SPAZI TOPOLOGICI COMPATTI

Note informali dalle lezioni

Sia X un insieme. Un *ricoprimento* di X è una famiglia $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ di sottoinsiemi di X tali che $X = \cup_{j\in J} U_j$. Un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ si dice finito se J è finito. Un *sottoricoprimento* $\mathcal{U}' = \{U_h\}_{j\in H}$ di $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ è un risoprimento di X con $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ (con $H \subset J$).

Se X è uno spazio topologico diremo che un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ è *aperto* (*chiuso*), se U_j è aperto (chiuso) per ogni $j \in J$.

Definizione. Uno spazio topologico X si dice *compatto* se per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ di X esiste un sottoricoprimento finito.

PROPOSIZIONE 1.0.0: *Per uno spazio topologico X sono equivalenti le seguenti proprietà:*
(i) X è compatto
(ii) Ogni famiglia di chiusi di X con intersezione vuota ha una sottofamiglia finita con intersezione chiusa.

Dimostrazione: (i) $\Rightarrow$ (ii). Sia $\{F_j\}_{j\in J}$ una famiglia di chiusi tale che $\emptyset = \cap_{j\in J} C_j$. Allora $\{U_j = X \setminus F_j\}_{j\in J}$ è un ricoprimento aperto di X e quindi ammette un sottoricoprimento finito $\{U_{j_1} = X \setminus F_{j_1}, \ldots, U_{j_n} = X \setminus F_{j_n}\}$. Allora $\{F_{j_1}, \ldots, F_{j_n}\}$ è una sottofamiglia finita di $\{F_j\}_{j\in J}$ con intersezione finita.
(ii) $\Rightarrow$ (i). Sia $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ un ricoprimento aperto di X. Allora $\{F_j = X \setminus U_j\}_{j\in J}$ è una famiglia di chiusi con intersezione vuota. Allora esiste una sottofamiglia finita $\{F_{j_1}, \ldots, F_{j_n}\}$ di $\{F_j\}_{j\in J}$ con con intersezione finita e $\{U_{j_1} = X \setminus F_{j_1}, \ldots, U_{j_n} = X \setminus F_{j_n}\}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$. $\square$

Esempi.

(1) Ogni spazio topologico con la topologia banale è compatto.

(2) Ogni spazio topologico finito è compatto

(3) Se X è uno spazio topologico discreto, X è compatto se e solo se è finito.

(4) Se X ha la topologia cofinita, X è compatto.

(5) $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea non è compatto: ad esempio $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$ è un ricoprimento aperto $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$ non ammette sottroricoprimento finito.

(6) $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea non è compatto.

(piccolo) Esercizio. Siano $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ topologie su un insieme X tali che $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Se $(X, \mathcal{T})$ è compatto, allora $(X, \mathcal{T}')$ è compatto.

TEOREMA 1.0.1: (di Bolzano-Weierstrass) *Ogni sottoinsieme infinito di uno spazio compatto ha un punto d'accumulazione.*

Dimostrazione: Sia X uno spazio compatto e $E \subset X$ un insieme infinito. Procediamo per assurdo. Se E non ha punti d'accumulazione, allora per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U_x di x tale che $U_x \cap E \subset \{x\}$. Ma allora $\{U_x\}_{x\in X}$ è un ricoprimento aperto di X e quindi, per la compattezza di X, esistono punti $x_1, \ldots, x_n$ di X tali che $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$. Dunque $E = E \cap X = E \cap (U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}) \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$ contro l'ipotesi che E è infinito! $\square$

Definizione. Uno spazio topologico X si dice *compatto per successioni* se per sua successione ammette una sottosuccessione convergente.

Teorema 1.0.2: *Uno spazio compatto che soddisfa il primo assioma di numerabilità (ossia ogni suo punto ha una base di intorni numerabile) è compatto per successioni.*

Dimostrazione: Sia $\{x_n\}$ una successione di X e sia $E = \{x \in X \mid x = x_n \,\text{per qualche}\, n\}$. Se E è finito allora $\{x_n\}$ ha una sottosuccessione costante che quindi ammette limite. Sia E infinito. Per il Teorema 1.0.1 allora esiste un punto d'accumulazione x_0 per E. Se $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una base d'intorni numerabile di x_0, allora l'insieme $V_k = I_1 \cap \ldots \cap I_k$ è un intorno del punto d'accumulazione x_0 di E, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora esisterà $x_{n_k} \in E \cap V_k$. La sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ ha limite x_0. Infatti se U è un intorno di x_0, allora esiste k_0 tale che $I_{k_0} \subset U$. Per ogni $k \geq k_0$ allora $x_{n_k} \in V_k \subset V_{k_0} \subset I_{k_0} \subset U$ e quindi, per l'arbitrarietà di U, si ha $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. □

Osservazione. Esistono spazi compatti non compatti per successione e viceversa spazi compatti per successione che non sono compatti. Gli esempi esulano dallo scopo di queste note. D'altra parte si dimostra che le due nozioni sono equivalenti per spazi metrici.

Passiamo ora a studiare come si "propaga" la nozione di compattezza a sottospazi, immagini di applicazioni continue e prodotti. Cominciamo con il seguente

Proposizione 1.0.3: *Sia X uno spazio topologico compatto e sia C un chiuso di X. Allora il sottospazio C è compatto.*

Dimostrazione: Sia C un chiuso di X. Se $\{U_j\}_{j\in J}$ è un ricoprimento aperto di C, dobbiamo provare che ha un sottoricoprimento finito. Allora per ogni $j \in J$ si ha $U_j = A_j \cap C$ con A_j aperti di X. Se $A = X \setminus C$, allora $\{A\} \cup \{A_j\}_{j\in J}$ è un ricoprimento aperto del compatto X. Esistono dunque indici $j_1, \ldots, j_n \in J$ tali che $X = A \cup A_{j_1} \cup \ldots \cup A_{j_n}$. Ma allora

$$C = C \cap X = C \cap (A \cup A_{j_1} \cup \ldots \cup A_{j_n}) = U_{j_1} \cup \ldots \cup U_{j_n}$$

e quindi $\{U_{j_1}, \ldots, U_{j_n}\}$ è un sottoricoprimento finito di $\{U_j\}_{j\in J}$. □

Osservazione. È facile constatare che spazi compatti non di Hausdorff hanno sottospazi compatti non chiusi. Un esempio banale è dato dallo spazio $X = \{0, 1\}$ con la topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$. Dato che è finito X è compatto, il sottoinsieme $\{0\}$ non è chiuso ma è un sottospazio compatto.

Per poter sperare di ottenere il viceversa della Proposizione 1.0.3 e dunque necessario almeno aggiungere l'ipotesi che X sia di Hausdorff. Per ottenere questo risultato è necessario la seguente osservazione:

Lemma 1.0.4: *Sia K è un sottospazio compatto di uno spazio di Hausdorff X. Per ogni $x \notin K$ esistono aperti disgiunti U_x, U_K di X con $x \in U_x$, e $K \subset U_K$.*

Dimostrazione: Dato che X è di Hausdorff, per ogni $y \in K$ esistono aperti disgiunti $V_x(y), V_y$ di X con $x \in V_x(y)$, e $y \in V_y$. Allora $\{V_y \cap K\}_{y\in K}$ è un ricoprimento aperto del compatto K. Esistono dunque $y_1, \ldots, y_n \in K$ tali che $K = (V_{y_1} \cap K) \cup \ldots \cup (V_{y_n} \cap K)$. Allora $U_K = V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$ è un aperto che contiene K e $U_x = V_x(y_1) \cap \ldots \cap V_x(y_n)$ è un aperto che contiene x. Ci basta provare che $U_x \cap U_K = \emptyset$. Questo segue dal fatto che se $z \in U_K$, allora $z \in V_{y_j}$ per qualche j e quindi $z \notin V_x(y_j)$ e, di conseguenza, $z \notin U_x$. □

Proposizione 1.0.5: *Se K è un sottospazio compatto di uno spazio di Hausdorff X, allora K è un chiuso di X.*

Dimostrazione: Sia $x \in X \setminus K$. Per il Lemma 1.0.4 esistono aperti disgiunti U_x, U_K di X con $x \in U_x$, e $K \subset U_K$. Ma allora $x \in U_x \subset X \setminus K$ e quindi $X \setminus K$ è intorno di ogni suo punto e pertanto è aperto. □

Corollario 1.0.6: *Sia K un sottospazio di uno spazio compatto di Hausdorff X. Allora K è un sottospazio compatto se e solo se K è un chiuso di X.*

Il Lemma 1.0.4 suggerisce che in uno spazio di Haudorff i sottoinsiemi compatti godano di proprietà di separazione. Infatti abbiamo:

Proposizione 1.0.7: *Siano L, K sottospazi compatti di uno spazio di Hausdorff X. Esistono aperti disgiunti U_L, U_K di X con $L \subset U_L$, e $K \subset U_K$.*

Dimostrazione: Per il Lemma 1.0.4, per ogni $y \in L$ esistono aperti disgiunti $U_y, U_K(y)$ di X con $x \in U_x$, e $K \subset U_K(y)$. Dato $\{U_y\}_{y \in L}$ è un ricoprimento aperto del compatto L, lo stesso argomento usato nella dimostrazione del Lemma 1.0.4 dimostra che esistono $y_1, \ldots, y_m$ tali che $L \subset U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_m} =_{\text{def}} U_L$. Allora l'aperto $U_K = U_K(y_1) \cap \ldots \cap U_K(y_m)$ contiene K e ripetendo l'argomento usato nella dimostrazione si dimostra che $U_L \cap U_K = \emptyset$. □

Teorema 1.0.8: *Uno spazio compatto di Hausdorff X è normale.*

Dimostrazione: Siano C, F chiusi disgiunti in X. Per la Proposizione 1.0.3 C, F sono sottospazi compatti di X. Per la Proposizione 1.0.7 esistono aperti disgiunti U_C, U_F di X con $C \subset U_C$, e $F \subset U_F$ e la conclusione segue. □

Veniamo ora all'immagine mediante applicazioni continue di compatti:

Proposizione 1.0.9: *Sia X uno spazio topologico compatto e $f\colon X \to Y$ continua. Allora $f(X)$ è un sottospazio compatto di Y.*

Dimostrazione: Sia Se $\{B_j\}_{j \in J}$ è un ricoprimento aperto di $f(X)$. Allora per ogni $j \in J$ si ha $B_j = A_j \cap f(X)$ con A_j aperti di Y e, per la continuità di f, gli insiemi $U_j = f^{-1}(A_j)$ $= f^{-1}(B_j)$ sono aperti di X. Per ogni $x \in X$ esiste B_j tale che $f(x) \in B_j$ e quindi $x \in U_j = f^{-1}(A_j) = f^{-1}(B_j)$. Dunque $\{U_j\}_{j \in J}$ è un ricoprimento aperto di del compatto X. Per indici $j_1, \ldots j_n \in J$ si deve avere allora $X = U_{j_1} \cup \ldots \cup U_{j_n} = f^{-1}(B_{j_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(B_{j_n})$ e pertanto, applicando f segue che $f(x) = B_{j_1} \cup \ldots \cup B_{j_n}$ e abbiamo provato che $\{B_j\}_{j \in J}$ ha un sottoricoprimento finito. □

Una prima immediata conseguenza:

Corollario 1.0.10: *Uno spazio quoziente di uno spazio compatto è compatto.*

È utilissimo il seguente:

COROLLARIO 1.0.11: *Siano X uno spazio topologico compatto, Y uno spazio di Hausdorff. Ogni applicazione continua $f\colon X \to Y$ è chiusa e quindi, se inoltre è biettiva, f è un omeomeomorfismo.*

Dimostrazione: Sia $C \subset X$ un chiuso. Dunque C è un sottospazio compatto e quindi $f(C)$ è un sottospazio compatto dello spazio di Hausdorff Y: segue che $f(C)$ è chiuso in Y. Abbiamo già osservato che un'applicazione continua biettiva chiusa è un omeomeorfismo. $\square$

Il seguente risultato è cruciale per caratterizzare i compatti in $\mathbb{R}^n$:

TEOREMA 1.0.12: (di Heine-Borel) *Ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset \mathbb{R}$ è compatto.*

Dimostrazione: Sia $\{B_j\}_{j\in J}$ un ricoprimento aperto di $[a,b]$. Allora per ogni $j \in J$ si ha $B_j = A_j \cap \mathbb{R}$ con A_j aperti di $\mathbb{R}$. Dunque $[a,b] \subset \bigcup_{j\in J} A_j$. L'insieme

$$E = \{x \in [a,b] \ \mid [a,x] \subset \text{ unione finita di } A_j\}$$

è non vuoto dato che $a \in E$. Sia $z = \sup E$. Vogliamo provare che $z = b$. Ovviamente $z \leq b$. Per un opportuno j_0 si ha $z \in A_{j_0}$ e esiste $\epsilon > 0$ tale che $(z-2\epsilon, z+2\epsilon) \subset A_{j_0}$. Dato che $z = \sup E$, allora esiste $c \in E$ con $z - \epsilon < c$ e quindi $z - \epsilon \in E$ e esistono $j_1, \ldots, j_n \in J$ tali che

$$[a, z-\epsilon] \subset [a,c] \subset A_{j_1} \cup \ldots \cup A_{j_n}.$$

Dunque , dato che $[z-\epsilon, z+\epsilon] \subset (z-2\epsilon, z+2\epsilon) \subset A_{j_0}$, si ha

$$[a, z+\epsilon] \subset A_{j_1} \cup \ldots \cup A_{j_n} \cup A_{j_0}. \tag{1.0.0}$$

Se fosse $z < b$, esisterebbe $\delta > 0$ tale che $z + \delta \leq b$. Naturalmente si può supporre $\delta \leq \epsilon$. Si avrebbe allora

$$[a, z+\delta] \subset [a, z+\epsilon] \subset A_{j_1} \cup \ldots \cup A_{j_n} \cup A_{j_0}$$

e quindi che $z + \delta \in E$ e contemporaneamente $z + \delta > z = \sup E$: impossibile! Dunque deve essere $z = b$ e da (1.0.0) segue allora che

$$[a,b] \subset [a, z+\epsilon] \subset A_{j_1} \cup \ldots \cup A_{j_n} \cup A_{j_0}$$

e quindi $\{B_{j_1}, \ldots, B_{j_n} \cup B_{j_0}\}$ è un sottoricoprimento finito di $\{B_j\}_{j\in J}$ e il risultato segue. $\square$

Il Teorema 1.0.12 permette di caratterizzare i sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}$:

TEOREMA 1.0.13: *Un sottospazio K di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione: Sia $K \subset \mathbb{R}$ compatto. Dato che $\mathbb{R}$ è di Hausdorff, K è chiuso. Inoltre $\{(-r,r) \cap K\}_{r>0}$ è un ricoprimento aperto di K. Esistono dunque $r_1, \ldots, r_n > 0$ tali che

$$K = ((-r_1, r_1) \cap K) \cup \ldots \cup ((-r_1, r_1) \cap K) \subset (-R, R)$$

dove $R = \max\{r_1, \ldots, r_n\}$ e quindi K è un insieme limitato. Viceversa sia K un sottospazio chiuso e limitato di $\mathbb{R}$, esiste $R > 0$ tale che $K \subset [-R, R]$. Ma allora K è un chiuso nel compatto $[-R, R]$ e quindi K è compatto. $\square$

Come conseguenza si ottiene

TEOREMA 1.0.14: (di Weierstrass) *Siano X uno spazio topologico compatto e $f\colon X \to Y$ un' applicazione continua. Allora f ha massimo e minimo.*

Dimostrazione: L'insieme $f(X)$ è un compatto in $\mathbb{R}$, dunque è un insieme chiuso e limitato. Allora $M = \sup_X f < +\infty$ e $m = \inf_X f > -\infty$ dato che $f(X)$ è limitato e $m, M \in f(X)$ dato che $f(X)$ è chiuso. □

Per quanto riguarda i prodotti di spazi compatti, abbiamo il seguente:

TEOREMA 1.0.15: (di Tychonoff) *Il prodotto di una famiglia $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ spazi topologici è compatto se e solo se ogni X_λ è compatto.*

Dimostrazione: Se il prodotto di una famiglia di spazi è compatto, allora lo è ogni fattore dato che le proiezioni sono funzioni continue. Dimostriamo il viceversa solo nel caso del prodotto di due compatti. Per prodotti finiti il risultato segue per induzione, nel caso generale una dimostrazione si trova ad esempio nel libro di Sernesi. Siano dunque X, Y spazi compatti e sia $\mathcal{W} = \{W_j\}_{j\in J}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$. Cominciamo osservando che:

– per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U_x di x in X tale che $U_x \times Y$ è ricoperto da un numero finito di aperti del ricoprimento $\mathcal{W}$.

Infatti, fissato $x \in X$, per ogni $y \in Y$ esiste $j(y) \in J$ tale che $(x, y) \in W_{j(y)}$. Poiché i prodotti di intorni aperti sono una base per gli intorni di un punto del prodotto, esistono intorno aperti $U_x(y)$ di x in X e V_y di y in Y tali che $(x, y) \in U_x(y) \times V_y \subset W_{j(y)}$. Evidentemente $\{V_y\}_{y\in Y}$ è un ricoprimento aperto del compatto Y. Allora $Y = V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$ per opportuni $y_1, \ldots, y_n \in Y$. Ma allora, se $U_x = U_x(y_1) \cap \ldots \cap U_x(y_n)$ si ha

$$\begin{aligned} U_x \times Y &\subset (U_x \times V_{y_1}) \cup \ldots \cup (U_x \times V_{y_n}) \\ &\subset (U_x(y_1) \times V_{y_1}) \cup \ldots \cup (U_x(y_n) \times V_{y_n}) \subset W_{y_1} \cup \ldots \cup W_{y_n}) \end{aligned}$$

e l'osservazione è provata.

D'altra parte la famiglia di aperti $\{U_x\}_{x\in X}$ è un ricoprimento aperto del compatto X. Allora $Y = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_m}$ per opportuni $x_1, \ldots, x_m \in X$. Ma da questo possiamo concludere che

$$X \times Y = (U_{x_1} \times Y) \cup \ldots \cup (U_{x_m} \times Y)$$

si può ricoprire con un numero finito di finito di aperti del ricoprimento $\mathcal{W}$ dato che ciascun $U_{x_i} \times Y$ lo è. □

Possiamo ora caratterizzare i sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$:

TEOREMA 1.0.16: *Un sottospazio K di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione: Sia K un sottospazio compatto di $\mathbb{R}^n$. Allora K è chiuso perchè $\mathbb{R}^n$ è di Hausdorff. Inoltre la norma $N(x) = \|x\|$ è continua su $\mathbb{R}^n$ e quindi su K. Per il Teorema di Weierstrass 1.0.14, la funzione N ha massimo M su K. Dunque $K \subset \mathbb{B}(0, M)$ e quindi K è limitato.

Viceversa sia K un sottospazio chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$. Dato che K è limitato esiste $R > 0$ tale che $K \subset [-R, R]^n$. Ma allora K è un chiuso nel compatto $[-R, R]^n$ e quindi K è compatto. □