Sottovarietà di $\mathbb{R}^N$.

1. Il teorema dell'applicazione inversa e il teorema delle funzioni implicite

In questo paragrafo dimostreremo due risultati d'analisi fondamentali per lo studio della geometria differenziale. Cominciamo descrivendo i problemi che intendiamo esaminare nel contesto elementare dell'algebra lineare e della geometria analitica.

Una prima questione è quella dell'invertibilità di applicazioni lineari. Ad esempio se un'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è definita da $L(x) = Ax =$ dove A è una matrice quadrata di ordine n, allora L è invertibile (e la sua inversa è lineare) se e solo se $\det(A) \neq 0$. Se $A = (a_{ij})$ e $L = (L^1, \ldots, L^n)$ è la decomposizione in componenti di L, allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha evidentemente

$$L^i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^j \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{\partial L^i}{\partial x^j}(x) = a_{ij}.$$

Dunque, in modo un po' artificioso, possiamo riformulare il criterio di invertibilità dicendo che L è invertibile se e solo se per qualche $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\det\left(\frac{\partial L^i}{\partial x^j}(x)\right) \neq 0. \tag{1.1}$$

Si osservi che la (1.1) è equivalente anche al fatto che il sistema

$$\begin{cases} L^1(x) = L^1(x^1, \ldots, x^n) = y^1 \\ \vdots \\ L^n(x) = L^n(x^1, \ldots, x^n) = y^n \end{cases}$$

ammette soluzione unica per ogni $y = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n$.

È utile cercare di generalizzare questo risultato a applicazioni non lineari. In questo caso si tratta di trovare condizioni che assicurino l'invertibilità di una applicazione differenziabile $F = (F^1, \ldots, F^n)\colon A \to \mathbb{R}^n$ definita su un aperto A di $\mathbb{R}^n$ almeno localmente o equivalentemente, la possibilità che ci sia soluzione unica al variare di $y = (y^1, \ldots, y^n)$ per un sistema di equazioni (non necessariamente lineari)

$$\begin{cases} F^1(x) = F^1(x^1, \ldots, x^n) = y^1 \\ \vdots \\ F^n(x) = F^n(x^1, \ldots, x^n) = y^n. \end{cases} \tag{1.2}$$

Il teorema dell'applicazione inversa assicura che F è invertibile (e che l'inversa è regolare tanto quanto F) in un intorno aperto di un punto x_0 dove

$$\det\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x_0)\right) \neq 0. \tag{1.3}$$

In termini di sistemi di equazioni, la (1.3) implica dunque l'esistenza di soluzione unica per il sistema (1.2) con soluzione che dipende con regolarità da y in un intorno di $y_0 = F(x_0)$.

La seconda questione, che si affronta con metodi simili alla prima, è quella della descrizione di una sottovarietà affine per mezzo di equazioni cartesiane o di equazioni parametriche e di come si possa passare dalle prime alle seconde. Per semplicità consideriamo un caso particolarmente semplice al quale comunque ci si può ricondurre sempre mediante un opportuno cambio di coordinate. Sia $X \subset \mathbb{R}^{m+n}$ la sottovarietà affine definita da equazioni cartesiane

$$\begin{cases} L^1(x,y) = L^1(x^1,\dots,x^m,y^1,\dots,y^n) = b^1 \\ \vdots \\ L^n(x,y) = L^n(x^1,\dots,x^m,y^1,\dots,y^n) = b^n \end{cases} \tag{1.4}$$

dove L^j sono opportuni funzionali lineri. In altre parole se $L\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ è l'applicazione lineare definita da $L = (L^1,\dots,L^n)$ e $b = (b^1,\dots,b^n)$ allora

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n} | L(x,y) = b\}.$$

Sia $B = (b_{i,j})$ la matrice di ordine $(m+n) \times n$ tale che

$$L(x,y) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} & b_{1m+1} & \dots & b_{1m+n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} & b_{nm+1} & \dots & b_{nm+n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \\ y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix},$$

e siano

$$A = \begin{pmatrix} b_{1m+1} & \dots & b_{1m+n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{nm+1} & \dots & b_{nm+n} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}.$$

Se $\det(A) \neq 0$, allora (1.4) equivale a $L(x,y) = b$ e

$$L(x,y) = b \Longleftrightarrow Cx + Ay = b \Longleftrightarrow y = A^{-1}(b - Cx)$$

e quindi esiste una (unica) applicazione affine $T\colon \mathbb{R}^m \to R^n$, definita da $T(x) = A^{-1}(b - Cx)$ tale che

$$L(x,y) = b \Longleftrightarrow y = T(x).$$

In altre parole se $\det(A) \neq 0$, si può esplicitare l'equazione $L(x,y) = b$ e ottenere equazioni parametriche per X:

$$\begin{cases} x^1 = t^1 \\ \vdots \\ x^m = t^m \\ y^1 = T^1(t^1,\dots,t^m) \\ \vdots \\ y^n = T^n(t^1,\dots,t^m) \end{cases} \tag{1.5}$$

al variare di $t = (t^1,\dots,t^m) \in \mathbb{R}^m$. Si osservi che X non è altro che il grafico dell'applicazione T. Anche in questo caso la condizione che permette di passare dalla (1.4) alla (1.5) si può esprimere nel modo seguente:

$$\det\left(\frac{\partial L^i}{\partial y^j}(x,y)\right) = \det(A) \neq 0 \tag{1.6}$$

in qualche punto (x,y).

In generale ci interessa studiare lo stesso problema nel caso in cui l'applicazione L non è lineare e trovare una condizione che almeno localmente permetta di "esplicitare" l'equazione $L(x,y) = b$ in modo che, in un intorno di un punto che la soddisfa sia possibile rappresentare il luogo dei punti definito dall'equazione implicita come grafico di un'applicazione. Questo problema è affrontato e risolto dal teorema delle funzioni implicite (o del Dini) che stabilisce che la condizione è esattamente del tipo (1.6).

Prima di passare all'enunciato e alla dimostrazione dei due risultati annunciati, ricordiamo alcune notazioni del calcolo differenziale. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $k \geq 0$ un intero. L'insieme $C^k(A)$ delle funzioni di classe C^k su A è l'insieme delle funzioni $f: A \to \mathbb{R}$ tali che per ogni multiindice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq k$ le derivate parziali

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial {x^1}^{\alpha_1} \ldots {x^n}^{\alpha_n}}$$

esistono e sono continue su A. Si dice che $f \in C^\infty(A)$, l'insieme delle funzioni di classe C^∞ su A, se $f \in C^k$ per ogni $k \geq 0$. Un'applicazione $F = (F^1, \ldots, F^m): A \to \mathbb{R}^m$ si dice di classe C^k, $0 \leq k \leq$, se le sue componenti $F^1, \ldots, F^m$ sono di classe C^k su A. Se F è di classe C^k, $k \geq 1$, il *differenziale* di F in $x \in A$ è l'applicazione lineare $dF_x = dF(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita per $v \in \mathbb{R}^n$ da $dF_x(v) = J_F(x)v$ dove

$$J_F(x) = \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \tag{1.7}$$

è la matrice Jacobiana di F in x. In particolare se $n = m$, allora dF_x è un isomorfismo se e solo se

$$\det(J_F(x)) \neq 0.$$

Inoltre ricordiamo che, per definizione di differenziale, $dF_x(y)$ è (l'unica) applicazione lineare tale che per y in un intorno di x si abbia

$$F(y) = F(x) + dF_x(y)(y - x) + R(x, y) \tag{1.8}$$

dove $R(x, y)$ è tale che

$$\lim_{y \to x} \frac{\|R(x, y)\|}{\|x - y\|} = 0.$$

Infine una applicazione $F: U \to V$ fra aperti di di $\mathbb{R}^n$ si dice *diffeormorfismo di classe* C^k se F e F^{-1} sono di classe C^k. Secondo questa nomenclatura dunque gli omeomorfismi sono diffeomorfismi di classe C^0.

Cominciamo con un risultato preliminare:

Lemma 1.1: *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un compatto convesso e sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ con $K \subset A$. Se $F = (F^1, \ldots, F^m): A \to \mathbb{R}^m$ è un'applicazione di classe C^1 e si pone*

$$M_{i,j} = \max_{x \in K} \left\| \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x) \right\| \qquad e \qquad M = \max_{i,j} M_{i,j},$$

allora per ogni $x, y \in K$ si ha

$$\|F(x) - F(y)\| \leq nmM\|x - y\|.$$

Dimostrazione: Siano $x, y \in K$ e sia $\alpha(t) = ty + (1 - t)x$ la parametrizzazione del segmento congiungente x a y. Per ogni $i = 1, \ldots, m$ si ha

$$F^i(y) - F^i(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F^i(\alpha(t)) dt.$$

D'altro canto

$$\frac{dF^i}{dt}(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(\alpha(t))(y^j - x^j)$$

e quindi per $i = 1, \dots, m$ si ha

$$\begin{aligned} \left|F^i(x) - F^i(y)\right| &\leq \int_0^1 \left|\frac{d}{dt} F^i(\alpha(t))\right| dt \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left|y^j - x^j\right| \int_0^1 \left|\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(\alpha(t))\right| dt \\ &\leq \sum_{j=1}^n \|y - x\| \, M \leq nM \, \|y - x\| \, . \end{aligned}$$

Dunque

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \sum_{i=1} \left|F^i(x) - F^i(y)\right| \leq nmM\|x - y\|.$$

□

Possiamo ora enunciare il primo dei nostri teoremi.

Teorema 1.2: (dell'applicazione inversa) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $F\colon A \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$, tale che per $x_0 \in A$ il differenziale dF_{x_0} sia un isomorfismo. Allora esistono intorni aperti U di x_0 con $U \subset A$ e V di $F(x_0)$ tali che*

$$F = F_{|U}\colon U \to V$$

sia un diffeomorfismo di classe C^k.

Dimostrazione: Osserviamo preliminarmente che si può assumere $dF(x_0) = Id$. Infatti se il risultato è dimostrato in questo caso e $dF(x_0) \neq Id$, allora, posto $L = \left(dF(x_0)\right)^{-1}$, l'applicazione $\tilde{F} = L \circ F$ è tale che $d\tilde{F}(x_0) = Id$. Dunque $\tilde{F}$ è un diffeomorfismo di classe C^k se ristretta a un opportuno intorno aperto di x_0 e quindi, dato che L è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$, il risultato vale anche per F.

Procediamo allora assumendo senz'altro che $dF(x_0) = Id$. Osserviamo subito che esiste $r > 0$ tale che se $x \in \overline{\mathbb{B}(x_0, r)}$ allora

$$\det J_F(x) \neq 0; \tag{1.9}$$

$$\left|\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x_0)\right| < \frac{1}{2n^2} \qquad \forall i, j = 1, \dots, n. \tag{1.10}$$

Il fatto che si possa trovare $r > 0$ in modo che (1.9) e (1.10) valgano è evidente dato che le derivate parziali di F sono continue. Spezzeremo la dimostrazione in passi successivi.

Passo 1. *Per $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{B}(x_0, r)}$ si ha*

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2 \, \|F(x) - F(x_0)\| \tag{1.11}$$

e quindi F è iniettiva su $\mathbb{B}(x_0, r)$.

Infatti dalla (1.10) segue che, se $G(x) = F(x) - x$ allora

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \max_{\overline{\mathbb{B}(x_0,r)}} \left|\frac{\partial G^i}{\partial x^j}(x)\right| = \max_{\overline{\mathbb{B}(x_0,r)}} \left|\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x) - \delta_{ij}\right| \\ &= \max_{\overline{\mathbb{B}(x_0,r)}} \left|\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x_0)\right| < \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

e quindi $M = \max_{ij} M_{ij} < \frac{1}{2n^2}$. Applicando il Lemma 1.1 all'applicazione G definita sul compatto convesso $\overline{\mathbb{B}(x_0, r)}$, per ogni $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{B}(x_0, r)}$ si ha

$$\|G(x_1) - G(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

D'altro canto $x_1 = F(x_1) - G(x_1)$ e $x_2 = F(x_2) - G(x_2)$ e quindi

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\| &= \|F(x_1) - G(x_1) - F(x_2) + G(x_2)\| \leq \|F(x_1) - F(x_2)\| + \|G(x_1) - G(x_2)\| \\ &\leq \|F(x_1) - F(x_2)\| + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|\end{aligned}$$

e dunque la (1.11) segue.

Passo 2. *Esiste $\rho > 0$ tale che per ogni $y \in \mathbb{B}(F(x_0), \rho)$ esiste unico $x \in \mathbb{B}(x_0, r)$ con $F(x) = y$.*

Per il Passo 1 , se $x \in S = \{x | \|x - x_0\| = r\}$ si ha $F(x) \neq F(x_0)$. Sia ρ definito da

$$2\rho = \min_{x \in S} \|F(x) - F(x_0)\| > 0.$$

Se $y \in \mathbb{B}(F(x_0), \rho)$ e $x \in S$ allora, dato che

$$2\rho \leq \|F(x) - F(x_0)\| \leq \|y - F(x)\| + \|F(x_0) - y\| < \|y - F(x)\| + \rho,$$

si ha

$$\|y - F(x_0)\| < \rho < \|y - F(x)\|. \tag{1.12}$$

Fissato $y \in \mathbb{B}(F(x_0), \rho)$, si definisca $g: \overline{\mathbb{B}(x_0, r)} \to \mathbb{R}$ mediante $g(x) = \|y - F(x)\|^2$. La funzione g è continua sul compatto $\overline{\mathbb{B}(x_0, r)}$ e quindi ha minimo. La (1.12) assicura che un punto di minimo assoluto per la g non può appartenere a $S = \partial\mathbb{B}(x_0, r)$. Sia allora $x \in \mathbb{B}(x_0, r)$ un punto di minimo per la g. Necessariamente allora, per ogni $j = 1, \dots, n$, si ha

$$\begin{aligned}0 = \frac{\partial g}{\partial x^j}(x) &= \frac{\partial}{\partial x^j} \sum_{i=1}^{n} \left(y^i - F^i(x)\right)^2 \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} \left(y^i - F^i(x)\right) \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x)\end{aligned}$$

ossia

$$dF_x\left(y - F(x)\right) = 0.$$

Dato che vale la (1.9), dF_x è invertibile e quindi $y = F(x)$. L'unicità di x segue dal Passo 1.

Definiamo $U = \mathbb{B}(x_0, r) \cap F^{-1}\left(\mathbb{B}(F(x_0), \rho)\right)$ e $V = \mathbb{B}(F(x_0), \rho)$.

Passo 3. *$F = F_{|U}: U \to V$ è un omeomorfismo.*

Abbiamo mostrato che $F = F_{|U}: U \to V$ è biettiva. Inoltre la (1.11) implica che se $y_1, y_2 \in V$ si ha

$$\|F^{-1}(y_1) - F^{-1}(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\| \tag{1.13}$$

da cui segue che anche F^{-1} è continua e quindi $F = F_{|U}: U \to V$ è un omeomorfismo.

Veniamo ora alla differenziabilità dell'inversa:

Passo 4. $F^{-1}: V \to U$ è differenziabile e

$$d(F^{-1})_{F(x)} = (dF_x)^{-1}. \tag{1.14}$$

Sia $y = F(x) \in V$ e si pongano $L = dF_x$ e $T = L^{-1}$. Allora per $y_1 \in V$ con $y_1 \neq y$ e $x_1 = F^{-1}(y_1)$ abbiamo

$$F(x_1) = F(x) + L(x_1 - x) + R(x_1, x)$$

dove

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{\|R(x_1, x)\|}{\|x_1 - x\|} = 0.$$

Dunque

$$T\left(F(x_1) - F(x)\right) = x_1 - x - T\left(R(x_1, x)\right) = F^{-1}(y_1) - F^{-1}(y) + T\left(R(F^{-1}(y_1), F^{-1}(y))\right).$$

Pertanto, ricordando che $x = F^{-1}(y)$ e $x_1 = F^{-1}(y_1)$, si ha

$$F^{-1}(y_1) = F^{-1}(y) + T(y_1 - y) - T\left(R(x_1, x)\right).$$

Per completare la dimostrazione del Passo 4 basta provare che

$$\lim_{y_1 \to y} \frac{\|T\left(R(x_1, x)\right)\|}{\|y_1 - y\|} = 0.$$

Se

$$K = \max_{\|z\|=1} \|T(z)\|$$

allora per ogni $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si ha $\|T(z)\| \leq K\|z\|$ e quindi

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\|T\left(R(F^{-1}(y_1), F^{-1}(y))\right)\|}{\|y_1 - y\|} &= \|T\left(\frac{R(F^{-1}(y_1), F^{-1}(y))}{\|y_1 - y\|}\right)\| \\ &\leq K\frac{\|R(F^{-1}(y_1), F^{-1}(y))\|}{\|y_1 - y\|}. \end{aligned}$$

D'altra parte, usando (1.13),

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\|R(F^{-1}(y_1), F^{-1}(y))\|}{\|y_1 - y\|} &= \frac{\|R(F^{-1}(y_1), F^{-1}(y))\|}{\|F^{-1}(y_1) - F^{-1}(y)\|} \frac{\|F^{-1}(y_1) - F^{-1}(y)\|}{\|y_1 - y\|} \\ &\leq 2\frac{\|R(F^{-1}(y_1), F^{-1}(y))\|}{\|F^{-1}(y_1) - F^{-1}(y)\|}. \end{aligned}$$

Dato che F^{-1} è continua, se $y_1 \to y$ allora $F^{-1}(y_1) \to F^{-1}(y)$ e possiamo concludere come desiderato

$$0 = \lim_{y_1 \to y} \frac{\|R(F^{-1}(y_1), F^{-1}(y))\|}{\|F^{-1}(y_1) - F^{-1}(y)\|} = \lim_{y_1 \to y} \frac{\|R(F^{-1}(y_1), F^{-1}(y))\|}{\|y_1 - y\|} = \lim_{y_1 \to y} \frac{\|T\left(R(x_1, x)\right)\|}{\|y_1 - y\|}.$$

La (1.14) dimostra anche che F^{-1} è di classe C^1. Se $1 < k < \infty$ allora (1.14) implica che le derivate parziali prime di F^{-1} sono di classe C^{k-1} e quindi che F^{-1} è di classe C^k. Infine se $k = \infty$, allo stesso modo segue che F^{-1} è di classe C^∞. $\square$

Dal teorema dell'applicazione inversa ricaviamo ora il teorema delle funzioni implicite. Premettiamo alcune notazioni per semplificare l'esposizione. Si identifichi $\mathbb{R}^{m+n}$ con $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ in modo che se $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$ allora $(x, y) = (x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^{m+n}$. Inoltre se $A \subset \mathbb{R}^{m+n}$ è un aperto e $F\colon A \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione di classe C^k,$k \geq 1$, allora useremo le seguenti notazioni:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Abbiamo allora il seguente

Teorema 1.3: (delle funzioni implicite o del Dini) *Sia* $A \subset \mathbb{R}^{m+n}$ *un aperto e* $F\colon A \to \mathbb{R}^n$ *un'applicazione di classe* C^k, $1 \le k \le \infty$ *tale che per* $(x_0, y_0) \in A$ *si abbia*

$$F(x_0, y_0) = 0 \qquad e \qquad \det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0. \tag{1.16}$$

Allora esistono un aperto $U \subset \mathbb{R}^m$ *con* $x_0 \in U$*, un aperto* $V \subset \mathbb{R}^n$ *con* $y_0 \in V$ *e un'unica applicazione* $f\colon U \to V$ *di classe* C^k *tale che per ogni* $x \in U$ *si abbia*

$$F\left(x, f(x)\right) = 0 \tag{1.17}$$

e

$$J_f(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))\right). \tag{1.18}$$

Dimostrazione: Si consideri $G\colon A \to \mathbb{R}^{m+n}$ definita da

$$G(x, y) = (x, F(x, y)). \tag{1.19}$$

Allora

$$J_G(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\right) & \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \end{pmatrix}$$

e quindi $\det\left(J_G(x_0, y_0)\right) = \det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$. Dunque, per il teorema dell'applicazione inversa, esistono aperti $A' \subset A \subset \mathbb{R}^{m+n}$ con $(x_0, y_0) \in A'$ e $B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ con $(x_0, 0) = G(x_0, y_0) \in B$ in modo che $G\colon A' \to B$ sia un diffeomorfismo di classe C^k e sia $H = G^{-1}\colon B \to A'$.

Se $G = (G^1, \dots, G^m, G^{m+1}, \dots, G^n)$ e $H = (H^1, \dots, H^m, H^{m+1}, \dots, H^n)$ sono le espressioni in componenti di G e H, dato che per $j = 1, \dots, m$ si ha $G^j(x, y) = x^j$, si deve avere per $j = 1, \dots, m$ e per ogni $(x, y) \in B$

$$H^j(x, y) = x^j$$

e quindi per qualche applicazione $\phi\colon B \to \mathbb{R}^n$ si ha

$$H(x, y) = (x, \phi(x, y)).$$

Dato che H è di classe C^k, anche ϕ è di classe C^k. Ricordando che $G(x_0, y_0) = (x_0, 0)$, abbiamo allora $(x_0, \phi(x_0, 0)) = H(x_0, 0) = (x_0, y_0)$ e, di conseguenza, $\phi(x_0, 0) = y_0$. Sia $U \subset \mathbb{R}^m$ con $x_0 \in U$ un aperto tale che $(x, 0) \in B$ se $x \in U$. Allora per un opportuno aperto $V \subset \mathbb{R}^n$ con $y_0 \in V$,

$$f(x) = \phi(x, 0)$$

definisce una applicazione $f\colon U \to V$ di classe C^k tale che

$$(x, F(x, f(x)) = G(x, f(x)) = G(x, \phi(x, 0)) = G(H(x, 0)) = (x, 0).$$

Dunque la f soddisfa la (1.17). Per dimostrare l'unicità di f basta notare che su A' la G è biettiva e quindi se per qualche x si ha $F(x, y) = F(x, f(x))$ allora

$$G(x, y) = (x, F(x, y)) = (x, f(x)) = G(x, f(x))$$

e pertanto $y = f(x)$.

Infine (1.18) è una semplice conseguenza della regola della differenziazione della composizione di applicazioni. Infatti da $F(x, f(x)) = 0$ per $x \in U$, segue

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))J_f(x) = 0$$

e quindi (1.18). $\square$

Concludiamo questa sezione osservando che i due risultati dimostrati hanno una versione anche per applicazioni analitiche reali. Ci limitiamo a ricordare le necessarie nozioni preliminari e a dare gli enunciati dei teoremi senza la dimostrazione.

Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, una applicazione $F: A \to \mathbb{R}^m$ si dice *analitica reale* o di classe C^ω se in ogni punto di le componenti di F hanno serie di Taylor convergente o, in altre parole, se ammettono nell'intorno di ogni punto uno sviluppo in serie di potenze. Un diffeomorfismo $F: A \to B$ di classe C^ω è una applicazione biettiva di classe C^ω tale che F^{-1} è di classe C^ω. Valgono i seguenti:

Teorema 1.4: (dell'applicazione inversa per applicazioni analitiche reali) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $F: A \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe C^ω tale che per $x_0 \in A$ il differenziale dF_{x_0} sia un isomorfismo. Allora esistono intorni aperti U di x_0 con $U \subset A$ e V di $F(x_0)$ tali che*

$$F = F_{|U}: U \to V$$

sia un diffeomorfismo di classe C^ω.

Teorema 1.5: (del Dini per applicazioni analitiche reali) *Sia $A \subset \mathbb{R}^{m+n}$ un aperto e $F: A \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe C^ω tale che per $(x_0, y_0) \in A$ si abbia*

$$F(x_0, y_0) = 0 \qquad e \qquad \det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0. \tag{1.20}$$

Allora esistono un aperto $U \subset \mathbb{R}^m$ con $x_0 \in U$, un aperto $V \subset \mathbb{R}^n$ con $y_0 \in V$ e un'unica applicazione $f: U \to V$ di classe C^ω tale che per ogni $x \in U$ si abbia

$$F\left(x, f(x)\right) = 0 \tag{1.21}$$

e

$$J_f(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))\right). \tag{1.22}$$

Per una diversa impostazione di questi argomenti e per ulteriori conseguenze si consulti E. Giusti, Analisi Matematica 2. Per le dimostrazioni dei teoremi 1.4 e 1.5 si veda ad esempio R. Narasimhan, Analysis on real and complex manifolds.

Esercizi

1. Si consideri $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

a) Trovare l'immagine di F;
b) Trovare l'immagine mediante F delle rette parallele agli assi coordinati;
c) Dimostrare che F non è inettiva ma che per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esiste un intorno aperto U tale che $F: U \to F(U)$ è un diffeomorfismo di classe C^∞.

2. Si consideri $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^4 + y^4 = 1\}$. Si dimostri che per ogni punto $(x_0, y_0) \in C$ esiste un intorno aperto U tale che $U \cap C$ è immagine di una curva regolare $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$. Si calcoli la curvatura di C nel punto $(1, 0)$.

3. Si consideri $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $F(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \sin x$. Si dimostri che esiste un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ con $(\frac{\pi}{2}, 0) \in A$ e una funzione $F: A \to \mathbb{R}^2$ tale che $F(x, y, f(x, y)) = 0$ se $(x, y) \in A$. Trovare lo sviluppo di Taylor di f fino al secondo ordine in un intorno di $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

2. Sottovarietà differenziabili di $\mathbb{R}^N$.

Introdurremo ora la nozione di sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^N$ e trarremo, grazie ai risultati del primo paragrafo, le prime conseguenze. Una sottovarietà differenziabile di dimensione m in parole povere è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ definito localmente dall'annullarsi di $n-m$ funzioni differenziabili "indipendenti" in un senso opportuno. Precisamente abbiamo la seguente

Definizione 2.1 Un sottospazio topologico M di $\mathbb{R}^N$, si dice una *sottovarietà differenziabile di dimensione* m se per ogni $x \in M$ esiste un intorno U di x in $\mathbb{R}^N$ e funzioni $f_j: U \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ per $j = 1, \ldots, n = N - m$ tali che:

(i) $M \cap U = \{y \in U \mid f_1(y) = \ldots = f_n(y) = 0\}$;

(ii) $rank\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right) = n$.

Esempi

1) Un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di dimensione n. In questo caso si osservi che A è il luogo di annullamento di "nessuna" funzione differenziabile.

2) $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = 1\}$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-1$.

3) Una conica non degenere è una sottovarietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$. Una quadrica non degenere in $\mathbb{R}^3$ è una sottovarietà di dimensione 2.

4) Identificato lo spazio delle matrici quadrate di ordine n con $\mathbb{R}^{n^2}$, si ha che lo spazio $S(n)$ delle matrici simmetriche di ordine n è una sottovarietà di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$. Infatti $A \in S(n)$ se e solo se $A = A^t$.

5) Siano $M \subset \mathbb{R}^r$ una sottovarietà di dimensione m e $N \subset \mathbb{R}^s$ una sottovarietà di dimensione n. Allora $M \times N \subset \mathbb{R}^{r+s}$ è una sottovarietà di dimensione $m+n$.

È utile dare un certo numero di caratterizzazioni delle sottovarietà in modo da poter scegliere fra definizioni equivalenti quella che meglio si adatti alla situazione concreta che si studia. A tal proposito abbiamo il seguente:

Teorema 2.1: *Sia M un sottospazio topologico di $\mathbb{R}^N$ e sia $N = m + n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) M è una sottovarietà differenziabile di dimensione m.

(2) Per ogni $x \in M$ esistono un intorno aperto $U \subset \mathbb{R}^N$ di x e una applicazione $F: U \to \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ con $M \cap U = F^{-1}(0)$ e con il differenziale $dF_x: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ suriettivo.

(3) Per ogni $p \in M$ esistono un intorno aperto $V \subset \mathbb{R}^N$ di p, un aperto $U \subset \mathbb{R}^N$ e un diffeomorfismo

$$\phi: V \to \phi(V) = U \subset \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

di classe C^∞ tale che $\phi(V \cap M) = \phi(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.

(4) Per ogni $p \in M$ esistono un intorno aperto $B \subset \mathbb{R}^N$ di p, un aperto $A \subset \mathbb{R}^m$ con $0 \in A$ e una applicazione $G: A \to \mathbb{R}^N$ di classe C^∞ tale che

(a) $G(0) = p$,

(b) $dG_x: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ è iniettivo per $x \in A$,

(c) $G(A) = M \cap B$,

(d) $G: A \to M \cap B$ è un omeomorfismo.

(5) Dopo un opportuno cambio lineare di coordinate di $\mathbb{R}^N$, per ogni punto $x^o \in M$ esiste un intorno $W \subset \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ di $x^o = (x_1^o, \ldots, x_m^o, x_{m+1}^o \ldots, x_{m+n}^o)$, un intorno $W' \subset \mathbb{R}^m$ di $\overline{x}^o = (x_1^o, \ldots, x_m^o)$ e una applicazione $h: W' \to \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ tale che $M \cap W$ è il grafico di h ossia

$$x = (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_N) \in M \cap W$$

$$\Updownarrow$$

$$(x_1, \ldots, x_m) \in W' \quad \text{e} \quad (x_{m+1} \ldots, x_N) = h(x_1, \ldots, x_m).$$

Dimostrazione: Seguiremo il seguente schema di dimostrazione:

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1).$$

(1) $\Leftrightarrow$ (2). Le due affermazioni differiscono solo per il linguaggio usato. Infatti se vale (1) allora per ogni $x \in M$ esiste un intorno U di x in $\mathbb{R}^n$ e funzioni $f_j: U \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ per $j = 1, \ldots, n$ tali che valgono (i) e (ii) della Definizione 2.1. Dunque $F: U \to \mathbb{R}^n$ definita da $F = (f_1, \ldots, f_n)$ ha le proprietà richieste in (2). Viceversa se vale (2) le componenti della F sono le funzioni che localmente definiscono M che quindi è una sottovarietà di dimensione m.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sia $p \in M$. Allora esiste un aperto $U \subset \mathbb{R}^N$ con $p \in U$ e una applicazione $F: U \to \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ tale che $M \cap U = F^{-1}(0)$ e $dF(p): \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ è suriettivo. Esistono applicazioni lineari $f_j: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ per $j = 1, \ldots, m$ tali che l'applicazione lineare $A: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ definita da $A(v) = (f_1(v), \ldots, f_m(v), dF_x(v))$ è un isomorfismo. Per il teorema dell'applicazione inversa allora esiste un aperto $V \subset U$ con $x \in V$ tale che l'applicazione $\phi: V \to \mathbb{R}^N$ definita da $\phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x), F(x))$ è un diffeomorfismo. Dato che $x \in M \cap U$ se e solo se $F(x) = 0$ allora $x \in M \cap V$ se e solo se $\phi(x) \in \phi(V) \cap \mathbb{R}^m \times \{0\}$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Sia $p \in M$, $V \subset \mathbb{R}^N$ un aperto contenente p e $\phi: V \to \phi(V) \subset \mathbb{R}^N$ con le proprietà esposte in (3). Non è restrittivo supporre che $\phi(p) = 0$. Sia $A = \phi(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ e $B = V$. Allora se $j: A \to \phi(V)$ è l'inclusione, l'applicazione $G = \phi^{-1} \circ j: A \to B$ è quella richiesta. Infatti

$$G(A) = \phi^{-1}\left(\phi(B) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})\right) = \phi^{-1}\left(\phi(B \cap M)\right) = B \cap M.$$

Evidentemente $G(0) = p$ e $dG_0 = d(\phi^{-1})_0 \circ dj_0$ è iniettivo visto che $d(\phi^{-1})_0$ è un isomorfismo e dj_0 è iniettivo. Dunque, a meno di sostituire A con un aperto contente 0 più piccolo, dG_x è iniettivo per ogni $x \in A$. Infine $G: A \to B \cap M$ è un omeomorfismo visto che G è biettiva, continua e chiusa perché composizione di j e ϕ^{-1} che sono chiuse.

(4) $\Rightarrow$ (5). Sia $x^o \in M$ e $G: A \to B$ l'applicazione con le proprietà elencate in (5). A meno di un cambio lineare di coordinate si può supporre che $dG_0(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Siano

$$p: \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \{0\} = \mathbb{R}^m \qquad q: \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \{0\} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$$

le proiezioni e si consideri l'applicazione di classe C^∞

$$p \circ G: A \to \mathbb{R}^m \times \{0\}.$$

Dato che $dp_{x^o}{}_{|\mathbb{R}^m \times \{0\}}$ è un isomorfismo, anche $d(p \circ G)_0 = dp_{x^o} \circ dG_0$ è un isomorfismo. Per il teorema dell'applicazione inversa esiste un aperto $A' \subset A$ con $0 \in A'$ tale che

$$p \circ G: A' \to p \circ G(A') = W'$$

è un diffeomorfismo. Siamo pronti ora a definire l'applicazione $h: W' \to \mathbb{R}^{n-m}$ desiderata. Poniamo $h = q \circ G \circ (p \circ G)^{-1}$. Questa applicazione è di classe C^∞ perchè composizione di applicazioni di classe C^∞. Dato che $G: A \to M \cap B$ è un omeomorfismo, $G(A')$ è un aperto di M, dunque $G(A') = M \cap W$ per qualche aperto $W \subset \mathbb{R}^n$. Allora $x \in M \cap W$ se e solo se $x = G(a)$ per qualche $a \in A'$. Dunque se $x \in M \cap W$ allora $p(x) \in W'$ e si ha

$$\begin{aligned} x = G(a) = (p \circ G(a), q \circ G(a)) &= \left(p \circ G(a), q \circ (p \circ G)^{-1} \circ (p \circ G) \circ G(a)\right) \\ &= (p(x), h(p(x))) \in \Gamma_h \end{aligned}$$

dove Γ_h è il grafico dell'applicazione h sull'aperto W'. Viceversa se $x' = (x_1, \ldots, x_m) \in W'$ allora necessariamente $x' = p \circ G(a)$ per qualche $a \in A'$ e come prima si ha

$$(x', h(x')) = (p \circ G(a), h(p \circ G(a))) = (p \circ G(a), q \circ G(a)) = G(a) \in M \cap W$$

e quindi $M \cap W = \Gamma_h$.

(5) $\Rightarrow$ (1). Se vale (5) per ogni $x \in M$, allora, se $h = (h^1, \ldots, h^n)$, basta porre per $j = 1, \ldots, n$

$$f^j(x) = h^j(x_1, \ldots, x_m) - x_{j+m}.$$

Evidentemente, posto $V = W$, si ha

$$M \cap V = \{x \in V | f^j(x) = 0 \qquad j = 1, \ldots, n\}.$$

Inoltre su V si ha

$$\left(\frac{\partial f^j}{\partial x_i}\right)_{\substack{j=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,m}} = (J_h | - Id_n)$$

dove J_h è la matrice Jacobiana di h e Id_n è la matrice identità di ordine n. Dunque la matrice J_f ha rango n in ogni punto di V e quindi in particolare in x^o e la dimostrazione è completa. $\square$

Sia M una sottovarietà differenziabile di dimensione m in $\mathbb{R}^N$. Una *parametrizzazione* o *sistema di coordinate locali* in $p \in M$ è un'applicazione $G: A \to B \subset \mathbb{R}^N$ di classe C^∞ per qualche aperto $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^N$ con $p \in B$, tale che valgano le seguenti proprietà:

$$G(A) = B \cap M \qquad \text{e} \qquad G: A \to B \cap M \quad \text{è} \quad \text{un} \quad \text{omeomorfismo}, \tag{2.1}$$

$$dG_x: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N \qquad \text{è} \quad \text{iniettivo} \qquad \forall x \in A. \tag{2.2}$$

Dal Teorema 2.1, in particolare dal fatto che il punto (4) equivale al punto (1), segue allora che un sottospazio topologico M di $\mathbb{R}^N$ è una sottovarietà differenziabile se e solo se esiste una parametrizzazione in ogni suo punto. Inoltre le parametrizzazioni du una sottovarietà sono "opportunamente" compatibili. Precisamente abbiamo il seguente

Teorema 2.2: *Sia M sottospazio topologico di $\mathbb{R}^N$. Allora M una è sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^N$ di dimensione m se e solo se per ogni $p \in M$ si hanno le due seguenti proprietà:*

(i) esiste una parametrizzazione $G: A \to B$ di M con $p \in G(A) = B$.

(ii) se $G_1: A_1 \to B_1$ e $G_2: A_2 \to B_2$ sono due parametrizzazioni di M con $p \in B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ allora, posti $U_1 = B_1 \cap M$ e $U_2 = B_2 \cap M$,

$$(G_2)^{-1} \circ G_1: (G_1)^{-1}(U_1 \cap U_2) \to (G_2)^{-1}(U_1 \cap U_2)$$

è un diffeomorfismo.

Dimostrazione: Come accennato sopra, il fatto che (i) vale per ogni $p \in M$ equivale al fatto che M sia è sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^N$ di dimensione m è parte del Teorema 2.1. Dobbiamo solo provare che (ii) valga per una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^N$. Sia $h = (G_2)^{-1} \circ G_1$. Dato che è composizione di omeomorfismi, h è un omeomorfismo. Non possiamo concludere immediatamente che h è un diffeomorfismo dato che $(G_2)^{-1}$ è definito su un aperto di M e non ancora abbiamo una nozione di applicazione differenziabile su sottovarietà (dare una tale nozione è la motivazione principale del risultato che stiamo dimostrando). Procediamo allora nel modo seguente. Sia $q \in U_1 \cap U_2$, $x_0 = (G_1)^{-1}(q)$ e $y_0 = (G_2)^{-1}(q) = h(x_0)$. Dato che G_2 è una parametrizzazione si può supporre, a meno di riordinare le coordinate di $\mathbb{R}^N$, che, se $G_2 = (G_2^1, \ldots, G_2^N)$ sono le componenti di G_2, allora

$$\det \left(\frac{\partial G_2^j}{\partial x_i}\right)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ i=1,\ldots,m}} \neq 0.$$

se $N = m + n$, estendiamo $G_2: A_2 \to \mathbb{R}^N$ a un'applicazione $F: A_2 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ ponendo

$$F(x', x_{m+1}, \ldots, x_N) = G_2(x') + (0, \ldots, 0, 0, x^{m+1}, \ldots, x^N)$$

dove $(x', x^{m+1}, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^n)$. Allora

$$\det J_F(y_0, 0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial G_2^1}{\partial x^1}(y_0) & \dots & \frac{\partial G_2^1}{\partial x^m}(y_0) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_2^m}{\partial x^1}(y_0) & \dots & \frac{\partial G_2^m}{\partial x^m}(y_0) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial G_2^{m+1}}{\partial x^1}(y_0) & \dots & \frac{\partial G_2^{m+1}}{\partial x^m}(y_0) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_2^N}{\partial x^1}(y_0) & \dots & \frac{\partial G_2^N}{\partial x^m}(y_0) & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

$$= \det \left(\frac{\partial G_2^j}{\partial x^i}(y_0) \right)_{\substack{j=1,\dots,m \\ i=1,\dots,m}} \neq 0.$$

Per il teorema dell'applicazione inversa esiste un intorno aperto V di q in $\mathbb{R}^N$ tale che su V esiste l'inversa F^{-1} di F ed è di classe C^∞. D'altro canto, per costruzione,a su $A_2 \times \{0\}$ si ha che $F(x', 0) = G_2(x') \in M$. Dunque su $V \cap M$, che è un aperto di M contenente q, si ha $F^{-1} = G_2^{-1}$. Allora su $G_1^{-1}(V) \cap G_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$, che è un aperto di $\mathbb{R}^m$ contenente $x_0 = G_1^{-1}(q)$, si ha

$$h = G_2^{-1} \circ G_1 = F^{-1} \circ G_1$$

e quindi che h è di classe C^∞. Per l'arbitrarietà di $q \in U_1 \cap U_2$ segue che h è differenziabile di classe C^∞ su tutto $U_1 \cap U_2$. Lo stesso argomento applicato a $h^{-1} = G_1^{-1} \circ G_2$ completa la dimostrazione. $\square$

Diamo ora la seguente

Definizione. Siano $M \subset \mathbb{R}^l$ e $N \subset \mathbb{R}^k$ sottovarietà differenziabili di dimensione m e n rispettivamente. Una applicazione continua $F\colon M \to N$ si dice *differenziabile (di classe C^∞)* se per ogni punto $p \in M$, per ogni parametrizzazione $G_1\colon A_1 \to \mathbb{R}^l$ di M in p e $G_2\colon A_2 \to \mathbb{R}^k$ di N in $F(p)$, l'applicazione

$$G_2^{-1} \circ F \circ G_1 \colon G_1^{-1}(G_1(A_1) \cap F^{-1}(G_2(A_2)) \to G_2^{-1}(F \circ G_1(A_1) \cap G_2(A_2)) \subset \mathbb{R}^k$$

è differenziabile di classe C^∞.

La nozione di applicazione differenziabile di classe C^∞ fra varietà è dunque una estensione di quella usuale per applicazioni fra aperti di spazi euclidei. La definizione data appare però scomoda da usare dato che sembra costringere a infinite verifiche persino per controllare la differenziabilità nell'intorno di un punto. In realtà, grazie al Teorema 2.2, è immediato osservare che per verificare se una applicazione fra sottovarietà è differenziabile è sufficiente verificare la proprietà richiesta per una sola scelta di parametrizzazione per intorni di ogni punto e della sua immagine. Più precisamente abbiamo la seguente

Proposizione 2.3: *Sia $F\colon M \to N$ una applicazione continua fra sottovarietà differenziabili $M \subset \mathbb{R}^l$ e $N \subset \mathbb{R}^k$ di dimensione m e n rispettivamente. Allora F è differenziabile (di classe C^∞) se e solo se per ogni punto $p \in M$ esistono parametrizzazioni $G_1\colon A_1 \to \mathbb{R}^l$ di M in p e $G_2\colon A_2 \to \mathbb{R}^k$ di N in $F(p)$ tali che l'applicazione*

$$G_2^{-1} \circ F \circ G_1 \colon G_1^{-1}(G_1(A_1) \cap F^{-1}(G_2(A_2)) \to G_2^{-1}(F \circ G_1(A_1) \cap G_2(A_2)) \subset \mathbb{R}^k$$

è differenziabile di classe C^∞.

Infine nelle applicazioni è utile poter usare il fatto che la restrizione a una sottovarietà di una applicazione differenziabile è differenziabile. Invitiamo perciò a risolvere il seguente esercizio (facile se si usa la Proposizione 2.3).

Esercizio Sia $F\colon M \to N$ una applicazione continua fra sottovarietà differenziabili $M \subset \mathbb{R}^l$ e $N \subset \mathbb{R}^k$. Se per ogni $p \in M$ esiste un aperto $U \subset \mathbb{R}^l$ con $p \in U$ e una applicazione $\tilde{F}\colon U \to \mathbb{R}^k$ tale che $\tilde{F}_{M \cap U} = F_{M \cap U}$ allora F è differenziabile di classe C^∞.

3. Varietà differenziabili.

Basandosi sulla nozione di sottovarietà di $\mathbb{R}^n$, si può dare una nozione più generale. Sia M una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m e, per qualche aperto $A \subset \mathbb{R}^m$, sia $G: A \to B = G(A) \subset M$ una parametrizzazione di M. L'inversa $\phi = G^{-1}: B \to A$ di G si dice *carta locale* di M. Dato che per il Teorema 2.2 si può ricoprire M mediante i domini di definizione di carte locali di M, esiste allora un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U\}$ di M tale che per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste un omeomorfismo $\phi: U \to A \subset \mathbb{R}^m$ per qualche aperto A. Inoltre M è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e quindi è uno spazio di Hausdorff a base numerabile. Uno spazio topologico M con queste proprietà si dice una *varietà topologica di dimensione* m. In effetti la struttura di M è ancora più ricca. Per il Teorema 2.2 infatti se $\phi_i: U_i \to A_i$ per $i = 1, 2$ sono due carte locali con $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ allora

$$\phi_2 \circ (\phi_1)^{-1}: \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

è un diffeomorfismo di aperti di $\mathbb{R}^m$. L'insieme $\mathcal{D} = \{(\phi, U)\}$ delle coppie U aperto di M e $\phi: U \to A$ carta locale di M determinato in questo modo si chiama *struttura differenziabile* della sottovarietà M. Questo tipo di presentazione suggerisce la seguente nozione "astratta" di varietà differenziabile:

Definizione. Sia M uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile tale che esiste una famiglia di coppie $\mathcal{D} = \{(\phi, U)\}$ – dove U è aperto di M e $\phi: U \to A$ è un omeomorfismo tra U e un aperto $A \subset \mathbb{R}^m$ – con queste proprietà:

(i) $\quad M = \bigcup_{(U,\phi)\in\mathcal{D}} U$,

(ii) $\quad$ se $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2) \in \mathcal{D}$ con $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ allora

$$\phi_2 \circ (\phi_1)^{-1}: \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

è un diffeomorfismo (di classe C^∞),

(iii) $\quad$ se V è aperto di M e $\psi: V \to A$ è un omeomorfismo tra V e un aperto $A \subset \mathbb{R}^m$ tale che per ogni $(U, \phi) \in \mathcal{D}$ con $U \cap V \neq \emptyset$ si ha che $\phi \circ (\psi)^{-1}: \psi(V \cap U) \to \phi(V \cap U)$ è un diffeomorfismo (di classe C^∞), allora $(V, \psi) \in \mathcal{D}$.

In questo caso $\mathcal{D}$ si dice *struttura differenziabile (di classe C^∞)* per M e M si dice *varietà differenziabile di dimensione m.*

E' abbastanza semplice dimostrare che le sottovarietà differenziabili di $\mathbb{R}^n$ definite nel capitolo precedente verificano questa definizione più generale. In effetti per una sottovarietà M basta scegliere $\mathcal{D}$ come la famiglia delle "inverse" di tutte le possibili parametrizzazioni di M. In questo caso la (i) e la (ii) sono immediate dal Teorema 2.2. La verifica della proprietà di massimalità (iii), semplice anche se un po' noiosa, non è molto importante per i nostri scopi ed è lasciata al (volenteroso) lettore.

Diamo ora, in questo contesto, la definizione naturale di applicazione differenziabile:

Definizione. Una applicazione continua $F: M \to N$ fra varietà differenziabili M, N si dice *differenziabile (di classe C^∞)* se per ogni $p \in M$ e ogni carta locale (U, ϕ) di M e (V, ψ) di N con $p \in U$ e $F(p) \in V$ si ha che $\psi \circ F \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(F(U) \cap V)$ è di classe C^∞. Si dice che F è un *diffeomorfismo* se inoltre F è biettiva con inversa F^{-1} differenziabile (di classe C^∞).

Concludiamo queste considerazioni osservando che in effetti la nozione di varietà differenziabile è solo apparentemente più generale di quella di sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ nel senso che ogni varietà può essere sempre pensata come sottovarietà di uno spazio euclideo. Per la precisione vale il seguenteririsultato

Teorema 3.1: (di Whitney) *Sia M una varietà differenziabile di dimensione m. Esiste una sottovarietà chiusa $\tilde{M}$ di dimensione m di $\mathbb{R}^{2m+1}$ e un diffeomorfismo $F: M \to \tilde{M}$.*

Per la dimostrazione (piuttosto impegnativa) e per i necessari prerequisiti si veda ad esempio Sernesi, Geometria 2.

4. Spazi tangenti.

Prima di discutere la nozione di spazio tangente a un punto di una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ vediamo come stanno nel caso di $\mathbb{R}^n$ stesso rivisitando opportunamente l'idea di vettore applicato in un punto. Se $p \in \mathbb{R}^n$, diremo che $v \in \mathbb{R}^n$ è un *vettore tangente* a $\mathbb{R}^n$ in p se esiste una curva $\alpha\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = (\alpha^1{}'(0), \dots, \alpha^n{}'(0)) = v$ dove si pone per $j = 1, \dots, n$

$$\alpha^j{}'(0) = \frac{d\alpha^j}{dt}(t)_{|t=0}.$$

L'insieme dei vettori tangenti in $p \in \mathbb{R}^n$ si denota $T_p\mathbb{R}^n$. È immediato verificare che $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ dato che, per definizione, $T_p\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ e, d'altro canto, se $v \in \mathbb{R}^n$ allora la curva definita da $\alpha(t) = tv + p$ è tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$ e quindi $v \in T_p\mathbb{R}^n$. Dunque l'insieme dei vettori tangenti in un punto $p \in \mathbb{R}^n$ è una copia di $\mathbb{R}^n$ e essendo l'insieme di tutti i possibili vettori velocità di curve di classe C^∞ passanti per p si può evidententemente identificare con lo spazio dei vettori applicati in p. In particolare $T_p\mathbb{R}^n$ ha per costruzione la struttura di spazio vettoriale di dimensione n.

Su una sottovarietà proponiamo l'analoga definizione:

Definizione. Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà differenziabile e sia $p \in M$. Si dice che $v \in \mathbb{R}^n$ è un *vettore tangente* a M in p se esiste una curva $\alpha\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ di classe C^∞ con $\alpha(0) = p$ e $v = \alpha'(0) = (\alpha^1{}'(0), \dots, \alpha^n{}'(0))$. L'insieme dei vettori tangenti a M in p si dice *spazio tangente* a M in p e si denota T_pM.

Esercizio (Facile facile) Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà differenziabile e $\alpha\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ una curva di classe C^∞. Dimostrare che per ogni $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ si ha $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}M$.

Per identificare in pratica gli spazi tangenti (e giustificare perchè li si chiama spazi) è utile la seguente

Proposizione 4.1: *Se $M \subset \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà differenziabile di dimensione m, allora T_pM è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m. Precisamente si ha:*

(i) *Se per qualche aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ con $x_0 \in A$, $G\colon A \to M$ è una parametrizzazione di M con $G(x_0) = p$ allora $T_pM = dG_{x_0}(\mathbb{R}^m)$.*

(ii) *Se per qualche aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ con $p \in U$ e per qualche $F\colon U \to \mathbb{R}^{n-m}$ di classe C^∞ si ha $M \cap U = F^{-1}(0)$ con dF suriettivo in ogni punto di U, allora*

$$T_pM = Ker\ dF_p = \{v \in \mathbb{R}^n | dF_p(v) = 0\}.$$

Dimostrazione: Evidentemente se (i) o (ii) sono validi segue che T_pM è un sottospazio vettoriale di R^n di dimensione m. Cominciamo con il dimostrare (i) usando un'idea già sfruttata nella Teorema 2.2. Come al solito, a meno di riordinare le coordinate, possiamo supporre che se $G = (G^1, \dots, G^n)$ sono le componenti di G, allora

$$\det\left(\frac{\partial G^j}{\partial x^i}\right)_{\substack{j=1,\dots,m\\ i=1,\dots,m}} \neq 0.$$

Estendiamo $G\colon A \to \mathbb{R}^n$ a un'applicazione $\tilde{G}\colon A \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ ponendo

$$\tilde{G}(x', x^{m+1}, \dots, x^n) = G(x') + (0, \dots, 0, 0, x^{m+1}, \dots, x^n)$$

dove $(x', x^{m+1}, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^n)$. Allora dato che

$$J_{\tilde{G}}(x_0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G^1}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial G^1}{\partial x^m}(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G^m}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial G^m}{\partial x^m}(0) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial G^{m+1}}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial G^{m+1}}{\partial x^m}(x_0) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G^n}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial G^n}{\partial x^m}(x_0) & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

come in (2.3), abbiamo

$$\det J_{\tilde{G}}(x_0,0) = \det\left(\frac{\partial G^j}{\partial x^i}(x_0)\right)_{\substack{j=1,\dots,m\\ i=1,\dots,m}} \neq 0.$$

Dunque $d\tilde{G}_{(x_0,0)}$ è un isomorfismo e quindi, per il teorema dell'applicazione inversa, esiste un intorno aperto W di $(x_0,0)$ tale che $\tilde{G}: W \to \tilde{G}(W)$ è un diffeomorfismo. Dalla (4.1) segue inoltre che

$$d\tilde{G}_{(x_0,0)}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = dG_{x_0}(\mathbb{R}^m). \tag{4.2}$$

Sia ora $v \in T_pM$ e $\alpha: (-\varepsilon,\varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Ovviamente si può scegliere $\varepsilon > 0$ piccolo abbastanza in modo che $\alpha((-\varepsilon,\varepsilon)) \subset \tilde{G}(W)$. Sia $\beta: (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ definita da $\beta(t) = \tilde{G}^{-1}(\alpha(t))$. Si osservi che $\beta((-\varepsilon,\varepsilon)) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$ e che $\beta(0) = (x_0,0)$ e $w = \beta'(0) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} w = \beta'(0) &= \frac{d}{dt}\tilde{G}^{-1}(\alpha(t))_{|t=0} = d\tilde{G}^{-1}_{\alpha(t)}(\alpha'(t))_{|t=0} \\ &= d\tilde{G}^{-1}_p(\alpha'(0)) = d\tilde{G}^{-1}_p(v) \end{aligned}.$$

Pertanto $d\tilde{G}_{(x_0,0)}(w) = v$ e da (4.2) allora segue che $v \in d\tilde{G}_{(x_0,0)}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = dG_{x_0}(\mathbb{R}^m)$.

L'altra inclusione è una semplice verifica. Sia $v = dG_{x_0}(w) \in dG_{x_0}(\mathbb{R}^m)$ per qualche $w \in \mathbb{R}^m$ e sia $\gamma: (-\varepsilon,\varepsilon) \to A \subset \mathbb{R}^m$ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $w = \gamma'(0) \in \mathbb{R}^m$. Se $\alpha: (-\varepsilon,\varepsilon) \to G(A) \subset M$ definita da $\alpha(t) = \gamma(t)$. Allora si ha che $\alpha(0) = p$ e $v = dG_{x_0}(w) = dG_{x_0}(\gamma'(0)) = \alpha'(0) \in T_pM$ e quindi la (i) è completamente provata.

Dato che la (i) implica che $dim(T_pM) = m$, per dimostrare la (ii) è sufficiente provare che $T_pM \subset Ker\ dF_p$ visto che per la suriettività di dF_p si ha che $dim(Ker\ dF_p) = m$. Dunque sia $v \in T_pM$ e si scelga $\alpha: (-\varepsilon,\varepsilon) \to U \cap M \subset M$ con $\alpha(0) = p$ e $v = \alpha'(0)$. Allora si deve avere per ogni $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$

$$F(\alpha(t)) = 0$$

e quindi derivando rispetto a t:

$$dF_p(v) = dF_p(\alpha'(0)) = \frac{d}{dt}F(\alpha(t))_{|t=0} = 0$$

cosicché, come desiderato, si ha $v \in Ker\ dF_p$. □

Estendiamo ora a una applicazione differenziabile fra due sottovarietà differenziabili la nozione di differenziale. Sia allora $F: M \to N$ una applicazione differenziabile fra due sottovarietà differenziabili $M \subset \mathbb{R}^k$ e $N \subset \mathbb{R}^l$ di dimensione m e n rispettivamente. Dato $p \in M$ definiamo il *differenziale* $dF_p: T_pM \to T_{F(p)}N$ dell'applicazione F nel modo seguente. Se $v \in T_pM$ e $\alpha: (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ con $\alpha(0) = p$ e $v = \alpha'(0)$ allora poniamo

$$dF_p(v) = \frac{d}{dt}F \circ \alpha(t)_{|t=0}. \tag{4.3}$$

In altre parole il differenziale trasforma il vettore velocità al tempo 0 di una curva α su M nel vettore velocità al tempo 0 della curva $F \circ \alpha$ su N. Ovviamente, per applicazioni fra aperti di spazi euclidei, la (4.3) restituisce il differenziale consueto. Per sottovarietà occorre verificare che l'applicazione dF_p sia ben definita da (4.3), ossia non dipende dalla scelta di α, e che effettivamente sia un'applicazione lineare.

A tal fine abbiamo bisogno di qualche notazione. Siano $G: U \to M \subset \mathbb{R}^k$ e $H: V \to N \subset \mathbb{R}^l$ parametrizzazioni dove $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ sono aperti contenenti le origini di $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ rispettivamente e $G(0) = p$ e $H(0) = F(p)$. Se $\{e_1, \dots, e_m\}$ e $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ sono le basi canoniche di $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ rispettivamente, allora

$$\mathcal{B} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^1} = dG_0(e_1), \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} = dG_0(e_m)\right\},$$

$$\mathcal{B}' = \left\{\frac{\partial}{\partial y^1} = dH_0(\eta_1), \dots, \frac{\partial}{\partial y^m} = dH_0(\eta_n)\right\}$$

sono basi rispettivamente per T_pM e $T_{F(p)}N$.

Esercizio Se $x_1, \dots, x_m$ sono coordinate su $\mathbb{R}^m$ associate alla base $\{e_1, \dots, e_m\}$, allora per $j = 1, \dots, m$

$$dG_0(e_j) = \frac{\partial G}{\partial x^j}(0).$$

Abbiamo la seguente

Proposizione 4.2: *Il differenziale dF_p è ben definito da (4.3) ed è un'applicazione lineare. Inoltre, relativamente alle basi $\mathcal{B}$ di T_pM e $\mathcal{B}'$ di $T_{F(p)}N$, la matrice associata a dF_p è*

$$J = J_{H^{-1}\circ F\circ G}(0) = \left(\frac{\partial (H^{-1}\circ F\circ G)^j}{\partial x^i}(0)\right)_{\substack{j=1,\dots,n\\ i=1,\dots,m}}. \tag{4.4}$$

Dimostrazione: Sia

$$v = \sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM.$$

Sarà sufficiente dimostrare che per una qualunque scelta di curva $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\alpha(0) = p$ e $v = \alpha'(0)$ se $dF_p(v) = \frac{d}{dt}F\circ\alpha(t)_{|t=0} = w = \sum_{j=1}^{m} w^i \frac{\partial}{\partial y^j} \in T_{F(p)}N$, allora

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix}.$$

Ripetendo l'argomento già usato nella dimostrazione dell Proposizione 4.1, estendiamo $G\colon A \to \mathbb{R}^k$ a un'applicazione $\tilde{G}\colon U \times \mathbb{R}^{k-m} \to \mathbb{R}^k$ ponendo

$$\tilde{G}(x', x^{m+1}, \dots, x^k) = G(x') + (0, \dots, 0, 0, x^{m+1}, \dots, x^k)$$

e estendiamo $H\colon V \to \mathbb{R}^l$ a un'applicazione $\tilde{H}\colon U \times \mathbb{R}^{l-n} \to \mathbb{R}^l$ ponendo

$$\tilde{H}(y', y^{n+1}, \dots, y^l) = H(y') + (0, \dots, 0, 0, y^{n+1}, \dots, y^l).$$

Allora – sempre seguendo passo passo l'argomento della dimostrazione della Proposizione 4.1– per il teorema dell'applicazione inversa, le applicazioni $\tilde{G}$ e $\tilde{H}$ sono diffeomorfismi se ristretti a intorni aperti opportunamente piccoli dell'origine di $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^l$ rispettivamente. Allora, eventualmente restingendo opportunamente U e V, si può supporre che esistano aperti $W \subset \mathbb{R}^{k-m}$ e $Z \subset \mathbb{R}^{l-n}$ in modo che

$$\tilde{G}\colon U \times W \to \tilde{G}(U \times W) \subset \mathbb{R}^k$$

e

$$\tilde{H}\colon V \times Z \to \tilde{H}(V \times Z) \subset \mathbb{R}^l$$

siano diffeomorfismi con

$$\tilde{G}(x', 0), \dots, 0) = G(x') \text{ e } \tilde{H}(y', 0), \dots, 0) = H(y')$$

e, per come sono definiti, tali che

$$d\tilde{G}_{(0,0)}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = dG_0(\mathbb{R}^m) \text{ e } d\tilde{H}_{(0,0)}(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = dH_0(\mathbb{R}^n). \tag{4.5}$$

A meno di scegliere $\varepsilon > 0$ piccolo abbastanza, possiamo supporre che per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ si ha $\alpha(t) \in G(U)$ e $F(\alpha(t)) \in H(V)$. Definiamo allora

$$\tilde{\alpha} = G^{-1} \circ \alpha \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset R^m,$$

$$\beta = F \circ \alpha \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to N,$$

$$\tilde{\beta} = H^{-1} \circ \beta \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \subset R^n.$$

Identificando $U = U \times \{0\} \subset \mathbb{R}^k$ e $V = V \times \{0\} \subset \mathbb{R}^l$ si ha $\tilde{\alpha} = G^{-1} \circ \alpha = \tilde{G}^{-1} \circ \alpha$ e $\tilde{\beta} = G^{-1} \circ \beta = \tilde{H}^{-1} \circ \beta$. Allora, usando la regola della derivazione di funzioni composte e (4.5), si ottiene

$$\tilde{v} = \tilde{\alpha}'(0) = \sum_{i=1}^{m} v^i e_i$$

e

$$\tilde{w} = \tilde{\beta}'(0) = \sum_{j=1}^{n} w^i \eta_i.$$

Per costruzione, su $U = U \times \{0\} \subset \mathbb{R}^k$, si ha $\tilde{H}^{-1} \circ F \circ \tilde{G} = H^{-1} \circ F \circ G$ e J è la matrice di

$$d(H^{-1} \circ F \circ G)_0 = d(\tilde{H}^{-1} \circ F \circ \tilde{G})_{0|\mathbb{R}^m \times \{0\}}$$

relativa alle basi canoniche di $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Dunque, per concludere la dimostrazione, basta osservare che, ancora per la regola della derivazione di funzioni composte,

$$\tilde{w} = \tilde{\beta}'(0) = \frac{d}{dt} \tilde{H}^{-1} \circ F \circ \tilde{G} \circ \tilde{\alpha}(t)_{|t=0} = d(\tilde{H}^{-1} \circ F \circ \tilde{G})_0(\tilde{\alpha}'(0)) = d(H^{-1} \circ F \circ G)_0(\tilde{v}).$$

□

Esercizio Siano $M \subset \mathbb{R}^k$ e $M \subset \mathbb{R}^l$ sottovarietà differenziabili, $H \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ una applicazione differenziabile tale che $H(M) \subset N$ e $\tilde{H} \colon M \to N$ la sua restrizione. Sappiamo già che $\tilde{H}$ è differenziabile. Dimostrare che per ogni $x \in M$ si ha $d\tilde{H} = dH_{|T_x M}$.

Notazione. Siano $M \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà differenziabile di dimensione m e $G \colon U \to M \subset \mathbb{R}^n$ una parametrizzazione dove $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto di $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ rispettivamente e $G(x_0) = p$. Se $\{e_1, \ldots, e_m\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^m$ allora, com già osservato

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} = dG_{x_0}(e_1), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m} = dG_{x_0}(e_m) \right\}$$

è una base di $T_p M$. Per la base duale $\mathcal{B}^*$ di $\mathcal{B}$ si usa alle volte la seguente notazione: $\mathcal{B}^* = \left\{ dx^1, \ldots, dx^m \right\}$ dove naturalmente, per $i, j = 1, \ldots, m$ si ha

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_{ij}$$

dove $\delta_{i,j}$ è il δ di Kroneker. Dunque per $v \in T_p M$ si ha

$$v = \sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{m} dx^i(v) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Dalle definizioni di applicazioni differenziabili fra sottovarietà e dei loro differenziali, abbiamo immediatamente il seguente

Teorema 4.3: (Teorema dell'applicazione inversa per sottovarietà) *Sia $F: M \to N$ una applicazione differenziabile fra due sottovarietà differenziabili tale che per $x_0 \in M$ il differenziale dF_{x_0} sia un isomorfismo. Allora esistono intorni aperti $U \subset M$ di x_0 e $V \subset N$ di $F(x_0)$ tali che*

$$F = F_{|U}: U \to V$$

sia un diffeomorfismo.

Dimostrazione: Utilizzando parametrizzazioni di intorni aperti di x_0 e di $F(x_0)$ e il teorema dell'applicazione inversa su aperti euclidei il risultato è praticamente immediato. I dettagli sono lasciati al (sempre!) volenteroso lettore. $\square$

E' spesso utile interpretare i vettori tangenti come operatori differenziali estendendo in modo naturale la nozione di derivata direzionale. Si procede nel modo seguente. Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà differenziabile di dimensione m, $p \in M$ un punto, $v \in T_pM$ e f una funzione differenziabile su un aperto contenente p. Allora definiamo la *derivata di f rispetto a v* il numero

$$v(f) = df_p(v) = \frac{df(\alpha(t))}{dt}_{|t=0}$$

dove $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \to M$ è una curva differenziabile tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Per avere una espressione in coordinate locali della derivata di una funzione rispetto a un vettore tangente, si consideri una parametrizzazione $G: U \to M$ con $U \subset \mathbb{R}^m$ aperto e $p = G(x_0) \in G(U)$. Se $\{e_1, \ldots, e_m\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^m$, allora

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = dG_{x_0}(e_1), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m} = dG_{x_0}(e_m)\}$$

è una base per T_pM. Dunque se

$$v = \sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$$

si ha

$$v(f) = df_p(v) = \sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial (f \circ G)}{\partial x^i}(x_0).$$

Spesso, lavorando in coordinate locali, se il contesto non richiede maggiore precisione, si preferisce semplificare le notazioni – abusandone un po'! – e si scrive semplicemente $f \circ G(x_1, \ldots, x^n) = f(x_1, \ldots, x^n)$, e

$$v(f) = \sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

D'altra parte si osservi che, con le notazioni introdotte sopra per la base duale $\mathcal{B}^* = \left\{dx^1, \ldots, dx^m\right\}$ di $\mathcal{B} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^1} = dG_{x_0}(e_1), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m} = dG_{x_0}(e_m)\right\}$, possiamo scrivere, coerentemente con la definizione di differenziale:

$$v(f) = \sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i(v) = df(v).$$

Concludiamo il paragrafo con un cenno ai campi vettoriali su sottovarietà. Per le applicazioni di cui abbiamo bisogno è sufficiente dare la versione più elementare di questa nozione

Definizione. Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà differenziabile di dimensione m. Un *campo vettoriale* $\mathbf{V}$ su un aperto $A \subset M$ è un'applicazione $\mathbf{V}: A \to \mathbb{R}^n$; se $\mathbf{V}$ è differenziabile, si dice *campo vettoriale differenziabile*. Un campo vettoriale $\mathbf{V}$ su un aperto $A \subset M$ si dice *tangente* se per ogni $p \in A$ si ha $\mathbf{V}(p) \in T_pM$ e si dice *normale* se per ogni $p \in A$ si ha $\mathbf{V}(p) \perp T_pM$.

Ovviamente $\mathbf{V}: A \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale differenziabile se per ogni parametrizzazione $G: U \to A \subset M$ l'applicazione $\mathbf{V} \circ G$ è differenziabile.

A meno che non sia detto diversamente, considereremo solo campi vettoriali differenziabili

Analogamente a quanto fatto per funzioni, se $\mathbf{V}: A \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale, $p \in A$ un punto e $w \in T_pM$ un vettore tangente, si dice *derivata di* $\mathbf{V}$ *rispetto a* w il vettore

$$\nabla_w \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{V}(\alpha(t))}{dt}_{|t=0} = d\mathbf{V}_p(w).$$

Ripetendo per le componenti di $\mathbf{V}$ le considerazioni fatte sopra per la derivata di una funzione rispetto a un vettore tangente, se $\mathbf{V} = (V^1, \dots, V^n)$ allora possiamo facilmente ricavare espressioni in coordinate locali. Sia $G: U \to A \subset M$ una parametrizzazione e sia, come al solito, $\{\frac{\partial}{\partial x^1} = dG(e_1), \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} = dG(e_m)\}$ la base per $T_p(M)$ dove $p \in G(U)$. Allora in particolare

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \mathbf{V} = \left(\frac{\partial (V^1 \circ G)}{\partial x^j}, \dots, \frac{\partial (V^n \circ G)}{\partial x^j} \right) = \left(\frac{\partial V^1}{\partial x^j}, \dots, \frac{\partial V^n}{\partial x^j} \right) \tag{4.6}$$

dove, nell'ultima eguaglianza, si intende $V^i(x^1, \dots, x^n) = V^i \circ G(x^1, \dots, x^n)$. Sia ora $A \subset M$ un aperto, $\mathbf{V}: A \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale e $\mathbf{W}: A \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale tangente a M. si dice *derivata di* $\mathbf{V}$ *rispetto a* $\mathbf{W}$ il campo vettoriale su A definito per $p \in A$ da

$$\nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{V}(p) = \nabla_{\mathbf{W}(p)} \mathbf{V}. \tag{4.7}$$

Usando la parametrizzazione introdotta sopra e le conseguenti notazioni è facile verificare che la (4.7) definisce un campo vettoriale differenziabile. Infatti dato che $\mathbf{W}$ è un campo vettoriale differenziabile tangente a M, esistono funzioni differenziabili $w^1, \dots, w^m$ su $G(U)$ tali che, su $G(U)$,

$$\mathbf{W} = w^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + w^m \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Dunque, usando la (4.6) abbiamo

$$\nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{V} = w^1 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^1} + \dots + w^m \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^m}$$

da cui segue immediatamente che $\nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{V}$ è differenziabile su $G(U)$.

Concludiamo elencando alcune proprietà della derivata rispetto a un campo vettoriale che seguono immediatamente dalle definizione e dalle regole di derivazione ordinarie (Esercizio!):

$$\nabla_{\mathbf{W}}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{V}_1 + \nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{V}_2,$$

$$\nabla_{(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2)} \mathbf{V} = \nabla_{\mathbf{W}_1} \mathbf{V} + \nabla_{\mathbf{W}_2} \mathbf{V},$$

$$\nabla_{f\mathbf{W}}(\mathbf{V}) = f \nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{V},$$

$$\nabla_{\mathbf{W}}(f\mathbf{V}) = \mathbf{W}(f)\mathbf{V} + f \nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{V},$$

$$\nabla_{\mathbf{W}} < \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) >=< \nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 > + < \mathbf{V}_2, \nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{V}_2 >$$

dove $\mathbf{W}, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ sono campi vettoriali tangenti, $\mathbf{V}, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ campi vettoriali e f una funzione differenziabile.