**Esercizi di Topologia**

**1.** Sia $(X,d)$ uno spazio metrico. Dimostrare che la funzione $d'\colon X\times X\to\mathbb{R}_+$ da $d'(x,y)=\max\{d(x,y),1\}$ è una distanza topologicamente equivalente a $d$.

**2.** Dimostrare che la funzione definita da $\delta(x,y)=\min\{|x_i-y_i|\mid i=1,\dots,n\}$ non è una distanza su $\mathbb{R}^n$.

**3.** Dire per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea se sono aperti, chiusi o se né l'uno nè l'altro:
*i)* $A=\{x\in\mathbb{R}^2\mid x_1=x_2\}$, *ii)* $B=\{x\in\mathbb{R}^2\mid x_1x_2\neq 0\}$, *iii)* $C=\{x\in\mathbb{R}^2\mid x_1>0\}$,
*iv)* $D=\{x\in\mathbb{R}^2\mid x_2\geq 0\}$, *v)* $E=\{x\in\mathbb{R}^2\mid \|x\|>0\}$, *vi)* $F=\{x\in\mathbb{R}^2\mid x_1>0, x_2=0\}$,
*vii)* $G=\{x\in\mathbb{R}^2\mid x_2\in\mathbb{Q}\}$, *viii)* $H=\{x\in\mathbb{R}^2\mid x_2\notin\mathbb{Z}\}$, *ix)* $\mathbb{Q}^2$.

**4.** Sia $X$ arbitrario e siano $\mathcal{T}_j$ topologie su $X$. Dimostrare che $\cap_j\mathcal{T}_j$ è una topologia su $X$. Dare un esempio di topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ su un insieme $X$ tale che $\mathcal{T}_1\cup\mathcal{T}_2$ non è una topologia su $X$.

**5.** Siano $A$ e $B$ sottoinsiemi di uno spazio topologico $X$. Dimostrare che si hanno le seguenti relazioni:
i) $\partial(A\cup B)\subset\partial(A)\cup\partial(B)$ (qui con $\partial(E)$ denota la frontiera di $E$, l'insieme dei punti tali che ogni loro intorno interseca sia $E$, sia $X\setminus E$). In generale l'inclusione è stretta: si consideri $X=\mathbb{R}$, $A=(-\infty,0]$, $B=[0,+\infty)$.
ii) $Int(A\cap B)=Int(A)\cap Int(B)$.
iii) $Int(A\cup B)\supset Int(A)\cup Int(B)$. L'inclusione in generale è stretta: si consideri $X=\mathbb{R}$, $A=\mathbb{Q}$, $B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
iv) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.
v) $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$. L'inclusione in generale è stretta: si consideri $X=\mathbb{R}$, $A=\mathbb{Q}$, $B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

**6.** Sia $E=\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{Z}, n>0\}\subset\mathbb{R}$. Determinare $\overline{E}$ rispetto alla topologia euclidea di $\mathbb{R}$ e rispetto alla topologia cofinita.

**7.** Se $S=\{(t,\sin\frac{1}{t}\in\mathbb{R}^2\mid 0\neq t\in\mathbb{R}\}$, determinare $\overline{S}$.

**8.** Siano $X$ uno spazio topologico, $a\in\mathbb{R}$ e $f,g\colon X\to\mathbb{R}$ funzioni continue dove su $\mathbb{R}$ si considera la topologia euclidea. Dimostrare che $a\cdot f, |f|, f+g, f\cdot g\colon X\to\mathbb{R}$ e, se $f(x)\neq 0$ per ogni $x$, $\frac{1}{f}\colon X\to\mathbb{R}$ sono continue. *Consiglio: usare il fatto che la composizione di funzioni continue è continua. Ad esempio $f\cdot g\colon X\to\mathbb{R}$ è la composizione di $L\colon X\to\mathbb{R}^2$ definita da $L=(f,g)$ con $M\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da $M(x,y)=x\cdot y$....)*

**9.** Sia $\mathcal{C}$ la topologia cofinita di $\mathbb{R}$ (ossia quella che ha per aperti l'insieme vuoto e i complementi dei sottoinsiemi finiti) e sia $\mathcal{E}$ la topologia euclidea di $\mathbb{R}$ determinata dalla usuale struttura metrica. Dimostrare che $f\colon(\mathbb{R},\mathcal{C})\to(\mathbb{R},\mathcal{E})$ è continua se e solo se è costante.

*Soluzione:* Se $f$ è costante è ovviamente continua. Sia $f$ continua e non costante. Allora esistono $y_0,y_1\in f(\mathbb{R})$ con $y_0\neq y_1$. Sia $\epsilon=\frac{1}{4}|y_0-y_1|$. Siano: $I=(y_0-\epsilon,y_0+\epsilon)$ e $A=\mathbb{R}\setminus\overline{I}=(-\infty,y_0-\epsilon)\cup(y_0+\epsilon,+\infty)$. Si osservi che, dato che $y_1\in A$ allora $f^{-1}(y_1)\in f^{-1}(A)\neq\emptyset$ e quindi $f^{-1}(A)$ è un aperto non vuoto della topologia cofinita di $\mathbb{R}$ ed è pertanto un insieme infinito. D'altra parte $\overline{A}$ è un chiuso della topologia euclidea di $\mathbb{R}$ con $y_0\in\mathbb{R}\setminus\overline{A}=I$. Dunque $f^{-1}(\overline{A})$ è un chiuso non vuoto della topologia cofinita di $\mathbb{R}$ ossia è un insieme finito. Ma allora da $A\subset\overline{A}$ seguirebbe che l'insieme infinito $f^{-1}(A)$ è sottoinsieme dell'insieme finito $f^{-1}(\overline{A})$: ASSURDO!

**10.** Generalizzare l'Esercizio 9: Sia $(X,d)$ uno spazio metrico infinito e sia $\mathcal{M}$ la topologia metrica indotta dalla distanza $d$. Sia $\mathcal{C}$ la topologia cofinita di $X$. Dimostrare che $f\colon(X,\mathcal{C})\to(X,\mathcal{M})$ è continua se e solo se è costante.

**11.** Sia $X$ uno spazio topologico. Un suo sottoinsieme $D\subset X$ si dice *discreto* se la topologia relativa su $D$ è quella discreta. Dimostrare che $D\subset X$ è discreto se e solo se per ogni $x\in D$ esiste un suo intorno $U_x$ in $X$ tale che $U_x\cap D=\{x\}$.

**12.** Dire quali fra $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $E=\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{Z}, n>0\}$, $E\cup\{0\}$ sono sottoinsiemi discreti, di $\mathbb{R}$, con la topologia euclidea, quali non lo sono e perché.