NOTE INTEGRATIVE SU SPAZI TOPOLOGICI CONNESSI

Note informali dalle lezioni

Cominciamo con due osservazioni:

LEMMA 1.0.0: *Siano A, B aperti disgiunti di uno spazio topologico X tali che $X = A \cup B$. Se $Y \subset X$ è connesso, allora o $Y \subset A$ e $Y \cap B = \emptyset$ o $Y \subset B$ e $Y \cap A = \emptyset$.*

Dimostrazione: La dimostrazione è immediata: $Y \cap A$ e $Y \cap B$ sono aperti disgiunti di Y la cui unione è Y. Dato che Y è connesso, necessariamente o $Y \cap A = \emptyset$ e quindi $Y = Y \cap B \subset B$ oppure $Y \cap B = \emptyset$ e quindi $Y = Y \cap A \subset A$. □

LEMMA 1.0.1: *Siano C, D aperti disgiunti non vuoti di un sottospazio Z di uno spazio topologico X tali che $Z = C \cup D$. Se $\overline{C}$ e $\overline{D}$ sono le chiusure di C e D in X, allora $\overline{C} \cap D = \emptyset$ e $C \cap \overline{D} = \emptyset$.*

Dimostrazione: Evidentemente Z non è connesso e C, D sono anche chiusi disgiunti di Z. Dato che la chiusura di C in Z è data da $\overline{C} \cap Z$ allora $C = \overline{C} \cap Z$ e quindi $\overline{C} \cap D = \overline{C} \cap Z \cap D = C \cap D = \emptyset$. Analogamente si dimostra $C \cap \overline{D} = \emptyset$.

□

Come conseguenza abbiamo il seguente risultato che in parole povere dice che aggiungendo a un sottoinsieme connesso punti limite si ottiene un connesso:

TEOREMA 1.0.2: *Sia Y un sottoinsieme connesso di uno spazio topologico X. Se $Y \subset Z \subset \overline{Y}$, allora Z è connesso.*

Dimostrazione: Siano C, D aperti disgiunti non vuoti di Z tali che $Z = C \cup D$. Per il Lemma 1.0.0 allora Y deve essere completamente contenuto in C o completamente contenuto in D. Supponiamo che $Y \subset C$. Allora $\overline{Y} \subset \overline{C}$ e, dato che per il Lemma 1.0.1 si ha $\overline{C} \cap D = \emptyset$, seguirebbe che $D = Z \cap D = \emptyset$ contro l'ipotesi. Analogamente si ottiene l'assurdo che $C = \emptyset$ se $Y \subset D$. □

Altri utili (e semplici) considerazioni:

PROPOSIZIONE 1.0.3: (Teorema del valor medio) *Sia X uno spazio topologico connesso e $f: X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni $x, y \in X$ la funzione f assume tutti i valori compresi fra $f(x)$ e $f(y)$.*

Dimostrazione: Dato che $f(X)$ è connesso in $\mathbb{R}$ deve essere un intervallo e la conclusione e pertanto ovvia. □

PROPOSIZIONE 1.0.4: *Sia X uno spazio topologico connesso e Y uno spazio discreto (ad esempio $\mathbb{Z}$ come sottospazio di $\mathbb{R}$). Ogni funzione continua $f: X \to Y$ è costante.*

Dimostrazione: Sia $y \in f(X)$. Dato che $\{y\}$ è sia un aperto sia un chiuso di Y, allora $f^{-1}(y)$ è un sottoinsieme non vuoto aperto e chiuso nello spazio connesso X. Allora $X =^{-1} (y)$ e f è costante. □

Componenti Connesse

Su uno spazio topologico X è definita una relazione d'equivalenza nel modo seguente: due punti x, y si dicono *connessi* se esiste un sottoinsieme D di X tale che $x, y \in D$. È un semplice esercizio verificare che queste è effettivamente una relazione di equivalenza. Per ogni $p \in X$ la classe di equivalenza $C(p)$ relativa a questa relazione.

PROPOSIZIONE 1.0.5: *Per ogni punto p di uno spazio topologico X, la componente connessa $C(p)$ di p è il più grande sottoinsieme connesso che contiene p. Inoltre ogni componente connessa di X è un chiuso.*

Dimostrazione: Per $p \in X$ sia Y un connesso tale che $p \in Y$. Allora per ogni $y \in Y$ si ha che p, y sono connessi. Dunque $y \in C(p)$ e quindi $Y \subset C(p)$. Inoltre si ha che $C(p)$ è connesso. Infatti se $x \in C(p)$ esiste un connesso $Y(x)$ con $p, x \in Y(x)$. Ma allora $Y(x) \subset C(p)$ e $C(p)$ è connesso dato che

$$C(p) = \bigcup_{x \in C(p)} Y(x) \qquad \text{e} \qquad x \in \bigcap_{x \in C(p)} Y(x) \neq \emptyset.$$

Infine una componente connessa $C(p)$ è chiusa dato che il connesso $\overline{C(p)}$ contiene p e quindi $\overline{C(p)} \subset C(p)$ ossia $C(p) = \overline{C(p)}$. $\square$

Non è detto che le componenti connesse siano aperte:

Esempio: $\mathbb{Q}$, con la topologia di sottospazio di $\mathbb{R}$, è *totalmente sconnesso* ossia le sue componenti connesse sono i sottoinsiemi puntiformi. Infatti se $Y \in \mathbb{Q}$ contiene due punti distinti p, q, si supponga $p < q$, allora esiste un numero irrazionale $r \in (p, q) \setminus \mathbb{Q}$. Se $A = (-\infty, r) \cap Y$ e $B = (r, +\infty) \cap Y$, allora A e B sono aperti disgiunti di Y con $p \in A \neq \emptyset$, $p \in B \neq \emptyset$ e $Y = A \cup B$: segue che Y non è connesso. Dunque le componenti connesse di $\mathbb{Q}$ non possono essere aperte.

D'altra parte:

PROPOSIZIONE 1.0.6: *Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme aperto e chiuso di uno spazio topologico X. Allora A è una componente connessa di X.*

Dimostrazione: Basta mostrare che se $A \subset Z$ e Z è connesso, allora $A = Z$. Dato che $A \neq \emptyset$ è aperto e chiuso in X, allora anche $B = X \setminus A$ è aperto. Dunque $A = A \cap Z$ e $B \cap Z$ sono aperti disgiunti del connesso Z la cui unione è Z. Dato che $A \cap Z = A \neq \emptyset$, deve essere $B \cap Z = \emptyset$ e quindi $A = Z$. $\square$

Una piccola applicazione:

PROPOSIZIONE 1.0.7: *Siano X, Y spazi topologici con un numero finito, $p_0(X)$ e $p_0(Y)$ rispettivamente, di componenti connesse. Se X e Y sono omeomeorfi, allora $p_0(X) = p_0(Y)$.*

Dimostrazione: Se $f \colon X \to Y$ è un omeomorfismo con inverso $g = f^{-1} \colon Y \to X$, allora f e g sono applicazioni aperte e chiuse. Se le componenti connesse di uno spazio sono finite allora ciascuna di esse è simultaneamente aperta e chiusa. Sia C una componente connessa di X, allora $f(C)$ è aperto e chiuso in Y e quindi è una componente connessa do Y. Segue che $p_0(X) \leq p_0(Y)$. Dato che allo stesso modo si osserva che, per ogni componente connessa D di Y, $g(D)$ è una componente connessa di X, sia ha $p_0(Y) \leq p_0(X)$ e quindi la tesi. $\square$

Locale connessione, connessione e connessione per archi

Definizione: Uno spazio topologico X si dice *localmente connesso (per archi)* in $p \in X$ se per ogni intorno U di p esiste un intorno V di p connesso (per archi) tale che $p \in V \subset U$. Lo spazio X si dice *localmente connesso (per archi)* se lo è in ogni suo punto.

Ossevazione. Se X è localmente connesso, le sue componenti connesse sono aperte. Sia C una componente connessa di X. se $p \in C$ allora $C(p) = C$ è la componente connessa di p. Dato p ha un intorno connesso U allora $p \in U \subset C(p) = C$ e C è aperto. Si può dimostrare con idee analoghe che in effetti che uno spazio topologico è localmente connesso se e solo se le componenti connesse di ogni suo aperto sono aperte in X.

È facile dimostrare che uno spazio connesso per archi è connesso. Il viceversa non vale in generale ma di ha il seguente:

Teorema 1.0.8: *Uno spazio topologico connesso localmente connesso per archi è connesso per archi. In particolare un aperto di $\mathbb{R}^n$ è connesso se e solo è connesso per archi.*

Dimostrazione: La seconda parte del teorema è immediata dalla prima dato che ogni aperto A di $\mathbb{R}^n$ è localmente connesso per archi dato che per ogni $p \in A$ esiste $r > 0$ tale che $\mathbb{B}(p, r) \subset A$.

Sia X uno spazio topologico connesso localmente connesso per archi. È sufficiente dimostrare che esiste un punto $p \in X$ tale che per ogni altro punto $q \in X$ esiste un arco $\alpha_q \colon [0, 1] \to X$ con $\alpha_q(0) = p$, e $\alpha_q(1) = q$. Se questo è vero, infatti, dati $x, y \in X$ esistono archi $\alpha_x \colon [0, 1] \to X$ con $\alpha_x(0) = p$ e $\alpha_x(1) = x$ e $\alpha_y \colon [0, 1] \to X$ con $\alpha_y(0) = p$, e $\alpha_y(1) = y$. Allora

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_x(1 - 2t) \text{ se } t \in [0, 1/2] \\ \\ \alpha_y(2t - 1) \text{ se } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

definisce un arco $\alpha \colon [0, 1] \to X$ con $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$.

Sia $p \in X$ e si definisca

$$A = \{q \in X \mid \exists \alpha \colon [0, 1] \to X \text{ continua con } \alpha(0) = p,\ \alpha(1) = q\}.$$

Evidentemente $p \in A \neq \emptyset$. Dimostriamo che A è aperto. Infatti se $q \in A$ esiste un arco continuo $\alpha_q \colon [0, 1] \to X$ con $\alpha_q(0) = p$ e $\alpha_q(1) = q$. Inoltre, dato che X \`e localmente connesso per archi, esiste un intorno V di q connesso per archi e quindi tale che per ogni $x \in V$ esiste un arco continuo $\beta \colon [0, 1] \to V \subset X$ con $\beta = q$ e $\beta(1) = x$. Allora

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_q(2t) \qquad \text{se } t \in [0, 1/2] \\ \\ \beta(2t - 1) \text{ se } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

definisce un arco continuo con estremi p e x e quindi $x \in A$ e, per l'arbitrarietà di x, allora l'intorno U di q è contenuto in A e quindi A è aperto.

D'altra parte è anche chiuso. Sia infatti $q \in \overline{A}$. Allora esiste un intorno connesso per archi V di q. Allora deve esistere $x \in V \cap A \neq \emptyset$. Esistono dunque archi continui: $\beta\colon [0,1] \to X$ con $\beta = p$ e $\beta(1) = x$ e $\gamma\colon [0,1] \to V \subset X$ con $\gamma = x$ e $\gamma(1) = q$. Allora

$$\alpha(t) \begin{cases} \beta(2t) & \text{se } t \in [0,1/2] \\ \\ \gamma(2t-1) & \text{se } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

definisce un arco continuo con estremi p e q e quindi $q \in A$. Dunque deve essere $A = \overline{A}$ e A è chiuso. Dato che A è aperto, chiuso e non vuoto nel connesso X deve essere $A = X$ e la tesi segue. $\square$