SPAZI METRICI: COMPLETEZZA E COMPATTEZZA

Note informali dalle lezioni

1.1. Spazi metrici completi

La nozione di convergenza di successioni è centrale nello studio degli spazi metrici. In particolare è particolarmente utile una "proprietà di convergenza" che sia intrinseca alla successione piuttosto che dipendere dall'esistenza del limite. Abbiamo la seguente

DEFINIZIONE 1.1.1: Sia (X, d) uno spazio metrico. Una succesione $\{x_n\} \subset X$ si dice *successione di Cauchy* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un N tale che per ogni $m, n > N$ si ha $d(x_m, x_n) < \epsilon$

Come per successioni di numeri reali, vale in generale la seguente

PROPOSIZIONE 1.1.1: *Sia (X, d) uno spazio metrico. Una succesione $\{x_n\} \subset X$ convergente è una successione di Cauchy.*

Dimostrazione: Supponiamo che $\{x_n\}$ converga a x e sia $\epsilon > 0$ arbitrario. Esiste allora N tale che se $k > N$ allora $d(x_k, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Allora se $m, n > N$ si ha

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

e la tesi segue. □

DEFINIZIONE 1.1.2: Uno spazio metrico (X, d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy in X è convergente.

Il primo fondamentale esempio di spazio metrico completosi incontra nel corso di Analisi Matematica 1 dove di dimostra una successione in $\mathbb{R}$ ha limite se e solo se è una successione di Cauchy. La dimostrazione di questo fatto fondamentale si basa sulle proprietà che caratterizzano la retta $\mathbb{R}$: è un campo totalmente ordinato che soddisfa l'assioma di continuità di Dedekind ha per conseguenza che $\mathbb{R}$ ha la *proprietà dell'estremo superiore*, ossia vale il seguente fondamentale

TEOREMA 1.1.2: *Per ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente esiste minimo $l = \sup(A)$ per l'insieme dei maggioranti di A e questo minimo si dice estremo superiore di A. L'estremo superiore l è l'unico numero tale che $a \leq l$ per ogni $a \in A$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste $a \in A$ tale che $l - \epsilon < a \leq l$.*

Ovviamente si prova anche che, se $A \subset \mathbb{R}$ è limitato inferiormente, esiste il massimo $m = \inf(A)$ per l'insieme dei minoranti di A e questo massimo si dice *estremo inferiore* di

A. L'estremo inferiore m è l'unico numero tale che $a \geq l$ per ogni $a \in A$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste $a \in A$ tale che $m + \epsilon > a \geq l$.

Nel corso di Analisi Matematica, usando la proprietà dell'estremo superiore, si dimostra che ogni successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ è convergente. Vale dunque il seguente risultato del quale diamo una dimostrazione per compiutezza d'esposizione:

TEOREMA 1.1.3: $\mathbb{R}$, *con la usuale distanza euclidea, è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione: Se $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$, si definisca

$$S = \{y \in \mathbb{R} \,|x_n < y \text{ per un numero finito di } n\}.$$

Dunque se $y \in S$ allora l'intervallo $(-\infty, y]$ è tutto contenuto in S. Si osservi preliminarmente che S è non vuoto. Infatti dato che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy, fissato un qualunque $\epsilon > 0$, esiste un intero positivo N_ϵ tale che, se $n, m \geq N_\epsilon$, allora $|x_n - x_m| < \epsilon$ e quindi, in particolare per ogni $n \geq N_\epsilon$ i termini x_n della successione sono tutti nell'intervallo $(x_{N_\epsilon} - \epsilon, x_{N_\epsilon} + \epsilon)$. Dunque necessariamente $x_{N_\epsilon} - \epsilon \in S \neq \emptyset$. Inoltre S è limitato superiormente. Infatti se $y \in S$ deve essere allora $y \leq x_{N_\epsilon} + \epsilon$ altrimenti per ogni $n \geq N_\epsilon$ si avrebbe $x_n < x_{N_\epsilon} + \epsilon < y$ in contraddizione con la definizione di S. Sia allora b l'estremo superiore di S. Per il ragionamento fatto prima allora, dato che $x_{N_\epsilon} - \epsilon \in S$, si ha

$$x_{N_\epsilon} - \epsilon \leq b$$

e, dato che $x_{N_\epsilon} + \epsilon$ è un maggiorante per S,

$$x_{N_\epsilon} + \epsilon \geq b$$

cosicché possiamo concludere che

$$|x_{N_\epsilon} - b| \geq \epsilon.$$

Se $n \geq N_\epsilon$, possiamo concludere che

$$0 \leq |x_n - b| \leq |x_n - x_{N_\epsilon}| + |x_{N_\epsilon} - b| \geq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$, segue che $\{x_n\}$ converge a b. $\square$

Esempio I numeri razionali $\mathbb{Q}$ con la metrica euclidea non sono uno spazio metrico completo. Per dimostrarlo basta produrre esplicitamente una successione di Cauchy di numeri razionali che non converge a un numero razionale. Si definisca $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ in modo ricorsivo ponendo $x_0 = 2$ e

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right).$$

È ben noto che questa successione di numeri razionali converge a $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Ricordiamo qui rapidamente l'argomento che si usa. Si ha

$$x_n - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2x_{n-1}}\left(x_{n-1}^2 + 2 - 2x_{n-1}\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2x_{n-1}}\left(x_{n-1} - \sqrt{2}\right)^2 > 0.$$

E quindi $\frac{2}{x_n} < \sqrt{2}$ per ogni n. Allora

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right) < \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \sqrt{2}\right)$$

e di conseguenza

$$0 < x_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(x_{n-1} - \sqrt{2}\right) < \ldots < \frac{1}{2^n}\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

da cui segue che la successione $\{x_n\}$ è convergente a $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Esempio Siano $(X_1, d^1), \ldots, (X_n, d^n)$ una collezione finita di spazi metrici e siano d, d_1, d_∞ le distanze su $X = X_1 \times \ldots, X_n$ definite, per $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$, rispettivamente da

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(d^j(x_j, y_j)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad d_1(x,y) = \sum_{j=1}^{n} d^j(x_j, y_j), \quad d_\infty(x,y) = \max_{j=1,\ldots,n} d^j(x_j, y_j). \tag{1.1.1}$$

È immediato verificare per ogni $j = 1, \ldots, n$ la distanze definite in (1.1.1) verificano

$$d^j(x_j, y_j) \leq d(x,y) \quad d^j(x_j, y_j) \leq d_1(x,y) \quad d^j(x_j, y_j) \leq d_\infty(x,y). \tag{1.1.2}$$

Le distanze d, d_1 e d_∞ hanno la *proprietà del prodotto per le successioni* ossia una successione $\{x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ prodotto di spazi metrici $(X_1, d^1), \ldots,$ (X_n, d^n) converge a $x = (x_1, \ldots, x_n)$ rispetto a una qualunque delle distanze d, d_1 e d_∞ se e solo se per ogni $j = 1 \ldots, n$ la successione $\{x_j^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x_j in (X_j, d^j). Per brevità lo dimostriamo solo per la distanza d. Per le altre lasciamo il semplice esercizio al lettore. Dato che vale la (1.1.2) si ha

$$d_j(x_j^k, x_j) \leq d(x^k, x) \to 0$$

e quindi una implicazione è immediata. Supponiamo che le successioni delle componenti $\{x_j^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergano a x_j in X_j per ogni $j = 1 \ldots, n$. Allora le successioni numeriche $\{d_j(x_j^k, x_j)\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergono a 0 per ogni j. Se

$$\delta^k = \max_{j=1\ldots,n} d^j(x_j^k, x_j),$$

allora la successione $\{\delta^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Dunque

$$d(x^k, x) = \left(\left(d^1(x_1^k, x_1)\right)^2 + \ldots + \left(d^n(x_1^k, x_n)\right)^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{n}\delta^k \to 0$$

e la dimostrazione è completa.

Si vede subito che se $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ sono spazi metrici completi, (X, d) è uno spazio metrico completo. Infatti se $\{x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in X, allora per la (1.1.2), per ogni $j = 1, \ldots, n$ la successione $\{x_j^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in (X_j, d_j) e quindi convergente e, pertanto, anche $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è convergente in (X, d). Esattamente la stessa affermazione si può fare per (X, d_1) e (X, d_∞).

Come conseguenza abbiamo che $\mathbb{R}^n$, con la metrica euclidea, è uno spazio metrico completo. Inoltre $\mathbb{R}^n$ è completo anche con la distanza d_1 e con la distanza d_∞ definite per $x, y \in \mathbb{R}^n$ rispettivamente da

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \qquad \text{e} \qquad d_\infty(x,y) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|. \tag{1.1.3}$$

Esempio Sia X un insieme arbitrario, (Y, d_Y) uno spazio metrico e $B(X,Y)$ l'insieme delle applicazioni limitate da X in Y:

$$B(X,Y) = \{f\colon X \to Y | \ \exists m_f > 0 \text{ e } y_f \in Y \text{ tale che } d_Y(y_f, f(x)) < m_f \ \forall x \in X\}.$$

Analogamente a quanto fatto nell'Esempio 1.1.4 nel caso in cui $Y = \mathbb{R}^n$, si definisce una distanza d su $B(X,Y)$ ponendo

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) \tag{1.1.4}$$

per ogni $f, g \in B(X,Y)$. Sia (X,d) uno spazio metrico. Un sottospazio di $B(X,Y)$ particolarmente interessante è il sottospazio $C(X,Y)$ delle funzioni continue e limitate. Per definizione la metrica (1.1.4) si dice distanza della *convergenza uniforme* e una successione $\{f_n\} \subset B(X,Y)$ convergente a $f \in B(X,Y)$ si dice *uniformemente convergente* a f.

TEOREMA 1.1.4: *Sia (Y, d_Y) uno spazio metrico completo. Allora*
(i) $B(X,Y)$ è completo;
(ii) $C(X,Y)$ è completo e quindi, in particolare se una successione $\{f_n\colon X \to Y\}$ di funzioni continue e limitate converge uniformemente a $f\colon X \to Y$, allora f è continua.

Dimostrazione: Sia $\{f_n\} \subset B(X,Y)$ una successione di Cauchy. Dato che per ogni $x \in X$ si ha per la definizione (1.1.4) che

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n, f_m),$$

allora $\{f_n(x)\}$ è una successione di Cauchy in Y che quindi converge a un elemento $f(x)$ di Y. In questo modo, al variare di $x \in X$ si definisce un'applicazione $f\colon X \to Y$. Sia $\epsilon > 0$ fissato. Allora esiste N tale che se $m, n \geq N$ si ha

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n, f_m) < \epsilon$$

e quindi, passando al limite per $m \to \infty$ si ha

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon. \tag{1.1.5}$$

Se dunque $n > N$ allora

$$d_Y(y_{f_n}, f(x)) \leq d_Y(y_{f_n}, f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f(x)) < m_{f_n} + \epsilon$$

per tutti gli $x \in X$ e quindi $f \in B(X,Y)$. Inoltre, per l'arbitrarietà di ϵ, ancora da (1.1.5) segue immediatamente che $\{f_n\}$ converge uniformemente a f e quindi (i) è provata.

Se $\{f_n\} \subset C(X,Y)$ è una successione di Cauchy, per dimostrare (ii) basterà ora verificare che il limite uniforme f di $\{f_n\}$ è una applicazione continua. Sia $x_0 \in X$ un punto arbitrario e sia $\{x_n\} \subset X$ una successione convergente a x_0. Si ha

$$d_Y(f(x_n), f(x_0)) \leq d_Y(f(x_n), f_m(x_n)) + d_Y(f_m(x_n), f_m(x_0)) + d_Y(f_m(x_0), f(x_0)). \quad (1.1.6)$$

Sia allora $\epsilon > 0$. Dato che $\{f_n\}$ converge uniformemente a f e che f_n è continua per ogni n, esistono N_1, N_2 tali che se $m > N_1$ e $n > N_2$ si ha

$$d_Y(f(x_n), f_m(x_n)) < \frac{\epsilon}{3}, \quad d_Y(f_m(x_0), f(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{e} \quad d_Y(f_m(x_n), f_m(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Da (1.1.6) se $n > N_2$ concludiamo che $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$ e quindi, per l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$, che f è continua in x_0. □

Il precedente teorema illustra l'utilità della nozione di convergenza uniforme mettendo in luce come sia in grado di "trasmettere" al limite di una successioni di funzioni proprietà globali delle applicazioni che formano la successione quali ad esempio la continuità. Altri tipi di convergenza, per quanto naturali, non sono altrettanto efficienti come cercheremo di illustrare nel prossimo esempio.

Esempio Sia $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ e si consideri la successione $\{f_n\} \subset C(I,\mathbb{R})$ definita da $f_n(x) = x^n$. Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{se} \quad x \in [0,1) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1.$$

Se $g: I \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $g(x) = 0$, se $x \in [0,1)$ e $g(1) = 1$, allora $f_n(x)$ converge a $g(x)$ per ogni $x \in I$ e si dice che la successione f_n *converge puntualmente* a g. D'altra parte, mentre tutte le f_n sono continue su I, la funzione g non è continua in 1. Questo non è in cotraddizione con il precedente teorema dato che la successione f_n non converge uniformemente a g. Infatti

$$d(f_n, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - g(x)| = 1.$$

Esempio Sia $I = [-1,1] \subset \mathbb{R}$. Su $C(I,\mathbb{R})$ oltre alla distaza della convergenza uniforme (1.1.4) si possono altre distanze che spesso sono di grande importanza. Se $f, g \in C(I,\mathbb{R})$, la distanza L^1 fra f, g è definita da

$$d_1(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx. \quad (1.1.7)$$

E' un semplice esercizio dimostrare che (1.1.7) definisce una distanza su $C(I,\mathbb{R})$. D'altra parte con questa distanza $C(I,\mathbb{R})$ non è uno spazio metrico completo. Infatti si consideri ancora la successione $\{f_n\} \subset C(I,\mathbb{R})$ definita (vedi Figura 1) da

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-1,0], \\ \text{-nx+1} & \text{se } x \in [0,1/n], \\ 0 & \text{se } x \in [1/n,1]. \end{cases}$$

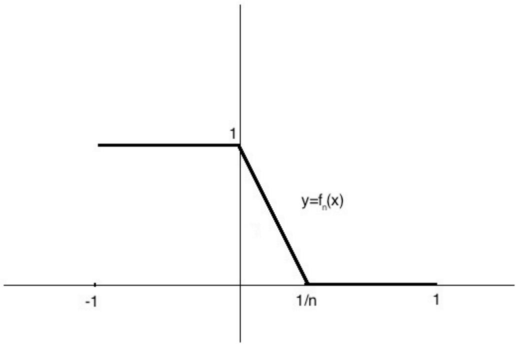

Figura 1

La successione $\{f_n\}$ è di Cauchy per la distanza L_1 dato che, per $m < n$, (vedi Figura 2)

$$d_1(f_n, f_m) = \text{ Area del triangolo } T_{n,m} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \to 0 \text{ per } n, m \to \infty.$$

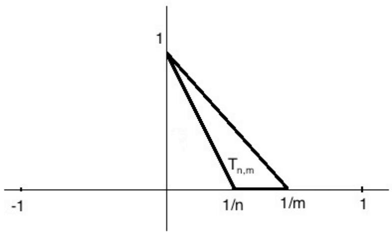

Figura 2

D'altra parte la successione $\{f_n\}$ ha per limite, rispetto alla distanza L_1 la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-1, 0], \\ 0 & \text{se } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Infatti (vedi Figura 3)

$$d_1(f_n, f) = \text{ Area del triangolo } T_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n} \to 0 \text{ per } n \to \infty.$$

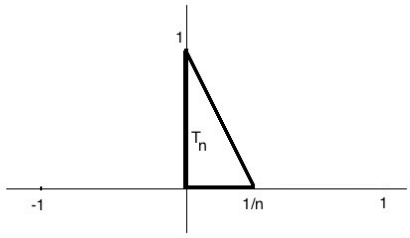

Figura 3

Dunque la successione f_n converge a rispetto alla distanza L^1 alla funzione $f \notin C(I, \mathbb{R})$ e pertanto $(C(I, \mathbb{R}), d_1)$ non è uno spazio completo.

È molto semplice caratterizzare i sottospazi completi di spazi metrici completi:

PROPOSIZIONE 1.1.5: *Sia (X, d) uno spazio metrico e si consideri $Y \subset X$ come sottospazio metrico di (X, d) con la distanza indotta.*

(i) Se (Y, d) è completo, allora Y è chiuso in X.
(ii) Se (X, d) è completo allora (Y, d) è completo se e solo se Y è chiuso in X.

Dimostrazione: (i) Sia (Y, d) completo e $\{y_n\} \subset Y$ una successione convergente a y. Allora $\{y_n\}$ è una successione di Cauchy in X e dunque in Y e quindi, per la completezza di (Y, d), si ha $y \in Y$.

(ii) Basta dimostrare che se Y è chiuso nello spazio metrico completo (X, d), allora (Y, d) è completo. Sia $\{y_n\} \subset Y$ una successione di Cauchy. Allora $\{y_n\}$ è una successione convergente a $y \in X$. Dato che Y è chiuso, $y \in Y$. $\square$

DEFINIZIONE 1.1.3: Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Una applicazione biettiva $f: X \to Y$ si dice *isometria* (X e Y si dicono isometrici in questo caso) se per ogni$x, z \in X$

$$d_Y(f(x), f(z)) = d_X(x, z).$$

E' immediato verificare che l'inversa di un'isometria è un'isometria e che la composizione di isometrie è un'isometria. Inoltre le isometrie sono omeomorfismi. Non è vero il viceversa. Ad esempio l'applicazione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$ è un omeomorfismo ma non è una isometria di $\mathbb{R}$ con la distanza euclidea. Abbiamo già osservato che ogni applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ è una applicazione continua e si vede facilmente che ogni affinità di $\mathbb{R}^n$ in sé è un omeomorfismo (Esercizio!). In effetti gli omeomorfismi di $\mathbb{R}^n$ in sé sono numerosissimi. Invece le isometrie di $\mathbb{R}^n$, considerato come spazio metrico con la distanza euclidea, in sé sono solo quelle che sono ovviamente indotte dalla struttura di spazio vettoriale metrico. Ricordiamo infatti il seguente risultato:

Teorema 1.1.6: *Si consideri su* $\mathbb{R}^n$ *la distanza euclidea* d *definita per* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *da* $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$. *Una applicazione* $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *è una isometria di* $(\mathbb{R}^n, d)$ *in sé se e solo se esiste una matrice ortogonale* A *e un vettore* $b \in \mathbb{R}^n$ *tale che per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$ *si abbia* $L(x) = Ax + b$.

Anche questo risultato dovrebbe essere stato visto in altri corsi. Diamo in Appendice 1 una dimostrazione per il lettore interessato.

Uno spazio metrico non completo può sempre essere immerso in modo isometrico in uno spazio metrico completo in modo "minimale". Cominciamo con una definizione.

Definizione 1.1.4: Sia X uno spazio metrico. Uno spazio metrico completo $\hat{X}$ si dice *completamento* di X se esiste un sottospazio $Y \subset \hat{X}$ denso in $\hat{X}$ tale che X sia isometrico a Y.

È sempre possibile costruire il completamento di uno spazio metrico e, a meno di isometrie, il completamento è unico. Questo fatto implica tra l'altro che, uno spazio metrico completo è isometrico al suo completamento. Vale il seguente:

Teorema 1.1.7: *Per ogni spazio metrico* (X, d) *esiste il completamento. Il completamento di uno spazio metrico è unico a meno di isometrie.*

A lezione si è data solo un'idea della dimostrazione. Il lettore interessato la trova nell'Appendice 2 a questo paragrafo. Per completezza nell'Appendice 3 si presenta un costruzione di $\mathbb{R}$ come completamento di di $\mathbb{Q}$.

Concludiamo il paragrafo con due risultati molto utili per le applicazioni. Il primo è una caratterizzazione della completezza dovuta a Cantor:

Teorema 1.1.8: (di Cantor) *Uno spazio metrico* (X, d) *è completo se e solo se per ogni successione di chiusi non vuoti* $\{F_n\}_{n\geq 0}$ *con* $F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$ *e* $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$ *esiste* $x \in X$ *tale che si abbia*

$$\bigcap_{n\geq 0} F_n = \{x\}.$$

Dimostrazione: Supponiamo che (X, d) sia uno spazio metrico completo. Se $\{F_n\}_{n\geq 0}$ è una successione di chiusi non vuoti con $F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$ e $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$, si scelga $x_n \in F_n$ per ogni $n \geq 0$. Dato che se $n, m \geq N$ si ha $x_m, x_n \in F_N$, allora

$$0 \leq \lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) \leq \lim_{N\to\infty} diam(F_N) = 0$$

e quindi la successione $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy. Dunque esiste

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X.$$

Dato che per ogni N se $n \geq N$ si ha $x_n \in F_n \subset F_N$ e F_N è chiuso, allora $x \in F_N$ per ogni N e quindi $x \in \bigcap_{N\geq 0} F_N$. Se infine $x' \in \bigcap_{n\geq 0} F_n$, allora per ogni n si ha $x, x' \in F_n$ e $0 \leq d(x, x') \leq diam(F_n) \to 0$ da cui segue che $d(x, x') = 0$.

Supponiamo viceversa che per ogni successione di chiusi non vuoti $\{F_n\}_{n\geq 0}$ con $F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$ e $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$ esista $x \in X$ tale che si abbia

$$\bigcap_{n\geq 0} F_n = \{x\}$$

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy. Per ogni n si definisca $F_n = \overline{\{x_k\}_{k\geq n}}$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste N tale che se $m, n > N$ si ha $d(x_m, x_n) < \epsilon$ e quindi se $n > N$ si ha $diam(F_n) = diam(\{x_k\}_{k\geq n}) < \epsilon$ e quindi $diam(F_n) \to 0$ per $n \to \infty$. Dato che per costruzione $F_n \supset F_{n+1}$ per ogni n, allora $\bigcap_{n\geq 0} F_n = \{x\}$ per qualche $x \in X$. Dato che $x \in F_n$ per ogni n allora $d(x, x_n) \leq diam(F_n) \to 0$. □

Molto spesso si incontrano problemi che si possono risolvere riducendosi alla ricerca di un punto fisso di un'applicazione di un insieme in sé ossia di soluzioni di equazioni del tipo $F(x) = x$. Dunque sono sempre benvenuti risultati che danno condizioni sull'estenza di punti fissi. Uno molto importante riguarda le contrazioni di uno spazio metrico completo.

Definizione 1.1.5: Sia (X, d) uno spazio metrico. Un'applicazione $F\colon X \to X$ si dice una *contrazione* se esiste una costante C con $0 < C < 1$ tale che $d(F(x), F(y)) < Cd(x, y)$ per ogni $x, y \in X$. La costante C si dice *costante di contrazione* di F.

Ovviamente una contrazione è un'applicazione continua. Useremo la seguente notazione: per un'applicazione $F\colon X \to X$ indicheremo con $F^m\colon X \to X$ l'applicazione definita dalla composizione $F^m = F \circ \ldots \circ F$ di F ripetuta m volte se $m > 0$ e porremo $F^0 = Id\colon X \to X$. Si ha il seguente:

Teorema 1.1.9: (Teorema delle contrazioni) *Sia $F\colon X \to X$ una contrazione di uno spazio metrico completo (X, d). Allora esiste un unico punto fisso per F ossia un unico $x_0 \in X$ tale che $F(x_0) = x_0$. Inoltre se C è la costante di contrazione di F e $x \in X$ è arbitrario, si ha la seguente stima*

$$d(F^m(x), x_0) \leq \frac{C^m}{1-C} d(F(x), x). \tag{1.1.8}$$

Dimostrazione: Dato che $d(F(x), F(y)) < Cd(x, y)$ per ogni $x, y \in X$, per qualunque $x \in X$ fissato abbiamo

$$d(F^{m+1}(x), F^m(x)) \leq Cd(F^m(x), F^{m-1}(x)) \leq \ldots \leq C^m d(F(x), x).$$

Di conseguenza, se $0 \leq m \leq m + k$, abbiamo

$$\begin{aligned} d(F^{m+k}(x), F^m(x)) &\leq d(F^{m+k}(x), F^{m+k-1}(x)) + \ldots + d(F^{m+1}(x), F^m(x)) \\ &\leq C^{m+k-1} d(F(x), x) + \ldots + C^m d(F(x), x) \\ &\leq C^m (C^{k-1} + \ldots + 1) d(F(x), x) \\ &\leq \frac{C^m}{1-C} d(F(x), x). \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

Da (1.1.9), dato che $0 < C < 1$, segue immediatamente che la successione $\{F^m(x)\}$ è di Cauchy e quindi, per la completezza di X ha limite x_0. Il limite x_0 è il punto fisso cercato:

$$d(F(x_0), x_0) = \lim_{n\to\infty} d(F(x_0), F^{m+1}(x)) \leq \lim_{n\to\infty} Cd(x_0, F^m(x)) = Cd(x_0, x_0) = 0.$$

L'unicità del punto fisso x_0 è immediata: se x_1 fosse un altro punto fisso di F allora

$$d(x_0, x_1) = d(F(x_0), F(x_1)) \leq Cd(x_0, x_1) < d(x_0, x_1)$$

e quindi necessariamente $d(x_0, x_1) = 0$. Si osservi che dato che per ogni $x \in X$ la successione $\{F^m(x)\}$ converge a un punto fisso di F e dato che la contrazione F ha un unico punto fisso x_0, allora per ogni $x \in X$ si ha $\{F^m(x)\} \to x_0$. Dunque osservando che per ogni $x \in X$ si ha $F^{m+k}(x) = F^k(F^m(x)) \to x_0$ per $k \to \infty$, la diseguaglianza (1.1.8) segue passando al limite per $k \to \infty$ nella (1.1.9). $\square$

ESERCIZI

1. Siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ due successioni convergenti in uno spazio metrico (X, d). Dimostrare che $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ hanno convergono allo stesso limite se e solo se la successione numerica $d(x_n, y_n)$ converge a 0.

2. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in un spazio metrico (X, d). Se esiste una sua sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a x_0, allora $\{x_n\}$ converge a x_0.

3. Dimostrare che l'intervallo $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$ ma non è completo.

4. Dimostrare che (1.1.4) definisce una distanza.

5. Dimostrare che se (X, d) è completo e $Y \subset X$ allora il competamento $\hat{Y}$ di Y con la distanza indotta è isometrico a $\overline{Y}$.

APPENDICE 1: Isometrie di $\mathbb{R}^n$

Ricordiamo che questo materiale, non presentato a lezione, è solo per il lettore interessato.

Come promesso diamo una dimostrazione del Teorema 1.1.6:

Dimostrazione del Teorema 1.1.6: Segue dalla teoria degli spazi vettoriali metrici reali che una affinità $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una isometria di $(\mathbb{R}^n, d)$ in sé se e solo se è definita da $L(x) = Ax + b$ per qualche matrice ortogonale A e vettore $b \in \mathbb{R}^n$. Dato che le traslazioni sono isometrie, per dimostrare l'enunciato basterà allora provare che una isometria $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di $(\mathbb{R}^n, d)$ in sé tale che $L(0) = 0$ è necessariamente una applicazione lineare.

Prima di tutto osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha $L(-x) = -L(x)$. Infatti, se $\| \bullet \|$ denota la norma euclidea, allora $d(0, y) = \|y\|$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ e quindi

$$\begin{aligned} \|L(x)\| &= d(0, L(x)) = d(L(0), L(x)) = d(0, x) = \|x\| = \|-x\| = d(0, -x) \\ &= d(L(0), L(-x)) = d(0, L(-x)) = \|L(-x)\| \end{aligned} ;$$

dunque sia $L(x)$ sia $L(-x)$ sono sulla sfera di centro 0 e raggio $\|x\|$. D'altra parte, dato che L è un'isometria

$$\|L(x) - L(-x)\| = \|x - (-x)\| = 2\|x\|$$

e perciò $L(x)$ e $L(-x)$ sono antipodali e quindi deve essere $L(-x) = -L(x)$. Se $< \bullet, \bullet >$ denota il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$, utilizzando l'identità valida per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$< x, y >= \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2),$$

si ottiene

$$\begin{aligned} < L(x), L(y) > &= \frac{1}{2}(\|L(x) + L(y)\|^2 - \|L(x)\|^2 - \|L(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|L(x) - L(-y)\|^2 - \|L(x)\|^2 - \|L(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x - (-y)\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x + y)\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) =< x, y > \end{aligned} .$$

In altre parole L conserva il prodotto scalare $< \bullet, \bullet >$ e quindi, in particolare, se $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale, allora anche $\{L(\mathbf{e}_1), \dots, L(\mathbf{e}_n)\}$ è una base ortonormale perchè un insieme di vettori di lunghezza 1 tali che $< L(\mathbf{e}_i), L(\mathbf{e}_j) >= 0$ se $i \neq j$. Per concludere che L è lineare basta controllare che per ogni $n-$upla si scalari $a_1, \dots, a_n$ si ha

$$L(a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n) = a_1 L(\mathbf{e}_1) + \ldots + a_n L(\mathbf{e}_n).$$

A tal fine si osservi che

$$\begin{aligned} L(a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n) &= \sum_{i=1}^{n} < L(\mathbf{e}_i), L(a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n) > L(\mathbf{e}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{e}_i, a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n > L(\mathbf{e}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i L(\mathbf{e}_i) \end{aligned}$$

e quindi la dimostrazione è completa $\square$

APPENDICE 2: Completamento di uno spazio metrico

Ricordiamo che questo materiale, non presentato a lezione, è solo per il lettore interessato.

Divideremo la dimostrazione del Teorema 1.1.7 in due parti: prima dimostriamo l'unicità, poi l'esistenza.

PROPOSIZIONE 1.1.10: *Il completamento di uno spazio metrico è unico a meno di isometrie.*

Dimostrazione: Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $(\hat{X}, \hat{d})$ e $(\tilde{X}, \tilde{d})$ due completamenti di X. Dunque esistono due sottoinsiemi densi $D \subset \hat{X}$ e $\Delta \subset \tilde{X}$ e isometrie $F: X \to D$ e $G: X \to \Delta$. Allora $H = G \circ F^{-1}: D \to \Delta$ è un'isometria. Sia $x \in \tilde{X}$ sia $\{x_n\} \subset D$ una successione convergente a x. Allora $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in $\hat{X}$ e, dato che H è un'isometria, anche $\{H(x_n)\}$ è una successione di Cauchy di $\tilde{X}$. Dunque $\{H(x_n)\}$ è una successione convergente di $\tilde{X}$. Se $\{y_n\} \subset D$ è un'altra successione convergente a x allora $\hat{d}(x_n, y_n) \to 0$ (Esercizio!) e quindi, ancora perchè H è un'isometria, $\tilde{d}(H(x_n), H(y_n)) \to 0$ e quindi $\{H(x_n)\}$ e $\{H(y_n)\}$ hanno lo stesso limite che pertanto dipende solo da x e non dalla successione che ha per limite x scelta. Pertanto è ben definita una applicazione $L: \hat{X} \to \tilde{X}$ ponendo $L_{|D} = H$ e per $x \in \hat{X} \setminus D$ definendo $L(x) = \lim_{n\to\infty} H(x_n)$ per una qualunque successione $\{x_n\} \subset D$ convergente a x.

Occorre dimostrare che L è un'isometria. Intanto si osservi che per $x, y \in \hat{X}$ si ha $\tilde{d}(L(x), L(y))$. In ogni caso si possono trovare successioni $\{x_n\}, \{y_n\} \subset D$ tali che $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Si ha (si ricordi che $\tilde{d}$ è continua su $\hat{X} \times \hat{X}$!)

$$\tilde{d}(L(x), L(y)) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}(L(x_n), L(y_n)) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}(H(x_n), H(y_n)) = \lim_{n\to\infty} \hat{d}(x_n, y_n) = \hat{d}(x, y). \tag{1.1.10}$$

Da (1.1.10) è immediato verificare che L è iniettiva. Infatti se $L(x) = L(y)$, allora $0 = \tilde{d}(L(x), L(y)) = \hat{d}(x, y)$ e quindi $x = y$.

Rimane da dimostrare che L è surietiva. Sia $\chi \in \tilde{X}$ e $\{\chi_n\} \subset \Delta$ tale che $\chi_n \to \chi$. Dato che $H = G \circ F^{-1}: D \to \Delta$ è un'isometria, e quindi una applicazione suriettiva, per ogni n esiste $x_n \in D$ con $H(x_n) = \chi_n$. Dato che $\{\chi_n\}$ è una successione convergente, è di Cauchy e quindi $\{x_n\} = \{H^{-1}(\chi_n)\}$ è di Cauchy in $\hat{X}$ e perciò convergente a qualche $x \in \hat{X}$. Per costruzione $L(x) = \chi$. $\square$

Dimostriamo ora l'esistenza del completamento:

TEOREMA 1.1.11: *Per ogni spazio metrico (X, d) esiste il completamento.*

Dimostrazione: La dimostrazione consiste nel rendere rigorosa l'idea di “aggiungere” a X i limiti delle successioni di Cauchy di X che non convergono e di estendere opportunamente la distanza d all'insieme ottenuto in tal modo.

Sia S l'insieme delle successioni di Cauchy di X. Definiamo una relazione $\equiv$ su S ponendo per $\{x_n\}, \{y_n\} \in S$

$$\{x_n\} \equiv \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

E' immediato verificare che $\equiv$ è una relazione d'equivalenza. Sia $\hat{X} = S_{/\equiv}$. Definiamo ora una distanza su $\hat{X}$ ponendo

$$\hat{d}([\{x_n\}],[\{y_n\}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \tag{1.1.11}$$

dove $[\{x_n\}],[\{y_n\}]$ sono le classi d'equivalenza relativa a $\equiv$ individuate da successioni di Cauchy $\{x_n\},\{y_n\} \in S$. Occorre preliminarmente dimostrare che (1.1.11) definisce effettivamente una distanza su $\hat{X}$.

Per cominciare si osservi che per $\{x_n\},\{y_n\} \in S$ il limite in (1.1.11) esiste finito in ogni caso. Infatti

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_n, y_m)$$

e quindi

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

Scambiando i ruoli di n e m si ha anche

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$$

e quindi

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

Dato che $\{x_n\},\{y_n\} \in S$, da quest'ultima diseguaglianza segue immediatamente che $d(x_n, y_n)$ è una successione di Cauchy di numeri reali e quindi è una successione convergente a qualche numero reale.

Si osservi che in questo punto della dimostrazione si usa la completezza di $\mathbb{R}$!

Ora occorre dimostrare che il limite in (1.1.11) è indipendente dalla scelta dei rappresentanti delle classi d'equivalenza $[\{x_n\}],[\{y_n\}]$. Supponiamo allora che $\{x_n\} \equiv \{x'_n\}$ e che $\{y_n\} \equiv \{y'_n\}$. Allora

$$d(x'_n, y'_n) \leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n).$$

Dato che $d(x'_n, x_n) \to 0$ e $d(y'_n, y_n) \to 0$, si conclude che

$$\lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

La verifica che $\hat{d}$ è una distanza è semplice. Infatti, dalla definizione (1.1.11) è immediato osservare che $\hat{d} \geq 0$. Se

$$\hat{d}([\{x_n\}],[\{y_n\}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

per successioni di Cauchy $\{x_n\},\{y_n\} \in S$, allora $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ hanno lo stesso limite e quindi $[\{x_n\}] = [\{y_n\}]$. Per quanto riguarda la proprietà simmetrica, si ha

$$\hat{d}([\{x_n\}],[\{y_n\}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \hat{d}([\{y_n\}],[\{x_n\}]).$$

Infine per provare la diseguaglianza triangolare si osservi che la funzione $T\colon X \times X \times X \to \mathbb{R}$ definita per $x, y, z \in X$ da

$$T(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) - d(x, z)$$

è continua e non negativa. Allora

$$\begin{aligned}
\hat{d}([\{x_n\}],[\{y_n\}]) + \hat{d}([\{y_n\}],[\{z_n\}]) - \hat{d}([\{x_n\}],[\{z_n\}]) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n,z_n) - \lim_{n\to\infty} d(x_n,z_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} T(x_n,y_n,z_n) \geq 0.
\end{aligned}$$

Prima di dimostrare la completezza di $(\hat{X},\hat{d})$, facciamo vedere che (X,d) è isometrico a un sottoinsieme denso di $(\hat{X},\hat{d})$. Per ogni $x \in X$ sia $x^* = \{x,\dots,x,\dots\} \subset X$ la successione costante determinata da x. Evidentemente x^* è una successione di Cauchy; sia $\hat{x} = [x^*] \in \hat{X}$ la sua classe d'equivalenza. Sia $D \subset \hat{X}$ L'immagine dell'applicazione $F\colon X \to \hat{X}$ definita da $F(x) = \hat{x}$. E' immediato verificare che $F\colon X \to D$ è un'isometria se si considera su D la distanza $\hat{d}$ (Esercizio!). D'altra parte D è denso in $\hat{X}$. Infatti sia $[\{x_n\}] \in \hat{X}$. La successione $\{\hat{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset D$ converge in $(\hat{X},\hat{d})$ a $[\{x_n\}]$. Infatti, si osservi che $\hat{x}_k = [x_k^*]$ e

$$\hat{d}([\{x_n\}],[x_k^*]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,x_k).$$

Dato che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy, per ogni $\epsilon > 0$ esiste N in modo che se $n,k > N$ si ha $d(x_n,x_k) < \epsilon/2$ e quindi

$$\hat{d}([\{x_n\}],[x_k^*]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,x_k) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Da questa diseguaglianza, data l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$ segue che $\{\hat{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \to [\{x_n\}]$.

Rimane da dimostrare $(\hat{X},\hat{d})$ è completo. Sia $\{\hat{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $(\hat{X},\hat{d})$. Dato che D è denso in $\hat{X}$, per ogni k esiste $x_k \in X$ tale che $[x_k^*] = F(x_k) \in D$ e

$$\hat{d}(\{\hat{x}_k\},F(x_k)) < \frac{1}{k}.$$

La successione $\{x_k\} \subset X$ costruita in questo modo è di Cauchy. Infatti

$$\begin{aligned}
d(x_k,x_l) &= \hat{d}(F(x_k),F(x_l)) \leq \hat{d}(F(x_k),\{\hat{x}_k\}) + \hat{d}(\{\hat{x}_k\},\{\hat{x}_l\})\hat{d}(\{\hat{x}_l\},F(x_l)\}) \\
&\leq \frac{1}{k} + \hat{d}(\{\hat{x}_k\},\{\hat{x}_l\}) + \frac{1}{l}
\end{aligned}.$$

Da questa diseguaglianza, dato che $\{\hat{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy, segue immediatamente che anche $\{x_k\}$ è di Cauchy in X. Concludiamo la dimostrazione dimostrando che $\{\hat{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $[\{x_k\}]$, la classe d'equivalenza rispetto a $\equiv$ determinata da $\{x_k\} \in S$. A tal fine si osservi che

$$\begin{aligned}
\hat{d}([\{x_k\}],\{\hat{x}_l\}) &\leq \hat{d}([\{x_k\}],F(x_l)) + \hat{d}(F(x_l),\{\hat{x}_l\}) \\
&< \hat{d}([\{x_k\}],F(x_l)) + \frac{1}{l} = \lim_{k\to\infty} d(x_k,x_l) + \frac{1}{l}.
\end{aligned}$$

Dato che $\{x_k\}$ è una successione di Cauchy, allora

$$\lim_{l\to\infty} \hat{d}([\{x_k\}],\{\hat{x}_l\}) = \lim_{l\to\infty,k\to\infty} d(x_k,x_l) + \frac{1}{l} = 0$$

e quindi la tesi è dimostrata. $\square$

APPENDICE 3: $\mathbb{R}$ come completamento di $\mathbb{Q}$.

Molte delle considerazioni fatte per costruire il completamento di uno spazio metrico arbitrario (X, d) permettono di costruire un modello esplicito per $\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{Q}$. Occorrono alcune variazioni dovute al fatto che nella costruzione del completamento si è usata la completezza di $\mathbb{R}$ che ovviamente non può essere usata per "costruire" $\mathbb{R}$!

Ricordiamo che l'insieme dei numeri reali si può caratterizzare nel modo seguente. Prima di tutto, dal punto di vista algebrico, $\mathbb{R}$, con le usuali operazioni di somma $+$ e di prodotto $\bullet$, è un campo. Inoltre su $\mathbb{R}$ è definita una relazione d'ordine totale $\leq$, ossia tale che vale la dicotomia

$$x \leq y \;\; o \;\; x \leq y \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.1.12}$$

la proprietà transitiva

$$x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z, \tag{1.1.13}$$

la proprietà antisimmetrica

$$x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y, \tag{1.1.14}$$

la proprietà riflessiva

$$x \leq x \;\; \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.1.15}$$

compatibile con la struttura di campo ossia tale che

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \;\; \forall z \in \mathbb{R}, \tag{1.1.16}$$

$$0 \leq x, 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \bullet y. \tag{1.1.17}$$

Dunque $\mathbb{R}$ ha una struttura di *campo totalmente ordinato*. Ovviamente anche l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è un campo totalmente ordinato. Ciò che distingue e caratterizza $\mathbb{R}$ è che ha una ulteriore proprietà di continuià. Una *sezione di Dedekind* di $\mathbb{R}$ è una coppia (A, B) di sottoinsiemi tali che

$$A \cup B = \mathbb{R} \;\text{ e }\; A \cap B = \emptyset,$$

$$a < b \quad \forall a \in A, b \in B$$

dove naturalmente $a < b$ equivale a $a \leq b$ e $a \neq b$.

L'insieme $\mathbb{R}$ soddisfa l'*assioma di continuità di Dedekind*: per ogni sezione di Dedekind (A, B) di $\mathbb{R}$ esiste un unico numero reale x, detto *elemento separatore* di (A, B), tale che

$$a \leq x \leq b \quad \forall a \in A, b \in B.$$

L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma di Dedekind, anzi è molto lontano dal possedere una tale proprietà di continuità: un gran numero di sezioni di Dedekind (A, B) di $\mathbb{Q}$ (si definiscono come per $\mathbb{R}$) non ammette elemento separatore in $\mathbb{Q}$. Ad esempio siano

$$A = \{p \in \mathbb{Q} | p \leq 0\} \cup \{p \in \mathbb{Q} | p^2 < 2\}$$

e

$$B = \{q \in \mathbb{Q} | p > 0, p^2 > 2\}.$$

E' facile verificare che (A, B) è una sezione di Dedekind di $\mathbb{Q}$ (Attenzione: serve ricordare che non esiste un numero razionale h tale che $h^2 = 2$!) Supponiamo che esista un numero razionale h tale che

$$a \leq h \leq b \quad \forall a \in A, b \in B. \tag{1.1.18}$$

Allora dato che $A \cup B = \mathbb{Q}$ e $A \cap B = \emptyset$, deve accadere che o $h \in A$ oppure che $h \in B$ (e le due possibilità sono mutualmente esclusive. Supponiamo che $h \in A$. Dato che $1 \in A$, allora $h > 0$ e quindi deve essere $h^2 < 2$. Sia N un intero positivo tale che

$$N > \frac{2h+1}{2-h^2}.$$

Allora

$$(h + \frac{1}{N})^2 = h^2 + \frac{2h}{N} + \frac{1}{N^2} < h^2 + \frac{2h+1}{N} < h^2 + 2 - h^2 = 2$$

e quindi $h < h + \frac{1}{N} \in A$ contro (1.1.18). Se invece si assume che $h \in B$, allora $h^2 > 2$. Si consideri in questo caso il numero razionale

$$r = \frac{h}{2} + \frac{1}{h} = h - \frac{h^2-2}{2h}.$$

Allora $0 < r < h$, ma

$$r^2 = h^2 - (h^2 - 2) + \left(\frac{h^2-2}{2h}\right)^2 > h^2 - (h^2 - 2) > 2$$

contro (1.1.18).

Qui di seguito diamo conto brevemente di come si procede alla costruzione di $\mathbb{R}$ utilizzando successioni di Cauchy. L'idea risale a Cantor e indipendentemente a Méray che la pubblicano in lavori del 1872.

Se indichiamo con S l'insieme delle successioni di Cauchy di $\mathbb{Q}$ rispetto all'usuale distanza, consideriamo su S la relazione d'equivalenza $\equiv$ definita per $\{x_n\}, \{y_n\} \in S$ da $\{x_n\} \equiv \{y_n\}$ se e solo se

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Come insieme definiamo $\mathbb{R} = S_{/\equiv}$. Evidentemente si può considerare $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ identificando ogni numero razionale con la successione costante da lui determinata. Occorre ora dimostrare che è possibile strutturare questo modello in modo che sia un campo totalmente ordinato che soddisfi l'assioma di continuità di Dedekind. Per cominciare definiamo le operazioni di somma $+$ e di moltiplicazione $\bullet$. Se $x = [\{x_n\}], y = [\{y_n\}] \in \mathbb{R}$, porremo

$$x + y = [\{x_n + y_n\}] \ \text{ e } \ x \bullet y = [\{x_n y_n\}]. \tag{1.1.19}$$

Non è difficile dimostrare che le operazioni sono ben definite da (1.1.19) e che $(\mathbb{R}, +, \bullet)$ è un campo. In particolare gli elementi neutri 0 e 1 rispettivamente di $+$ e $\bullet$ sono dati dalle successioni costanti $\{x_n = 0\}$ e $\{y_n = 1\}$. Inoltre se $x = [\{x_n\}]$, il suo opposto sarà $-x = [\{-x_n\}]$. Se $x = [\{x_n\}] \neq 0$ allora la successione $\{x_n\}$ non sarà convergente a 0. Dunque esiste $\epsilon > 0$ tale che per qualche sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ si ha $|x_{n_k}| \geq \epsilon > 0$. Dato che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy, anche $\{x_{n_k}\}$ lo è e inoltre $\{x_{n_k}\} \equiv \{x_n\}$. Ma allora, se $x = [\{x_n\}] \neq 0$, si può sceglierеun rappresentante $\{x_n\}$ per x tale che per qualche $\epsilon > 0$ si abbia $|x_n| \geq \epsilon > 0$ per ogni n. Se $\{x_n\}$ è un tale rappresentante per $0 \neq x \in \mathbb{R}$, allora il reciproco di x è definito da $x^{-1} = [\{(x_n)^{-1}\}]$. Si osservi che $\{(x_n)^{-1}\}$ è una successione di Cauchy dato che $\{x_n\}$ è di Cauchy e

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m} \right| = \frac{|x_m - x_n|}{|x_m x_n|} \leq \frac{|x_m - x_n|}{\epsilon^2}.$$

Per quanto riguarda la relazione d'ordine totale, si estende a $\mathbb{R}$ quella definita su $\mathbb{Q}$ ponendo per $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \leq y \iff \text{ se esiste } N \text{ tale che } x_n \leq y_n \text{ per ogni } n > N \qquad (1.1.20)$$

per qualche $\{x_n\}, \{y_n\} \in S$ con $x = [\{x_n\}]$ e $y = [\{y_n\}]$. La (1.1.20) definisce effettivamente una relazione d'ordine totale su $\mathbb{R}$.

Siano $x = [\{x_n\}], y = [\{y_n\}] \in \mathbb{R}$; allora la successione $\{|x_n - y_n|\}$ è di Cauchy dato che

$$\big||x_n - y_n| - |x_m - y_m|\big| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m|.$$

Sono di Cauchy anche le successioni definite da

$$a_n = |x_n - y_n| - (x_n - y_n) \text{ e } b_n = |x_n - y_n| + (x_n - y_n).$$

Evidentemente, per ogni n, o a_n o b_n (o entrambi) sono uguali a zero e pertanto almeno una delle due successioni avrà infiniti termini nulli. Supponiamo che questo accada per $\{a_n\}$. Allora, dato che $\{a_n\}$ è di Cauchy, la successione $\{a_n\}$ converge a 0. Pertanto si ha

$$\{|x_n - y_n|\} \equiv \{x_n - y_n\}$$

e quindi per n grande abbastanza deve essere $y_n \leq x_n$ e dunque $y \leq x$. Nel caso invece che sia $\{b_n\}$ ad avere infiniti termini nulli, si conclude allo stesso modo che $x \leq y$. Pertanto $\leq$ verifica (1.1.12).

La proprietà transitiva (1.1.13) e quella riflessiva (1.1.15) per $\leq$ sono immediate dalla definizione. Per quanto riguarda la proprietà antisimmetrica (1.1.14) si procede in questo modo. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x \leq y$ e $y \leq x$. Per definizione esistono successioni $\{x_n\}, \{x'_n\}, \{y_n\}, \{y'_n\}$ con $x = [\{x_n\}] = [\{x'_n\}], y = [\{y_n\}] = [\{y'_n\}]$ e, per n grande abbastanza,

$$x_n \leq y_n \text{ e } y'_n \leq x'_n.$$

Dunque

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}(x'_n - y'_n) \leq \lim_{n\to\infty}(x'_n - y'_n + y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty}(x'_n - x_n) + \lim_{n\to\infty}(-y'_n + y_n) = 0$$

e quindi $\{x'_n\} \equiv \{y'_n\}$ ossia $x = y$.

Le proprietà di compatibilità (1.1.16) e (1.1.17) fra l'ordinamento $\leq$ e la struttura di campo di $\mathbb{R}$ sono anch'esse immediate dalle definizioni.

L'ultima proprietà da verificare per il modello di $\mathbb{R}$ costruito è l'assioma di continuità di Dedekind. A tal fine si consideri una sezione di Dedekind (A, B) per $\mathbb{R}$ ossia una coppia (A, B) di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ tali che

$$A \cup B = \mathbb{R} \text{ e } A \cap B = \emptyset,$$

$$a < b \quad \forall a \in A, b \in B$$

dove $a < b$ equivale a $a \leq b$ e $a \neq b$. Si scelgano $a \in A, b \in B$. Si osservi che $a < b$ e che si possono scegliere $a, b \in \mathbb{Q}$. Si consideri l'intervallo $[a, b]$. Il suo punto medio $(a + b)/2$ appartiene a uno e uno solo degli insiemi A, B. Se $(a + b)/2 \in A$, allora $[(a + b)/2, b]$ contiene punti sia in A sia in B mentre $[a, (a + b)/2] \subset A$. Se invece $(a + b)/2 \in B$, sarà l'intervallo $[a, (a + b)/2]$ a contenere punti sia di A sia di B mentre $[(a + b)/2, b] \subset B$. In ogni caso uno e uno solo dei due segmenti ottenuti tagliando $[a, b]$ con il suo punto medio $(a + b)/2$ ha il primo estremo in A, il secondo estremo in B. Sia $[a_1, b_1]$ il segmento determinato in questo modo. Iterando la procedura si ottiene una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ tali che

$$a_n \in A, \qquad b_n \in B, \qquad [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \ldots \subset [a_1, b_1], \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Allora segue immediatamente che le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono successioni di Cauchy di numeri razionali dato che per ogni intero positivo k, se $m, n > k$ si ha

$$|a_n - a_m| < \frac{b-a}{2^k} \qquad |b_n - b_m| < \frac{b-a}{2^k}.$$

Dunque $\{a_n\}, \{b_n\} \in S$ e, inoltre $\{a_n\} \equiv \{b_n\}$. L'elemento $L = [\{a_n\}] = [\{b_n\}]$ è l'elemento separatore di (A, B). Sia infatti $\alpha \in A$. Allora $\alpha < b_n$ per ogni n. Dunque $\alpha \leq L$. Allo stesso modo si vede che se $\beta \in B$ segue che $\beta \geq L$ e quindi la tesi.

1.2. Spazi metrici compatti

In questo paragrafo discuteremo la nozione di compattezza per spazi metrici. Contrariamente alla completezza che si conserva per isometrie ma non per di omeomorfismi, la compattezza è invariante per omeomorfismi e quindi dipende solo dalla famiglia di aperti di uno spazio metrico.

Cominciamo osservando che è immediato verificare che la compattezza è una proprietà "più forte" della completezza:

Proposizione 1.2.1: *Sia (X, d) uno spazio metrico compatto allora (X, d) è completo.*

Dimostrazione: Dato che ogni spazio metrico soddifa il primo assioma di numerabilità, ossia ogni punto ha una base numerabile di intorni, allora X è compatto per successioni. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in X. Allora esisterà una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ convergente a qualche $x_0 \in X$. Dato che

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0)$$

segue immediatamente che $\{x_n\}$ converge a x_0. $\square$

La seguente immediata osservazione ci sarà utile:

Proposizione 1.2.2: *Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subset X$. Il punto $y \in X$ è punto d'accumulazione di Y se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ la palla $\mathbb{B}(y, \epsilon)$ contiene infiniti punti di Y.*

Dimostrazione: Se ogni palla $\mathbb{B}(y, \epsilon)$ contiene infiniti punti di Y, allora sicuramente intersecherà Y in qualche punto diverso da y. Dunque y è punto d'accumulazione per Y.

Viceversa, supponiamo che y è punto d'accumulazione di Y tale che per qualche $\epsilon > 0$ la palla $(\mathbb{B}(y, \epsilon)$ contenga solo un numero finito di punti di Y. Precisamente:

$$(\mathbb{B}(y, \epsilon) \setminus \{y\}) \cap Y = \{y_1, \ldots, y_N\}.$$

Sia $\delta = \min\{d(y, y_1), \ldots, d(d, y_N)\}$. Allora

$$(\mathbb{B}(y, \delta) \setminus \{y\}) \cap Y = \emptyset$$

contro l'ipotesi che y sia punto di accumulazione di Y. $\square$

Il risultato principale di questo paragrafo è dimostrare che per uno spazio metrico, compattezza e compattezza per successioni sono nozioni equivalenti. Per dimostrare questo fatto proveremo che ambedue le nozioni sono equivalenti a proprietà completamente esprimibili in termini della distanza. A tal fine abbiamo bisogno di una ulteriore definizione. Chiameremo *diametro* di un sottoinsieme Y di uno spazio metrico (X, d) il numero

$$diam(Y) = \sup\{d(x, y) | x, y \in Y\}.$$

Definizione 1.2.1: Uno spazio metrico (X, d) si dice *totalmente limitato* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito $\{Y_1, \ldots, Y_N\}$ di X tale che per ogni $j = 1, \ldots, N$ si abbia $diam(Y_j) < \epsilon$.

Lemma 1.2.3: *Uno spazio metrico (X, d) è totalmente limitato se e solo se per ogni ϵ esistono un numero finito di palle di raggio $\epsilon > 0$ che ricoprono X*

Dimostrazione: La dimostrazione è un semplice esercizio basato sul fatto che una palla di raggio ϵ ha diametro $\leq 2\epsilon$ e che un insieme di diametro ϵ è sempre contenuto in una palla di raggio ϵ. $\square$

Teorema 1.2.4: *Sia (X, d) uno spazio metrico. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) X è compatto per successioni.
(ii) X è completo e totalmente limitato.
(iii) X è compatto.

Dimostrazione:
$(i) \Rightarrow (ii)$. Se vale (i) allora per la Proposizione 1.2.1 X è completo. Supponiamo che X non sia totalmente limitato. Allora, per qualche $R > 0$, qualunque famiglia finita di palle di raggio R non è un ricoprimento di X. Se $x_1 \in X$, allora $X \neq \mathbb{B}(x_1, R)$ e quindi esiste $x_2 \in X \setminus \mathbb{B}(x_1, R)$. Dato che $X \neq \mathbb{B}(x_1, R) \cup \mathbb{B}(x_2, R)$, allora esiste $x_3 \in X \setminus (\mathbb{B}(x_1, R) \cup \mathbb{B}(x_2, R))$. Iterando il ragionamento per ogni intero positivo n si trova x_n tale che

$$x_n \in X \setminus (\mathbb{B}(x_1, R) \cup \ldots \cup \mathbb{B}(x_{n-1}, R)).$$

Dunque la successione $\{x_n\}$ è tale che se $i \neq j$ si ha necessariamente $d(x_i, x_j) \geq R$ e quindi $\{x_n\}$ non può avere una sottosuccessione convergente in contraddizione con l'ipotesi che X sia compatto per successioni.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Supponiamo che $\mathcal{U}$ sia un ricoprimento aperto di X che non ammette sottoricoprimenti finiti. Dato che X è totalmente limitato, esiste un suo ricoprimento finito $\{C^1_1, \ldots, C^1_{n_1}\}$ costituito di sottoinsiemi tali che $diam(C^1_j) < 1$ per ogni $j = 1, \ldots, n_1$. Se tutti i C^1_j fossero contenuti nell'unione di un numero finito di aperti di $\mathcal{U}$, allora $\mathcal{U}$ ammetterebbe sottoricoprimento finito di X. Dunque per almeno un indice j l'insieme $X_1 = C^1_j$ non è contenuto nell'unione di un numero finito di elementi di $\mathcal{U}$.

Allora X_1 è totalmente limitato e $diam(X_1) < 1$. Sia $\{C^2_1, \ldots, C^2_{n_2}\}$ un suo ricoprimento finito costituito di sottoinsiemi tali che $diam(C^2_j) < 1/2$ per ogni $j = 1, \ldots, n_2$. Se tutti i C^2_j fossero contenuti nell'unione di un numero finito di aperti di $\mathcal{U}$ allora la stessa cosa varrebbe per X_1; quindi, come prima, si vede, che per almeno un indice j l'insieme $X_2 = C^2_j$ non è contenuto nell'unione di un numero finito di elementi di $\mathcal{U}$.

Iterando l'argomento si ottiene una successione $\{X_n\}$ di sottoinsiemi di X tali che per ogni n si ha $X_n \subset X_{n-1}$ e $diam(X_n) < 1/n$ e ciascun X_n non è contenuto nell'unione di un numero finito di elementi di $\mathcal{U}$.

Per ogni n si scelga un elemento $x_n \in X_n$. Per costruzione se $n > m$ allora $x_n, x_m \in X_m$ e quindi

$$d(x_n, x_m) \leq diam(X_m) < \frac{1}{m}.$$

Da questa stima segue che $\{x_m\}$ è una successione di Cauchy nello spazio metrico completo X e quindi la successione $\{x_m\}$ converge a $x_0 \in X$.

Sia $x \in X_k$. Allora per ogni $n > k$ si ha

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x_0) \leq \frac{1}{k} + d(x_n, x_0)$$

e quindi, passando al limite per $n \to \infty$, si ha

$$d(x, x_0) \leq \frac{1}{k}.$$

Dato che $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di X, si ha $x_0 \in A_0$ per qualche aperto $A_0 \in \mathcal{U}$. Allora per qualche $r > 0$ si ha $x_0 \in \mathbb{B}(x_0, r) \subset A_0$. Se k è un intero positivo tale che $1/k < r$, allora

$$X_k \subset \{x | d(x_0, x) \leq \frac{1}{k}\} = \mathbb{D}(x_0, \frac{1}{k}) \subset \mathbb{B}(x_0, r) \subset A_0$$

e quindi risulterebbe che X_k è contenuto in un solo elemento di $\mathcal{U}$ e questo non può essere per costruzione.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sia $\{x_n\}$ una successione di X e sia E l'insieme dei punti di X descritto da $\{x_n\}$. Se E è un insieme finito, allora esiste $e \in E$ tale che $x_n = e$ per infiniti n e quindi $\{x_n\}$ ha una sottosuccessione costante e dunque convergente. Se E è infinito, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste un punto d'accumulazione x_0 per E. Costruiamo una sottosuccessione di $\{x_n\}$ convergente a x_0 nel modo seguente. Sia n_1 tale che $x_{n_1} \in E \cap (\mathbb{B}(x_0, 1) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. Supponiamo ora di aver definito i primi k indici $\{n_1 < \ldots, < n_k\}$ della sottosuccessione in modo che per $i = 1, \ldots, k$ si abbia $x_{n_i} \in E \cap (\mathbb{B}(x_0, 1/i) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$.

Dato che, per la Proposizione 1.2.2, la palla $\mathbb{B}(x_0, \frac{1}{k+1})$ interseca E in infiniti punti, esiste un indice $n_{k+1} > n_k$ tale che

$$x_{n_{k+1}} \in E \cap \left(\mathbb{B}(x_0, \frac{1}{k+1}) \setminus \{x_0\}\right) \neq \emptyset.$$

La sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ definita in tal modo converge a x_0. □

Discutiamo ora il comportamento delle applicazioni continue su spazi metrici compatti. Una nozione più forte della continuità e che risulta spesso utile è data dalla seguente:

Definizione 1.2.2: Una applicazione $F: X \to Y$ fra due spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) si dice *uniformemente continua* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in X$ con $d_X(x, y) < \delta$ si ha $d_Y(F(x), F(y) < \epsilon$.

Naturalmente un'applicazione uniformemente continua è anche continua. È facile convincersi che non vale il viceversa. Ad esempio la funzione continua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua. Altrimenti esisterebbe $\delta > 0$ tale che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $|x - y| < \delta$ si dovrebbe avere $|x^2 - y^2| < 1$. Ma allora prendendo ad esempio $y = x + \delta/2$, si dovrebbe avere per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$1 > |x^2 - (x + \frac{\delta}{2})^2| = \frac{\delta^2}{4} + x\delta$$

e questo è assurdo. Vedremo ora che se invece il dominio dell'applicazione è compatto vale l'equivalenza fra le due nozioni.

Cominciamo con un'osservazione molto utile anche in altre situazioni:

Teorema 1.2.5: (Lemma del numero di Lebesgue) *Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e $\mathcal{U}$ un suo ricoprimento aperto. Esiste $\delta > 0$ tale che per ogni sottoinsieme $Y \subset X$ con diametro minore di δ si abbia $Y \subset A$ per qualche aperto $A \in \mathcal{U}$. Il numero δ si dice un numero di Lebesgue del ricoprimento $\mathcal{U}$.*

Dimostrazione: Per assurdo si supponga che non esista $\delta > 0$ tale che ogni sottoinsieme di X di diametro minore di δ sia contenuto in un aperto del ricoprimento $\mathcal{U}$. In particolare per ogni intero positivo n esiste un insieme C_n con $diam(C_n) < 1/n$ che non è contenuto in alcun elemento di $\mathcal{U}$. Per ogni n sia $x_n \in C_n$. Dato che X è compatto, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ convergente a $x \in X$. Allora per qualche $A \in \mathcal{U}$ deve essere $x \in A$; inoltre, dato che A è aperto, esiste $\epsilon > 0$ tale che $\mathbb{B}(x, \epsilon) \subset A$. Dunque, per qualche N, se $n_k > N$ si ha

$$x_{n_k} \in \mathbb{B}(x, \frac{\epsilon}{2}) \ \text{ e } \ \frac{1}{n_k} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dato che $diam(C_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$, per ogni $c \in C_{n_k}$ si ha

$$d(c, x) \leq d(c, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n_k} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

e quindi $c \in \mathbb{B}(x, \epsilon) \subset A$ e, di conseguenza, $C_{n_k} \subset A$: assurdo! □

Come corollario abbiamo

TEOREMA 1.2.6: (di Heine-Cantor) *Sia $F: X \to Y$ una applicazione continua fra due spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y). Se X è compatto, F è uniformemente continua.*

Dimostrazione: Dato $\epsilon > 0$, si consideri il ricoprimento aperto di Y definito da

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbb{B}\left(y, \frac{\epsilon}{2}\right) | y \in Y \right\}$$

e sia $\mathcal{V}$ il ricoprimento aperto di X definito da

$$\mathcal{V} = \left\{ F^{-1}(B) | B \in \mathcal{U} \right\}.$$

Sia $\delta > 0$ un numero di Lebesgue per il ricoprimento $\mathcal{V}$ del compatto X. Allora per ogni $x_1, x_2 \in X$ tali che $d_X(x_1, x_2) < \delta$, l'insieme $\{x_1, x_2\}$ ha diametro minore di δ e quindi esiste qualche $A \in \mathcal{V}$ con $\{x_1, x_2\} \subset A$. Dato che $F(A) \subset \mathbb{B}(y, \frac{\epsilon}{2})$ per qualche $y \in Y$, si ha

$$d_Y(F(x_1), F(x_2)) \leq d_Y(F(x_1), y) + d_Y(y, F(x_2)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

ESERCIZI

1. Sia $Y \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme limitato. Dimostrare che $\inf(Y)$ e $\sup(Y)$ sono punti d'accumulazione di Y.

2. Siano $f_n: [0, 1] \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f_n(x) = x^n$ e $Y = \{f_n\} \subset C([0, 1], \mathbb{R})$. Allora, considerata su $C([0, 1], \mathbb{R})$ la distanza della convergenza uniforme, dimostrare

(a) Y è un sottospazio limitato dato che è contenuto nella palla centrata nella funzione nulla e di raggio 1;

(b) Y è un chiuso perchè una successione $\{h_n\} \subset Y$ è convergente in $C([0, 1], \mathbb{R})$ se e solo se esiste N tale che $h_i = h_j$ per ogni $i, j \geq N$;

(c) Y non è compatto, e quindi non è totalmente limitato, dato che ogni successione in Y con termini tutti diversi non ammette sottosuccessioni convergenti.