i + A'_i), \dots, A_n)B] &= det[(A_1 B, \dots, (A_i + A'_i)B, \dots, A_n B)] \\ &= det[(A_1 B, \dots, A_i B, \dots, A_n B)] + det[(A_1 B, \dots, A'_i B, \dots, A_n B)] \\ &= det[(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)B] + det[(A_1, \dots, A'_i, \dots, A_n)B] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} det[(A_1, \dots, (\lambda A_i), \dots, A_n)B] &= det[(A_1 B, \dots, (\lambda A_i)B, \dots, A_n)B] \\ &= \lambda det[(A_1 B, \dots, A_i B, \dots, A_n B)] \\ &= \lambda det[(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)B], \end{aligned}$$

si ha anche che D è lineare sulla riga i–esima per ogni $i = 1, \dots, n$. □

Un'osservazione fondamentale per le applicazioni è il seguente immediato corollario del Teorema di Binet:

Corollario 2.2: *Sia $A \in M_n$ e $B \in GL_n$ una matrice invertibile. Allora*
(i) $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)}$.
(i) $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$. *In particolare matrici associata allo stesso endomorfismo, relativamente a base diverse, hanno lo stesso determinante.*

Il Teorema di Binet si applica anche alla teoria dei sistemi lineari. Tradizionalmente la teoria dei sistemi lineari veniva basata sui determinanti e lo strumento centrale era costituito dal seguente risultato che si può ricavare come conseguenza del Teorema di Binet:

Teorema 2.3: (di Cramer) *Siano $A = (A^1, \dots, A^n) \in GL_n$ una matrice invertibile, $b \in \mathbb{K}^n$ e $B(i) \in M_n$ le matrici ottenute sostituendo la i-esima colonna di A con b: $B(i) = (A^1, \dots, A^{i-1}, b, A^{i+1}, \dots, A^n)$. Allora l'unica soluzione $x = (x_1, \dots, x_n)$ del sistema $Ax = b$ è data da:*

$$x_i = \frac{\det(B(i))}{\det(A)} \qquad \forall i = 1, \dots, n. \tag{2.1}$$

Dimostrazione: Posto per ogni $i = 1, \dots, n$

$$X(i) = (e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i-1}, \dots, e_n),$$

la colonna $x = (x_1, \dots, x_n)$ la soluzione del sistema $Ax = b$ se e solo se $AX(i) = B(i)$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Dato che $det(X(i)) = x_i$, dal teorema di Binet ricaviamo immediatamente:

$$det(A)x_i = det(A)det(X(i)) = det(B(i))$$

ossia la tesi. □

In generale, per sistemi di ordine molto grande, la regola di Cramer è decisamente meno efficiente del metodo di riduzione a scala.

Il Teorema di Cramer può essere utilizzato per dimostrare una formula per la matrice inversa. Anche in questo caso la formula, molto elegante e utile in molte considerazioni teoriche, nonè molto efficiente dal punto di vista del calcolo pratico. Ricordiamo che se $A \in M_n$, il *minore* (i, j) di A è la matrice $A_{ij} \in M_{n-1}$ ottenuta da A togliendo la i-esima riga e la j-esima colonna. Vale allora la seguente:

Proposizione 2.4: *Sia $A = (a_{ij}) \in GL_n$. Se $A^{-1} = (x_{ij})$ allora vale la seguente formula:*

$$x_{ij} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j} \det(A_{ji}). \tag{2.2}$$

Dimostrazione: Come già osservato la colonna j-esima della matrice A^{-1} è la soluzione X^j del sistema $AX^j = e_j$ dove, come al solito, e_j denota il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{K}^n$. Dunque, se $X^j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$, secondo la formula di Cramer (2.1), si ha:

$$x_{ij} = \frac{\det(B(i))}{\det(A)}$$

dove $B(i) = (A^1, \dots, A^{i-1}, e_j, A^{i+1}, \dots, A^n)$. Sviluppando il determinante, si ha

$$\det(B(i)) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & 0 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j-11} & \dots & a_{j-1i-1} & 0 & a_{j-1i+1} & \dots & a_{j-1n} \\ a_{j1} & \dots & a_{ji-1} & 1 & a_{ji+1} & \dots & a_{jn} \\ a_{j+11} & \dots & a_{j+1i-1} & 0 & a_{j+1i+1} & \dots & a_{j+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{1i-1} & 0 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

e quindi la tesi. □

Al crescere di n, la formula (2.2) diventa rapidamente troppo complicata e quindi per calcolare l'inversa è molto più semplice utilizzare l'eliminazione di Gauss. D'altra parte per matrici di ordine 2 la (2.2) permette di scrivere l'inversa immediatamente. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile, ossia se $\det(A) = ad - bc \neq 0$, allora

$$A^{-1} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

In molti casi risulta utile utilizzare i determinanti per calcolare il rango di una matrice. Prima un po' di nomenclatura. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice con m righe e n colonne. Diremo che $B = (b_{kl})$ è una *sottomatrice* di ordine r di A, se esistono indici $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq m$ e $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$, tali che

$$b_{kl} = a_{i_k j_l} \quad \forall \ \ k, l = 1, \dots, r.$$

Vale il seguente risultato noto in letteratura come il "Teorema degli orlati":

Teorema 2.5: *Il rango di $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ è r se e solo se esiste una sottomatrice quadrata di ordine r di A con determinante diverso da 0 e tutte le sottomatrici di A di ordine maggiore di r hanno determinante uguale a zero.*

Dimostrazione: Supponiamo che il rango di A sia r. Allora A ha r colonne $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ linearmente indipendenti e ogni $(r+1)$-pla di sue colonne sono linearmenti dipendenti. Dunque la matrice $\hat{A} = (A^{j_1}, \dots, A^{j_r}) \in M_{m,r}(\mathbb{K})$ ha rango r e quindi ha r righe $\hat{A}_{i_1}, \dots, \hat{A}_{i_r}$ linearmente indipendenti. Allora $\tilde{A} = (\hat{A}_{i_1}, \dots, \hat{A}_{i_r}) \in M_{r,r}(\mathbb{K})$ è una sottomatrice di A con $det(\tilde{A}) \neq 0$. Ogni sottomatrice $B \in M_{l,l}(\mathbb{K})$ di A di ordine $l > r$ ha determinante nullo, altrimenti B sarebbe sottomatrice di una matrice in $M_{m,l}(\mathbb{K})$ costituita da $l > r = rg(A)$ colonne di A linearmente indipendenti: questo non può essere!

Supponiamo ora che esista una sottomatrice C quadrata di ordine r di A con determinante diverso da 0 e tutte le sottomatrici di A di ordine maggiore di r hanno determinante uguale a zero. La matrice C è sottomatrice di una matrice in $M_{m,l}(\mathbb{K})$ costituita da r colonne di A linearmente indipendenti e quindi $r \leq rg(A)$. D'altra parte se tutte le sottomatrici $D \in M_{l,l}(\mathbb{K})$ di A di ordine $l > r$ hanno determinante nullo, allora per ogni scelta $A^{j_1}, \dots, A^{j_l}$ di $l > r$ colonne di A costituisce un insieme di colonne linearmente dipendenti. Altrimenti la matrice $(A^{j_1}, \dots, A^{j_l})$ conterrebbe l righe $\check{A}_{i_1}, \dots, \check{A}_{i_l}$ linearmente indipendenti e quindi la matrice $\check{A} = (\check{A}_{i_1}, \dots, \check{A}_{i_l})$ sarebbe una sottomatrice quadrata di ordine $l > r$ di rango l e quindi $det(\check{A}) \neq 0$ contro l'ipotesi □

3. La formula di Leibnitz per il determinante.

In queste note, seguendo il testo Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare*, abbiamo introdotto il determinante in modo assiomatico ossia come una funzione che verifica certe proprietà. Questo approccio, dovuto storicamente a Weierstrass, ha il vantaggio di semplificare alcune dimostrazioni ma "nasconde" alcune importanti informazioni combinatoriche. L'impostazione classica è basata proprio su considerazioni combinatoriche. Diamo solo un veloce cenno per introdurre un'osservazione che ci sarà utile in seguito. Per un intero $r > 0$ denotiamo con $F_r = \{1, 2, \dots, r\}$ e con

$$\mathcal{F}(r, n) = \{\rho \colon F_r \to F_n\}$$

l'insieme di tutte le funzioni da $F_r = \{1, 2, \dots, r\}$ a $F_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Una funzione $\sigma \in \mathcal{F}(n, n)$, ossia un'applicazione $\sigma \colon F_n \to F_n$ si dice *permutazione* se è biettiva. Si denota con S_n il gruppo di tutte le permutazioni dell'insieme di n elementi F_n. Si vede facilmente che S_n ha $n!$ elementi. È anche semplice convincersi che $\sigma \in \mathcal{F}(n,n)$ è una permutazione se e solo se è iniettiva. Infatti se $\sigma \in \mathcal{F}(n,n)$ è iniettiva è necessariamente anche suriettiva dato che deve assumere n valori distinti. Le particolari permutazioni che lasciano fissi tutti gli elementi di F_n tranne due che vengono scambiati, si dicono *trasposizioni*. È noto che ogni permutazione σ può essere espressa come composizione di trasposizioni: basta considerare le trasposizioni necessarie per "trasformare" $\{1,2,\ldots,n\}$ in $\{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)\}$. Questa espressione per σ non è unica ma si dimostra che, per ogni permutazione σ, il numero di trasposizioni che servono per ottenere σ mediante composizione è sempre o pari o dispari. Si definisce *segno della permutazione* σ il numero

$$\epsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{se occorre un numero pari di trasposizioni per costruire } \sigma \\ -1 & \text{se occorre un numero dispari di trasposizioni per costruire } \sigma. \end{cases}$$

Dunque se per una permutazione σ si ha $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$ per opportune trasposizioni $\tau_1,\ldots,\tau_k$, allora $\epsilon(\sigma) = (-1)^k$. Dato che $\sigma^{-1} = (\tau_k)^{-1} \circ \ldots \circ (\tau_1)^{-1}$, allora si ha evidentemente anche $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$.

Con queste notazioni possiamo enunciare e dare la dimostrazione per la *formula di Leibniz* per il determinante:

Teorema 3.1: *Se $A = (a_{ij})$ è una matrice di ordine n allora*

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}. \tag{3.1}$$

Dimostrazione: Per ogni $j = 1,\ldots,n$ si denoti $e^j = e_j^T$ il vettore riga ottenuto trasponendo l'i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{K}^n$. Allora, se A=$(A_1,\ldots,A_n)$, per ogni $i = 1,\ldots,n$, si ha

$$A_i = (a_{i1},\ldots,a_{in}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e^j.$$

Dunque:

$$det(A) = det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} e^j \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} det \begin{pmatrix} e^j \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Ripetendo l'argomento per la seconda riga, per ogni $j = 1,\ldots,n$, si ha

$$det \begin{pmatrix} e^j \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} det \begin{pmatrix} e^j \\ e^k \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

e quindi

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{1j} a_{2k} det \begin{pmatrix} e^j \\ e^k \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Nella (3.2) allora j e k devono assumere tutti i possibili valori compresi fra $1,\ldots,n$. Dunque pensando j e k come valori di funzioni definite su F_2 a valori in F_n, possiamo riscrivere la (3.2) nel modo seguente:

$$det(A) = \sum_{\rho \in \mathcal{F}(2,n)} a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} det \begin{pmatrix} e^{\rho(1)} \\ e^{\rho(2)} \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Ripetendo il procedimento per tutte le righe, possiamo concludere:

$$det(A) = \sum_{\rho \in \mathcal{F}(n,n)} a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \ldots a_{n\rho(n)} det \begin{pmatrix} e^{\rho(1)} \\ e^{\rho(2)} \\ \vdots \\ e^{\rho(n)} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

La (3.3) si può ulteriormente semplificare. Infatti se infatti $\rho \in \mathcal{F}(n, n)$ non è iniettiva, la matrice $\begin{pmatrix} e^{\rho(1)} \\ e^{\rho(2)} \\ \vdots \\ e^{\rho(n)} \end{pmatrix}$ ha due righe uguali e quindi il suo determinante è nullo. Dunque nella (3.3) possiamo limitarci a considerare le ρ iniettive che, essendo funzioni da F_n in sé, sono anche suriettive. Pertanto in (3.3) gli unici addendi da considerare sono quelli con $\rho \in S_n$ e quindi abbiamo:

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} det \begin{pmatrix} e^{\sigma(1)} \\ e^{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e^{\sigma(n)} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Rimane solo da calcolare i determinanti che compaiono in (3.4) per ogni $\sigma \in S_n$. Mediante opportuni scambi di riga possiamo concludere che

$$det \begin{pmatrix} e^{\sigma(1)} \\ e^{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e^{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \pm det \begin{pmatrix} e^{1} \\ e^{2} \\ \vdots \\ e^{n} \end{pmatrix} = \pm 1$$

Il risultato sarà $+1$ se occorrono un numero pari di scambi per passare da $\begin{pmatrix} e^{\sigma(1)} \\ e^{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e^{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} e^{1} \\ e^{2} \\ \vdots \\ e^{n} \end{pmatrix}$ (o viceversa!), sarà -1 se ne occorono un numero dispari. Dunque possiamo concludere

$$det \begin{pmatrix} e^{\sigma(1)} \\ e^{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e^{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \epsilon(\sigma)$$

e il risultato è dimostrato. □

Una conseguenza immediata della formula di Leibniz è la seguente osservazione:

Proposizione 3.2: *Il determinante di una matrice A quadrata di ordine n è un polinomio di grado n nelle n^2 entrate della matrice, composto dalla somma di $n!$ addendi ciascuno dei quali ha valore assoluto uguale al valore assoluto del prodotto di n entrate della matrice A scelte una per ogni riga di A in modo che ciascuna sia su una colonna diversa.*

La Proposizione 3.2 è una ovvia conseguenza della formula di Leibniz, ma segue anche facilmente per induzione da una delle espressioni di Laplace per il determinante.

Osservazione In questa presentazione abbiamo seguito la traccia dell'esposizione fatta nel Capitolo 9 del testo di Abate e de Fabritiis e quindi abbiamo fatto seguire l'esistenza della funzione determinante dalle formule di Laplace e provato l'unicità ricorrendo alle riduzioni a scala. Il Teorema 3.1 fornisce un'altra dimostrazione dell'unicità del determinante: se esiste una funzione sullo spazio delle matrici quadrate di ordine n a valori nel campo degli scalari che soddisfa gli assiomi (A),(B) e (C) elencati nel paragrafo 1, allora deve essere data dalla formula (3.1).

In effetti si può dimostrare anche l'esistenza del determinante usando la formula di Leibnitz. Infatti è immediato convincersi che una funzione definita da (3.1) è lineare su ciascuna riga una volta fissate le altre, dato che fissate $n-1$ righe la formula (3.1) ci dice che è un polinomio omogeneo di grado uno nelle entrate della riga rimasta. Inoltre è immediato osservare che (3.1) definisce una funzione che assume il valore 1 sulla matrice identità. La dimostrazione del fatto che la funzione definita da (3.1) si annulla su matrici con due righe uguali ha bisogno di qualche informazione in più sul gruppo delle permutazioni e la evitiamo qui.